

TADEU JUNIOR GROSS

**ANÁLISE DO CONTROLE DE POTÊNCIA APLICADO AO
CANAL REVERSO DE SISTEMAS DS-CDMA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

SÃO PAULO

2005

TADEU JUNIOR GROSS

**ANÁLISE DO CONTROLE DE POTÊNCIA APLICADO AO
CANAL REVERSO DE SISTEMAS DS-CDMA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração:
Sistemas Eletrônicos

Orientador:
Prof. Dr. Paul Jean Etienne Jeszensky

SÃO PAULO

2005

Gross, Tadeu Júnior

Análise do Controle de Potência Aplicado ao Canal Reverso de Sistemas DS-CDMA.
São Paulo, Junho de 2005
80 p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle – Área de Sistemas
Eletrônicos.

1. Telefonia Celular; 2. CDMA; 3. Canal Reverso; 4. Controle de Potência; 5. Sistemas
3G.

Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de
Telecomunicações e Controle. Área de Sistemas Eletrônicos.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Sueli e Heitor.

A minha admiração por vocês aumenta a cada dia.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Paul Jean Etienne Jeszensky por sua orientação, infindável paciência, serenidade e incentivo manifestados no decorrer da elaboração deste trabalho. Sua forma objetiva e metódica de trabalhar serve-me de exemplo.

Ao Prof. Dr. Taufik Abrão por seus encorajamentos e proveitosas discussões. Sua determinação em construir conhecimento é fonte de inspiração.

À Universidade de São Paulo e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na realização deste trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação utiliza-se o modelo dinâmico contínuo de Verhulst, que fora elaborado inicialmente para descrever o crescimento populacional de espécies biológicas com restrição de alimento e espaço físico, para sintetizar um novo - Distributed Power Control Algorithm (DPCA) aplicável em sistemas Direct Sequence Code Division Multiple Access (DS-CDMA). Realiza-se a discretização da equação diferencial correspondente através da aplicação do Método de Euler de Integração Numérica. As propriedades do algoritmo recursivo assim obtido, como distância euclidiana do vetor ótimo em regime e velocidade de convergência, são investigadas via simulações. Os resultados são confrontados com simulações análogas do algoritmo clássico de Foschini e Miljanic e do sigmoidal de Uykan e Koivo. Na presença de erros de estimação, o DPCA proposto apresentou menor discrepância em regime do vetor ótimo e maior velocidade de convergência. Adicionalmente, aplica-se a Teoria dos Círculos de Gerschgorin (GC) na determinação de condições suficientes para o problema de alocação ser factível.

ABSTRACT

This dissertation deals with the Verhulst continuous dynamic model is used, that was elaborated initially to describe the biological species population growth with food and physical space restrictions, in order to synthesize a new DPCA (Distributed Power Control Algorithm) applicable in Direct Sequence Code Division Multiple Access (DS-CDMA) systems.

The associated differential equation is discretized via the Euler method, originally used for numerical integration. Properties of this recursive algorithm, as the Euclidean distance of optimum power vector distance and convergence velocity, are investigated via simulation. Numerical results are used in order to compare the performance against two other classic DPCA algorithms: the Foschini and Miljanic, and the sigmoidal of Uykan and Koivo. With estimation errors the proposed DPCA has presented smaller discrepancy in comparison with the optimum vector and also a better convergence velocity.

Additionally the Gerschgorin Circles (GC) theory was applied for the determination of sufficient conditions for the allocation problem feasibility.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.	ix
LISTA DE ABREVIATURAS.	x
1 INTRODUÇÃO	01
2 CONCEITOS PRELIMINARES	03
2.1 MODELO DO SISTEMA.	03
2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ALOCAÇÃO ÓTIMA	07
2.3 ANÁLISE DA VIABILIDADE	07
2.4 MÉTODO DISTRIBUÍDO PARA RESOLVER O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO	11
2.5 PROCEDIMENTO PARA ESTIMAR A SINR	13
2.6 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A CONVERGÊNCIA	17
2.7 ASPECTOS RELACIONADOS AO PROJETO DE UM DPCA.	18
2.8 EXEMPLOS DE DPCA'S ENCONTRADOS NA LITERATURA	19
3 ALGORITMO PROPOSTO	22
3.1 PROCEDIMENTO DE SÍNTESE	22
3.2 DOMÍNIO ATRATOR DO ALGORITMO PROPOSTO.	26
3.2.1 SÍNTESE DE UM SUBCONJUNTO DO DOMÍNIO ATRATOR	26
3.2.2 ANÁLISE GRÁFICA.	32
4 RESULTADOS NUMÉRICOS.	51
4.1 PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO.	51
4.2 MEDIDAS DE DESEMPENHO DE ALGORITMOS DISTRIBUÍDOS	52
4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO	53
5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62
ANEXO A: TRABALHO APRESENTADO NO XXI SBRT, BELÉM (PA), 2004.	65

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1: Usuários em células distintas.
- Figura 2.2: Usuários na mesma célula.
- Figura 2.3: Desalinhamento temporal entre os usuários.
- Figura 2.4: Sistema dinâmico com equilíbrio na solução do problema de alocação.
- Figura 2.5: Princípio de funcionamento de um DPCA.
- Figura 3.1: Curva $p(t)$ parametrizada por diferentes condições iniciais.
- Figura 3.2: Sistema referente ao DPCA proposto.
- Figura 3.3: Projeção da função $F_i(\mathbf{p})$ no plano cartesiano.
- Figura 3.4: Processo de estruturação do poliedro P_α , considerando $\alpha = 0,25$.
- Figura 3.5: Efeito da variação do parâmetro α sobre a forma do poliedro P_α .
- Figura 3.6: Matização de uma superfície elipsoidal segundo $E_i(\lambda, \mathbf{p})$.
- Figura 3.7: Seccionamento de P_α utilizando-se $p_i = \gamma_i(\mathbf{p})$, $i = 1, 2$.
- Figura 3.8: Orientação do vetor $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ conforme a região de P_α .
- Figura 3.9: Processos de convergência obtidos por simulações.
- Figura 3.10: Comportamento típico de $\mathbf{p}(n) = [p_1(n) \ p_2(n)]^T$ para $\mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \leq \mathbf{p}^*$.
- Figura 3.11: Correspondência entre $\tau(\lambda)$ e a posição de $\lambda \mathbf{p}^*$ relativa ao poliedro P_α .
- Figura 3.12: Efeito da perturbação de α sobre a função teste $\tau(\lambda)$.
- Figura 3.13: Comportamento típico de $\mathbf{p}(n) = [p_1(n) \ p_2(n)]^T$ para $\mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \geq \mathbf{p}^*$.
- Figura 3.14: Configuração dos pontos conforme o número de iterações.
- Figura 3.15: Entropia em função de α para a versão escalar do algoritmo proposto.
- Figura 4.1: Número médio de iterações para a convergência em função de α .
- Figura 4.2: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 15$.
- Figura 4.3: Ganho em termos de PM em regime para $K = 15$.
- Figura 4.4: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 10$.
- Figura 4.5: Ganho em termos de PM em regime para $K = 10$.
- Figura 4.6: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 5$.
- Figura 4.7: Ganho em termos de PM em regime para $K = 5$.
- Figura 4.8: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 2$.
- Figura 4.9: Ganho em termos de PM em regime para $K = 2$.

LISTA DE ABREVIATURAS

AWGN - *Additive White Gaussian Noise*

BPSK - *Binary Phase Shift Keying*

CG - Círculos de Gerschgorin

DEP - Densidade Espectral de Potência

DPCA - *Distributed Power Control Algorithm*

DS/CDMA - *Direct Sequence/Code Division Multiple Access*

ERB - Estação Rádio Base

MAI - *Multiple Access Interference*

MIMO - *Multiple Input Multiple Output*

NSE - *Normalized Squared Error*

NSEG - *Normalized Squared Error Gain*

PCG - *Power Control Group*

PM - Potência Média

PMG - Potência Média Ganho

QoS - *Quality of Service*

SINR - *Signal to Interference plus Noise Ratio*

UM - Unidade Móvel

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nos sistemas celulares de terceira geração (3G) contemplam-se transmissão de voz, dados e multimídia. Os níveis de QoS, tipicamente expressos em termos de probabilidade de erro de bit máxima, superam significativamente o oferecido nos sistemas celulares de segunda geração, destinados essencialmente à transmissão de voz.

Para sistemas DS/CDMA a melhoria do nível de QoS implica necessariamente na redução da MAI [Yener 01]. Os novos níveis de QoS podem ser alcançados por meio do uso de:

- Novos códigos de espalhamento [Kuramoto 04]: Como não é possível obter códigos que sejam ortogonais entre si por todo o intervalo de possíveis atrasos, trabalha-se na construção de códigos que apresentem baixos níveis de correlação cruzada.
- Melhores algoritmos de controle de potência, [Viterbi 93], [Priscoli 96] e [Sim 99]: O uso de algoritmos com respostas de controle mais rápidas e que monitorem mais frequentemente o nível de potência com que os sinais provenientes de usuários ativos no interior da célula são recebidos na ERB, de modo a realizar o controle do nível de potência do sinal transmitido por esses usuários procurando cumprir os níveis de QoS dos serviços prestados.
- Antenas com diagrama de radiação ajustável [Farrokhi 98a], [Farrokhi 98b] e [Monzingo 80]: Antenas com diagramas de radiação ajustados dinamicamente por meio de processamento adaptativo de sinais permitem privilegiar a recepção de sinais provenientes de determinada região da

célula e, dependendo do nível de diretividade, é possível reduzir a região de recepção de sinais a uma pequena região em torno do usuário.

- Detectores multiusuários [Hui 98], [Verdu 86] e [Verdu 98]: É possível obter ganhos significativos de capacidade e melhorar o desempenho de sistemas DS-CDMA ao abandonar a técnica convencional de detecção única, na qual cada ramo do receptor é direcionado para a obtenção do sinal de apenas um usuário, e adotar a técnica de detecção multiusuário, que utiliza informações (código, atraso, amplitude e fase) de todos os usuários com vistas a melhorar a detecção do sinal de cada usuário.

A segunda das estratégias acima listadas é o tema desse trabalho. A seleção adequada das potências dos sinais transmitidos pelos usuários consiste em outra estratégia para o alcance dos níveis de QoS demandados. Na realidade, não se obtém o vetor ótimo de potências instantaneamente, mas sim através de um processo iterativo, denominado de algoritmo de controle de potência, que deve convergir o mais rapidamente possível. Como será detalhado, a velocidade de convergência, a proximidade do valor ótimo em regime e a sensibilidade a erros de estimação são as principais propriedades de um algoritmo de controle de potência iterativo.

Essa dissertação está dividida como se descreve a seguir.

No capítulo 2 deste trabalho define-se o problema de alocação ótima.

No capítulo 3 projeta-se um novo algoritmo de controle de potência.

No capítulo 4 compara-se o algoritmo desenvolvido com outros dois conhecidos na literatura.

No capítulo 5 apresentam-se as conclusões e trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, primeiramente formula-se o problema de alocação das potências transmitidas no canal reverso de um sistema multicelular DS-CDMA para que se atendam as metas de QoS com um consumo total de potência mínimo. Em seguida, discutem-se as condições necessárias para que exista a solução desse problema. Posteriormente, baseando-se na literatura, descreve-se uma metodologia para síntese de algoritmos que controlem as potências transmitidas com o intuito de atingir essa solução ótima iterativamente e de forma distribuída. Finaliza-se o capítulo com exemplos de algoritmos provenientes da literatura.

2.1 MODELO DO SISTEMA

Para estruturação do problema de alocação necessita-se de um modelo para o cenário real. Primando pela generalidade, optou-se por um modelo multicelular, já que o unicelular pode ser visto como um caso particular. Em seguida descreve-se o modelo.

Admitem-se K usuários ativos no canal reverso de um sistema DS-CDMA com N células. Considera-se modulação BPSK.

O usuário i (às vezes referenciado por M_i) transmite seu sinal com potência p_i e é demodulado na estação rádio base B_i , onde chega com potência $a_{ii} p_i$; a_{ii} é a atenuação provocada pelo canal. De forma análoga, o sinal do usuário j chega em B_j com potência $a_{jj} p_j$ (ver Figs. 2.1 e 2.2). Adota-se que o critério de designação da estação rádio base é o da distância mínima, ou seja, cada usuário é demodulado por aquela que estiver mais próxima.

A potência interferente na entrada do receptor em B_i , oriunda do sinal transmitido por M_j , é dada por $a_{ij} p_j$. De modo similar, a interferência promovida

por M_i em B_j vale $a_{ji} p_i$ (ver Figs. 2.1 e 2.2). Cada usuário M_i é identificado por uma assinatura (seqüência de espalhamento). Sua forma de onda, denotada por $s_i(t)$, é não nula apenas no intervalo $[0, T_b]$ e possui energia unitária, isto é, $\int_0^{T_b} s_i^2(t) dt = 1$. Supõe-se que a demodulação do sinal transmitido por M_i seja realizada em B_i por meio de um filtro casado a tal seqüência de espalhamento.

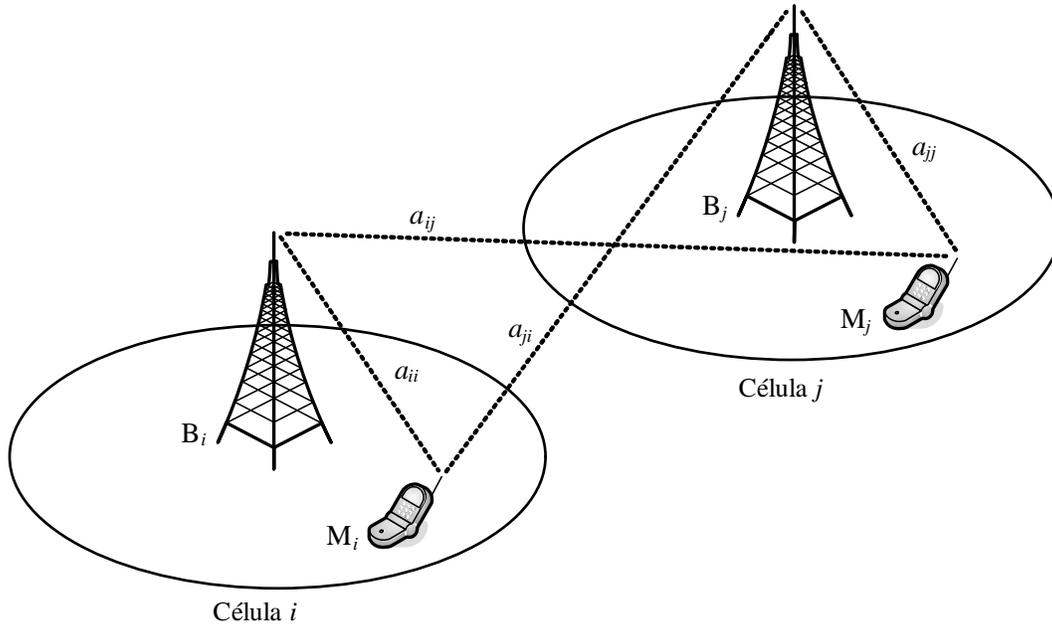


Figura 2.1: Usuários em células distintas.

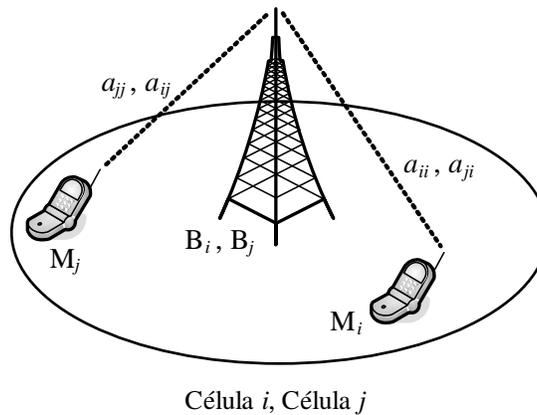


Figura 2.2: Usuários na mesma célula.

Assume-se que o filtro casado referente ao usuário M_i esteja sincronizado com o atraso τ_{ij} . Os demais usuários originam interferência assincronamente. Os atrasos relativos ao usuário M_i , que podem possuir qualquer valor menor que a duração de um bit (T_b), não sofrem variação temporal. No bit ℓ do usuário de interesse M_i , outro usuário origina interferência por meio de seus bits ℓ e $(\ell-1)$ ou ℓ e $(\ell+1)$, dependendo do sinal do atraso relativo. Na Fig. 2.3, as duas situações possíveis estão esquematizadas. O atraso do usuário j relativo ao filtro casado do usuário i é representado por τ_{ij} . Na Fig. 2.3, o usuário j possui um atraso positivo em relação ao usuário i e cria interferência no bit ℓ de i através de seus bits $(\ell-1)$ e ℓ . Similarmente, o usuário k tem um atraso relativo ao usuário i negativo e cria interferência no bit ℓ de i por meio de seus bits ℓ e $(\ell+1)$.

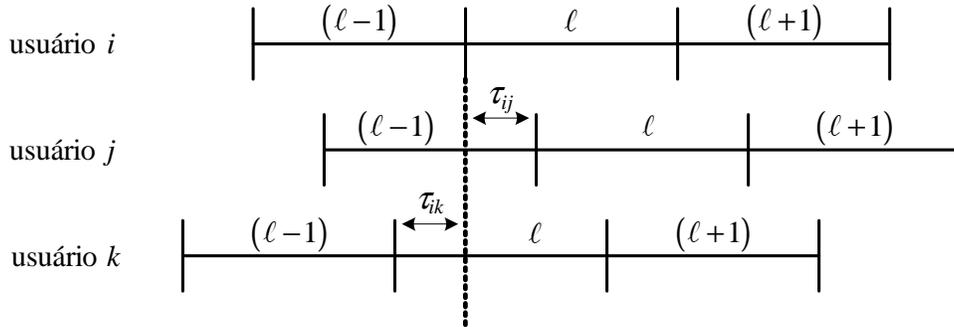


Figura 2.3: Desalinhamento temporal entre os usuários.

Objetivando o cálculo da interferência de múltiplo acesso no bit ℓ do usuário i define-se três tipos de correlações cruzadas entre as assinaturas dos usuários i e j : $\bar{\Gamma}_{ij}$, Γ_{ij} e $\tilde{\Gamma}_{ij}$. Se $\tau_{ij} \geq 0$ (caso do usuário j na Fig. 2.3):

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \int_0^{\tau_{ij}} s_i(t) s_j(T_b - \tau_{ij} + t) dt$$

$$\Gamma_{ij} = \int_{\tau_{ij}}^{T_b} s_i(t) s_j(t - \tau_{ij}) dt \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = 0$$

E se $\tau_{ij} \leq 0$ (caso do usuário k na Fig. 2.3):

$$\bar{\Gamma}_{ij} = 0$$

$$\Gamma_{ij} = \int_0^{T_b + \tau_{ij}} s_i(t) s_j(t - \tau_{ij}) dt \quad (2.2)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \int_{T_b + \tau_{ij}}^{T_b} s_i(t) s_j(t - T_b - \tau_{ij}) dt$$

Note em (2.1) e (2.2) que $\bar{\Gamma}_{ij}$ ou $\tilde{\Gamma}_{ij}$ é igual a zero, implicando $\bar{\Gamma}_{ij}\tilde{\Gamma}_{ij} = 0$ para todo i, j . Note também que $\Gamma_{ii} = 1$ e $\bar{\Gamma}_{ii} = \tilde{\Gamma}_{ii} = 0$.

A saída do i -ésimo filtro casado no bit ℓ é:

$$w_i(\ell) = \sum_{j=1}^K \sqrt{p_j} \sqrt{a_{ij}} \hat{b}_{ij}(\ell) + n_i(\ell) \quad (2.3)$$

Onde fez-se uso da definição:

$$\hat{b}_{ij}(\ell) = \bar{\Gamma}_{ij} b_j(\ell - 1) + \Gamma_{ij} b_j(\ell) + \tilde{\Gamma}_{ij} b_j(\ell + 1) \quad (2.4)$$

Onde $b_j(\ell)$ é o ℓ -ésimo bit do usuário j (± 1 com igual probabilidade) e $n_i(\ell)$ é uma amostra do AWGN de média zero e variância σ^2 . Observe que, embora $b_j(\ell)$ e $b_j(\ell + k)$ sejam independentes para $k \neq 0$, $\hat{b}_{ij}(\ell)$ e $\hat{b}_{ij}(\ell + k)$ não o são para $k = \pm 1$.

De (2.3) conclui-se que a interferência de múltiplo acesso é:

$$MAI_i(\ell) = \sum_{j=1, j \neq i}^K \sqrt{p_j} \sqrt{a_{ij}} \hat{b}_{ij}(\ell) \quad (2.5)$$

Portanto, com variância:

$$\sigma_{MAI_i}^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^K a_{ij} p_j (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) \quad (2.6)$$

Desta forma, a SINR do usuário i , denotada por γ_i , é dada por:

$$\gamma_i = \frac{a_{ii} p_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^K a_{ij} p_j (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) + \sigma^2} \quad (2.7)$$

De modo compacto:

$$\gamma_i = \frac{g_{ii} p_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^K g_{ij} p_j + \sigma^2}, \quad g_{ij} = a_{ij} (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) \text{ e } g_{ii} = a_{ii} \quad (2.8)$$

Tipicamente, define-se QoS em termos de probabilidade de erro de bit, que diminui com a SINR de forma monotônica. Desta forma, pode-se especificar QoS em termos de SINR.

2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ALOCAÇÃO ÓTIMA

No modelo descrito, o sinal proveniente da unidade móvel i será corretamente interpretado, com uma probabilidade satisfatória, se a SINR na estação rádio base não for menor que um determinado valor, denotado por γ_i^* , estabelecido *a priori*.

Portanto, deve-se controlar cada potência transmitida p_k com o intuito de se obedecer a expressão:

$$\min \sum_{i=1}^K p_i \quad (2.9)$$

$$\gamma_i \geq \gamma_i^*, \quad i = 1, \dots, K$$

O vetor de potências que transforma as K inequações acima em igualdades também minimiza a soma das potências transmitidas [Ulukus 98]. Portanto, resolver (2.9) consiste em solucionar o seguinte sistema linear:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p} = \boldsymbol{\eta}, \quad h_{ij} = \gamma_i^* g_{ij} g_{ii}^{-1}, \quad h_{ii} = 0 \text{ e } \eta_i = \gamma_i^* \sigma^2 g_{ii}^{-1} \quad (2.10)$$

O problema da alocação ótima consiste em encontrar o vetor ótimo:

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \boldsymbol{\eta} \quad (2.11)$$

2.3 ANÁLISE DA VIABILIDADE

A existência de uma solução não negativa para (2.10) segue de dois teoremas, atribuídos a Perron e Frobenius, sobre autovalores de matrizes não negativas. Esses teoremas são os seguintes (ver [Seneta 81]):

Teorema 1: Se \mathbf{H} é uma matriz quadrada não negativa, existe um autovalor $\rho_{\mathbf{H}}$,

denominado autovalor de Perron-Frobenius, de forma que: 1) $\rho_{\mathbf{H}}$ é um valor real e não negativo; 2) $\rho_{\mathbf{H}} \geq |\omega|$ para qualquer autovalor ω de \mathbf{H} .

No plano complexo, o raio $r(\mathbf{H})$ do menor círculo que contém todos os autovalores de uma matriz \mathbf{H} qualquer, ou seja, $r(\mathbf{H}) = \max\{|\omega|: \omega \in \omega(\mathbf{H})\}$, denomina-se raio espectral da matriz \mathbf{H} [Meyer 00]. Portanto, para uma matriz quadrada não negativa, raio espectral e autovalor de Perron-Frobenius podem ser utilizados sem distinção.

Teorema 2: Para uma matriz não negativa irredutível \mathbf{H} e um vetor \mathbf{p} estritamente positivo, $\mathbf{p} = \mathbf{H}\mathbf{p} + \boldsymbol{\eta}$ possui solução \mathbf{p} não negativa se, e somente se, o autovalor $\rho_{\mathbf{H}}$ de Perron-Frobenius for menor que a unidade [Seneta 81].

Então, o sistema linear na equação (2.10) é *factível* (*viável*) se o raio espectral da matriz \mathbf{H} for menor que a unidade. Portanto, torna-se necessário identificar que condições os elementos da matriz \mathbf{H} devem satisfazer de forma que os autovalores estejam limitados ao círculo unitário.

Uma maneira precisa de relacionar os elementos de \mathbf{H} com seus autovalores seria analisar a influência dos coeficientes do polinômio característico sobre suas raízes. Este procedimento secular torna-se inadequado quando o grau for maior que 4, pois, exceto em casos particulares, não existe fórmula algébrica em função dos coeficientes para encontrar zeros de polinômios com grau maior ou igual a 5. Neste contexto, métodos aproximados para localizar autovalores revelam-se importantes.

A Teoria dos Círculos de Gerschgorin [Meyer 00] permite uma forma simples de delimitar regiões do plano complexo que contêm autovalores.

O espectro $\omega(\mathbf{H})$ de uma matriz $\mathbf{H}_{K \times K}$ está contido em uma união $\mathcal{G}(\mathbf{H})$ de círculos centrados nos elementos da diagonal principal [Meyer 00]. O raio $R_i(\mathbf{H})$ da região circular $\mathcal{D}_i(\mathbf{H})$ que envolve h_{ii} é obtido somando-se os módulos dos elementos pertencentes a linha i não localizados na diagonal principal. Matematicamente, essas definições podem ser descritas da seguinte forma:

$$R_i(\mathbf{H}) = \sum_{j=1, j \neq i}^K |h_{ij}| \quad (2.12)$$

$$\mathcal{D}_i(\mathbf{H}) = \{x \in \mathbb{C} : |x - h_{ii}| \leq R_i(\mathbf{H})\} \quad (2.13)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{H}) = \bigcup_{i=1}^K \mathcal{D}_i(\mathbf{H}) \quad (2.14)$$

$$\omega(\mathbf{H}) \subset \mathcal{G}(\mathbf{H}) \quad (2.15)$$

Os discos $\mathcal{D}_i(\mathbf{H})$, $i = 1, \dots, K$, são denominados Círculos de Gerschgorin [Meyer 00] e o fato dos autovalores de \mathbf{H} estarem localizados na união dessas regiões pode ser referenciado como Teorema de Gerschgorin. Cada disco *disjunto* necessariamente contém um autovalor.

Os espectros de matrizes transpostas são idênticos, e, portanto, $\omega(\mathbf{H}) \subset \mathcal{G}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{G}(\mathbf{H}^T)$. Esta intersecção diminui a região de busca no plano complexo, melhorando a estimativa inicial sobre a localização dos autovalores.

O Teorema de Gerschgorin aliado às características particulares da matriz \mathbf{H} em (2.10) revela-se uma ferramenta prática na obtenção de condições suficientes para a viabilidade.

Os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{H}_{K \times K}$ em (2.10) são nulos por definição e, portanto, todos os Círculos de Gerschgorin são concêntricos e centrados na origem do plano complexo. Desta forma, o disco $\mathcal{D}_k(\mathbf{H})$ de maior raio contém a união de todos os Círculos de Gerschgorin, ou seja, existe pelo menos um $k \in \{1, \dots, K\}$ de modo que $\mathcal{G}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{D}_k(\mathbf{H})$. Conseqüentemente, para este índice k vale a desigualdade $r(\mathbf{H}) \leq R_k(\mathbf{H})$. Analogamente, pelo fato de $\omega(\mathbf{H}) = \omega(\mathbf{H}^T)$, obtém-se $r(\mathbf{H}) \leq R_\ell(\mathbf{H}^T)$ para algum $\ell \in \{1, \dots, K\}$. Agrupando-se estas duas desigualdades consegue-se um limite mais estreito para o raio espectral, ou seja, $r(\mathbf{H}) \leq \min\{R_k(\mathbf{H}), R_\ell(\mathbf{H}^T)\}$.

Como o raio espectral $r(\mathbf{H})$ e o autovalor de Perron-Frobenius $\rho_{\mathbf{H}}$ são iguais, conclui-se que $\rho_{\mathbf{H}} \leq \min\{R_k(\mathbf{H}), R_\ell(\mathbf{H}^T)\}$. Assim, como um sistema factível deve ter $\rho_{\mathbf{H}} < 1$, a restrição $\min\{R_k(\mathbf{H}), R_\ell(\mathbf{H}^T)\} < 1$, onde k identifica o maior disco da matriz \mathbf{H} e ℓ o maior de sua transposta, é uma condição suficiente para a viabilidade.

Sistematicamente, os passos para verificar se (2.10) é viável são:

1- Calcular a soma dos elementos da linha de \mathbf{H} que possuir maior norma:

$$R_{\text{row}}^{\max} = \max_k \left\{ \sum_{\ell=1}^K h_{k\ell} \right\} \quad (2.16)$$

2- Calcular a soma dos elementos da coluna de \mathbf{H} que possuir maior norma:

$$R_{\text{col}}^{\max} = \max_{\ell} \left\{ \sum_{k=1}^K h_{k\ell} \right\} \quad (2.17)$$

3- Excluir o maior valor entre os dois anteriores:

$$R_{\hat{g}_r \cap \hat{g}_c}^{\max} = \min \left\{ R_{\text{row}}^{\max}, R_{\text{col}}^{\max} \right\} \quad (2.18)$$

4- Valor resultante menor do que 1 implica viabilidade:

$$\begin{aligned} R_{\hat{g}_r \cap \hat{g}_c}^{\max} < 1 &\Rightarrow \text{sistema factível} \\ R_{\hat{g}_r \cap \hat{g}_c}^{\max} &\geq 1 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A confirmação da viabilidade por esta metodologia simples descarta a necessidade da utilização de qualquer método numérico de cálculo do autovalor de Perron-Frobenius. Na situação em que $R_{\hat{g}_r \cap \hat{g}_c}^{\max} \geq 1$, não se pode garantir que o sistema é factível e a certificação sobre a existência do vetor ótimo deve ser feita por outro mecanismo numérico. Nesse caso, o quanto $R_{\hat{g}_r \cap \hat{g}_c}^{\max}$ for maior do que a unidade pode ser entendido como uma medida da incerteza que este método fornece sobre a viabilidade.

A condição suficiente de que os Círculos de Gerschgorin de \mathbf{H} ou \mathbf{H}^T devem estar no interior do círculo unitário permite verificar a tendência sobre viabilidade conforme se variam os parâmetros que definem h_{ij} .

A potência do usuário interferente j é atenuada por g_{ij} . Este ganho é tão menor quanto o for a correlação cruzada entre os usuários i e j (ver as definições em 2.8). Como $h_{ij} \propto g_{ij}$, baixas correlações cruzadas tendem a diminuir os Círculos de Gerschgorin e, portanto, tornar o sistema factível.

Analogamente, o valor de h_{ij} é influenciado pelo canal de rádio móvel. De acordo com as definições em (2.8) e (2.10), pode-se escrever que $h_{ij} \propto a_{ij} a_{ii}^{-1}$. Desta forma,

desvanecimento profundo no sinal i aliado a um elevado ganho de canal no sinal do interferente j podem fazer com que $R_{\mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_c}^{\max}$ atinja valor elevado, e o sistema pode tornar-se inviável.

Finalmente, como $h_{ij} \propto \gamma_i^*$, altos níveis de QoS tendem a aumentar os Círculos de Gerschgorin e tornar o sistema não factível.

2.4 MÉTODO DISTRIBUÍDO PARA RESOLVER O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO

Admitindo viabilidade, a solução ótima do problema de alocação satisfaz o seguinte conjunto de equações (ver (2.10)):

$$p_i^* = \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j^* + \eta_i, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.20)$$

Agora, considere uma função ímpar arbitrária $y_i = z_i(x)$ que tenha valor nulo apenas na origem. Assim sendo, (2.20) constitui o único ponto de equilíbrio do seguinte sistema dinâmico de tempo contínuo:

$$\dot{p}_i = z_i \left(-p_i + \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j + \eta_i \right), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.21)$$

Na Fig. 2.4, estrutura-se o diagrama de blocos referente a (2.21).

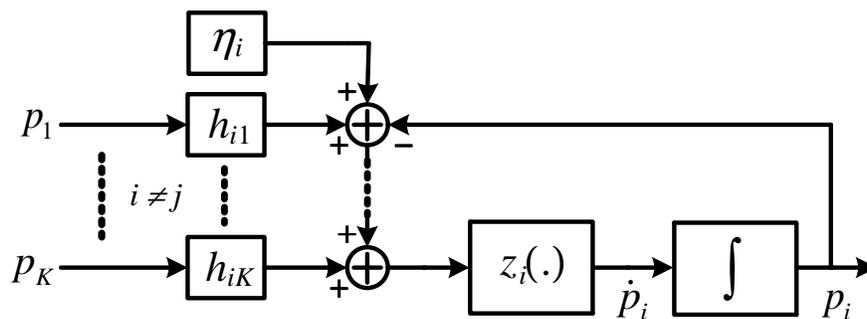


Figura 2.4: Sistema dinâmico com equilíbrio na solução do problema de alocação.

A reta secante à $p_i(t)$ nos instantes t e $\alpha_i + t$ é indistingüível da tangente em t quando α_i for suficientemente pequeno, supondo que $p_i(t)$ seja uma curva suave. Desta forma, vale a aproximação:

$$p_i(t + \alpha_i) \approx p_i(t) + \alpha_i z_i \left(-p_i(t) + \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j(t) + \eta_i \right), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad (2.22)$$

que consiste no conhecido método de Euler de integração numérica.

Do exposto, a seqüência $p_i[n] = p_i(n\alpha_i)$, $n \in \mathbb{N}$, pode ser obtida recursivamente por:

$$p_i[n+1] = p_i[n] + \alpha_i z_i \left(-p_i[n] + \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j[n] + \eta_i \right), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.23)$$

Das definições em (2.8) e (2.10), verifica-se que:

$$-p_i + \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j + \eta_i = - \left(1 - \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i} \right) p_i, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.24)$$

Portanto, (2.23) equivale a:

$$p_i[n+1] = p_i[n] - \alpha_i z_i \left(\left(1 - \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i[n]} \right) p_i[n] \right), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.25)$$

A recursão i em (2.25) pode ser efetivamente implementada na unidade móvel i . Admite-se que o parâmetro α_i , o nível de QoS quantificado por γ_i^* , a função $z_i(\cdot)$ e a potência transmitida $p_i[n]$ estejam disponíveis na unidade móvel i (M_i na Fig. 2.5). Entretanto, a SINR $\gamma_i[n]$ pode ser obtida somente na estação rádio base B_i , aquela que demodula o sinal do usuário i . Desta forma, para que o usuário i calcule por meio de (2.25) o próximo nível de potência, B_i precisa estimar $\gamma_i[n]$, quantizar o resultado em um número conveniente de bits e, em seguida, realimentá-lo para o usuário i através do canal direto. Todo o processo está esquematizado na Fig. 2.5.

Conforme a seção 2.5, é possível mensurar $\gamma_i[n]$ sem o conhecimento efetivo das informações relativas aos usuários interferentes, as quais influenciam em seu valor de acordo com a eq. (2.8). Assim, (2.25) depende apenas de parâmetros locais, permitindo

que o controle de potência como um todo funcione de *forma distribuída*, ou seja, que cada um dos K elos $M_i B_i$ realize isoladamente o respectivo controle de potência. Justifica-se, portanto, a denominação *algoritmo de controle de potência distribuído* (DPCA) para o conjunto de recursões em (2.25).

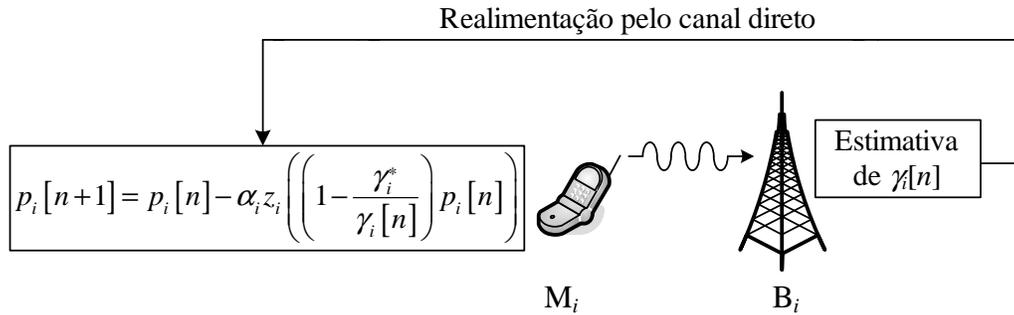


Figura 2.5: Princípio de funcionamento de um DPCA.

Em contraste à estratégia distribuída, o método centralizado para resolver o problema de alocação ótima consiste em reunir todos os elementos da matriz \mathbf{H} e do vetor $\boldsymbol{\eta}$ em alguma entidade que execute a operação em (2.11) e posteriormente “entregue” os valores ótimos das potências. Desta forma, o esquema centralizado necessita da estimação de cada elemento de \mathbf{H} e de $\boldsymbol{\eta}$, do tráfego dos valores destes elementos e, finalmente, de uma inversão matricial. Portanto, a complexidade de implementação da metodologia centralizada é acentuadamente maior do que a distribuída. Quando o número de usuários ativos no sistema multicelular for elevado, a quantidade de operações necessárias para a inversão matricial, o volume de estimações e o tráfego na rede desses valores estimados atingem proporções que tornam impraticável a estratégia centralizada.

2.5 PROCEDIMENTO PARA ESTIMAR A SINR

Considere que os bits transmitidos pelo usuário i sejam divididos em blocos disjuntos de L bits. Admita que todos os usuários do sistema mantenham suas respectivas potências transmitidas fixas no intervalo de tempo referente a um

bloco. De (2.3) e (2.4), o quadrado da saída do filtro casado i , no final do ℓ -ésimo bit do bloco n , é dado por:

$$P_i[n, \ell] = w_i^2[n, \ell] = \sum_{j=1}^K (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) a_{ij} p_j[n] + \sigma^2 + v_i[n, \ell] \quad (2.26)$$

A parcela denotada por $v_i[n, \ell]$, que contém a influência dos bits transmitidos e do ruído AWGN, é dada por:

$$\begin{aligned} v_i[n, \ell] = & \sum_{j=1}^K \sqrt{p_j[n]} \sqrt{a_{ij}} \Gamma_{ij} b_j[n, \ell] \{ \bar{\Gamma}_{ij} b_j[n, \ell-1] + \tilde{\Gamma}_{ij} b_j[n, \ell+1] \} \\ & + \sum_{j=1}^K \sum_{k \neq j} \sqrt{p_j[n]} \sqrt{p_k[n]} \sqrt{a_{ij}} \sqrt{a_{ik}} \hat{b}_{ij}[n, \ell] \hat{b}_{ik}[n, \ell] \\ & + 2n_i[n, \ell] \sum_{j=1}^K \sqrt{p_j[n]} \sqrt{a_{ij}} \hat{b}_{ij}[n, \ell] + \{ n_i^2[n, \ell] - \sigma^2 \} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Os bits transmitidos são independentes e equiprováveis (± 1). A amostra $n_i[n, \ell]$ do AWGN possui média zero e variância σ^2 . Portanto:

$$E\{v_i[n, \ell]\} = 0 \quad (2.28)$$

Então:

$$E\{P_i[n, \ell]\} = \sum_{j=1}^K (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) a_{ij} p_j[n] + \sigma^2 \quad (2.29)$$

Note que $E\{P_i[n, \ell]\}$ é exatamente a potência total na saída do filtro casado i .

Na prática, seu valor pode ser mensurado por meio do estimador:

$$\begin{aligned} P_i[n] &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L P_i[n, \ell] \\ &= \sum_{j=1}^K (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) a_{ij} p_j[n] + \sigma^2 + v_i[n] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Onde:

$$v_i[n] = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L v_i[n, \ell] \text{ e } E\{v_i[n]\} = 0 \quad (2.31)$$

Detalhes relativos ao cálculo analítico de $E\{v_i^2[n]\}$ são encontrados em [Ulukus 98]. Por ser um procedimento extenso, apresenta-se aqui apenas o resultado:

$$\begin{aligned}
E\{v_i^2[n]\} = & \frac{1}{L^2} \left\{ 2L \sum_{j=1}^K \sum_{k \neq j} p_j[n] p_k[n] a_{ij} a_{ik} (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) \right. \\
& \cdot (\bar{\Gamma}_{ik}^2 + \Gamma_{ik}^2 + \tilde{\Gamma}_{ik}^2) + 4 \sum_{j=1}^K p_j^2[n] a_{ij}^2 \Gamma_{ij}^2 (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) \\
& + 4L\sigma^2 \sum_{j=1}^K p_j[n] a_{ij} (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) + 2L\sigma^4 \\
& \left. + (4L-1) \left(\sum_{j=1}^K p_j[n] a_{ij} \Gamma_{ij} (\bar{\Gamma}_{ij} + \tilde{\Gamma}_{ij}) \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Do exposto até o momento, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
E\{P_i[n]\} = E\{P_i[n, \ell]\} = & \sum_{j=1}^K (\bar{\Gamma}_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^2 + \tilde{\Gamma}_{ij}^2) a_{ij} p_j[n] + \sigma^2 \\
E\left\{ \left(P_i[n] - E\{P_i[n]\} \right)^2 \right\} \rightarrow & 0 \text{ para } L \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ou seja, $P_i[n] = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L w_i^2[n, \ell]$ é uma *estimativa consistente* da potência total na saída do filtro casado i .

O processo completo de estimação da SINR $\hat{\gamma}_i[n]$ consiste nos seguintes passos:

- 1 - B_i calcula $\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L w_i^2[n, \ell]$;
- 2 - B_i realiza a quantização do valor obtido;
- 3 - B_i envia o resultado pelo canal direto à unidade móvel M_i ;
- 4 - M_i obtém efetivamente a estimativa de $\hat{\gamma}_i[n]$, através da equação:

$$\hat{\gamma}_i[n] = \frac{\hat{a}_{ii} p_i[n]}{\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L w_i^2[n, \ell] - \hat{a}_{ii} p_i[n]} \tag{2.34}$$

Note que o término do processo de estimação ocorre na própria unidade móvel, isto porque a estação rádio base não conhece o valor $p_i[n]$. Supõe-se que a estimativa do ganho de canal a_{ij} , denotada por \hat{a}_{ij} , também seja realizada na estação rádio base B_i e realimentada através do canal direto à unidade móvel M_i . Salienta-se que a estimação

do ganho de canal a_{ij} deve ser feita a cada T_c segundos. Este parâmetro, denominado *tempo de coerência*, corresponde ao intervalo de tempo no qual as características do canal não experimentam variação expressiva.

De acordo com (2.34), todas as SINR's do sistema multicelular podem ser calculadas conhecendo-se apenas os K ganhos de canal a_{ij} . Ressalta-se que, havendo N estações rádio base, existem $K \times N$ ganhos de canal (ver Fig. 2.1).

Note em (2.34) que a estimativa da SINR do usuário i não necessita do conhecimento de qualquer informação relativa aos interferentes. O usuário i precisa saber apenas a “média” do quadrado da saída do seu próprio filtro casado (filtro casado \hat{r}) e o seu próprio ganho de canal (ganho a_{ij}).

Observe que o processo descrito para estimar a SINR implica que cada atualização de potência realizada através (2.25) ocorre em intervalos de pelo menos L bits. As recursões em (2.25) devem convergir para a solução ótima do problema de alocação antes que cada ganho de canal a_{ij} experimente significativa alteração. Portanto, deve-se obedecer a seguinte desigualdade:

$$mLT_b \ll T_c \quad (2.35)$$

Onde m é o número de atualizações necessárias para a convergência. A seleção de um L apropriado é fundamental. Se for escolhido um valor pequeno, as atualizações de potência serão mais freqüentes e a convergência será mais rápida. Entretanto, realimentações freqüentes no canal direto diminuem a capacidade do sistema, pois “consomem” recursos (banda) [Ulukus 98].

A exigência em (2.35) reflete que a metodologia descrita na seção 2.4 é aplicável no combate das *variações lentas do canal*. Verifica-se na literatura que normalmente se projeta o controle de potência objetivando a atenuação

dos efeitos do *sombreamento* e da *perda de percurso*. Tipicamente, o tempo de coerência referente ao sombreamento é de 2,5 segundos em um ambiente urbano microcelular [Zander 92].

Uma estratégia para “conviver” com as flutuações das SINR’s provocadas pelos *desvanecimentos de pequena escala* (rápidos) consiste em fazer cada γ_i^* superior ao valor estipulado pela meta de QoS, conforme sugerido em [Hanly 96].

2.6 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A CONVERGÊNCIA

Considere que a estimativa da SINR, obtida conforme o procedimento na seção 2.5, seja perfeita. Nesta condição, provar a convergência das recursões em (2.25) é um problema determinístico e, evidentemente, equivale a demonstrar a convergência das recursões em (2.23), as quais podem ser reescritas na seguinte forma vetorial:

$$\mathbf{p}[n+1] = \mathbf{F}(\mathbf{p}[n]) \quad (2.36)$$

Onde:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = [F_1(\mathbf{p}), \dots, F_K(\mathbf{p})]^T \quad (2.37)$$

$$F_i(\mathbf{p}) = p_i + \alpha_i z_i \left(-p_i + \sum_{j \neq i}^K h_{ij} p_j + \eta_i \right), \quad i = 1, \dots, K$$

Em controle de potência, $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ é conhecida como *função interferência*. Em particular, recebe a denominação de *função interferência padrão* se, para todo $\mathbf{p} \geq 0$, obedecer o seguinte conjunto de propriedades:

1. *Positividade*: $\mathbf{F}(\mathbf{p}) > 0$.
2. *Monotonicidade*: Se $\mathbf{p} > \mathbf{p}'$, então $\mathbf{F}(\mathbf{p}) > \mathbf{F}(\mathbf{p}')$.
3. *Escalabilidade*: Para todo $\lambda > 1$, $\lambda \mathbf{F}(\mathbf{p}) > \mathbf{F}(\lambda \mathbf{p})$.

Essas propriedades foram estruturadas em [Yates 95] e são condições suficientes para a convergência do algoritmo em (2.36). Salienta-se que as

desigualdades $\mathbf{p} > \mathbf{p}'$ e $\mathbf{p} \geq 0$ significam, respectivamente, que $p_i > p'_i$ e $p_i \geq 0$ para todo i .

No capítulo 3, propõe-se um algoritmo com função interferência que não é padrão e, no entanto, converge quando inicializado no interior de um poliedro bem definido (ver capítulo 3). Portanto, as condições acima não são estritamente necessárias para a convergência.

Na realidade, o usuário i deve transmitir seu sinal com uma potência limitada entre um mínimo p_i^{min} e um máximo p_i^{max} . Uma possível formulação que incorpora estas exigências é dada por:

$$\tilde{F}_i(\mathbf{p}) = \max\{p_i^{min}, \min\{p_i^{max}, F_i(\mathbf{p})\}\} \quad (2.38)$$

De acordo com [Yates 95], se $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ for padrão, a função interferência $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{p})$ também o será e, portanto, limitar as potências transmitidas não afeta a convergência.

Na prática, as estimativas das SINR's sempre serão imperfeitas (estocásticas). Em [Ulukus 98], demonstrou-se analiticamente a convergência do algoritmo (2.25) com $z_i(x) = x$ e $\alpha_i = \alpha(n)$, $\forall i$, supondo-se as medidas imperfeitas e obtidas por meio do método descrito na seção 2.5 (ver eq. (28) de [Ulukus 98]). Essencialmente, em [Ulukus 98] provou-se que o valor esperado do erro médio quadrático entre $\mathbf{p}[n]$ e \mathbf{p}^* tende a zero à medida que as iterações prosseguem. No contexto de medidas imperfeitas, a análise da convergência de (2.25) com outros tipos de função $z_i(x)$ é assunto pouco explorado na literatura.

2.7 ASPECTOS RELACIONADOS AO PROJETO DE UM DPCA

O conjunto de equações em (2.25) pode ser interpretado como uma forma unificada de se declarar algoritmos distribuídos de controle de potência (DPCA), no sentido de que inúmeros dos DPCA's encontrados na literatura podem ser reduzidos a tais equações (ver seção 2.8). De fato, o que fundamentalmente diferencia um DPCA de outro é o tipo de função $z_i(\cdot)$ que cada um utiliza.

Do exposto, fica evidente que uma maneira de projetar um novo DPCA consiste em estabelecer uma nova função $z_i(\cdot)$, o que deve ser feito levando em consideração que: o ponto de equilíbrio (idealmente a solução ótima do problema de alocação) precisa ser atingido em um número mínimo de iterações, conforme exigência em (2.35); o erro quadrático médio entre o ponto de equilíbrio e a solução ótima deve ser mínimo, para que as metas de QoS sejam cumpridas; e, finalmente, é necessário que o número de operações para calcular $z_i(\cdot)$ também seja mínimo, para que seu valor seja obtido rapidamente. Aqui, constituem operações a busca de valores em tabelas (quando se define $z_i(\cdot)$ em termos de funções conhecidas) e as próprias operações matemáticas elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Existem outras estratégias importantes, porém menos fundamentais, de desenvolver novos DPCA's - incorporar passos α_i 's que variam com as iterações constitui um exemplo (ver [Ulukus 98]). Evidentemente, pode-se obter novos DPCA's simplesmente empregando outros métodos numéricos para discretizar (2.21).

2.8 EXEMPLOS DE DPCA'S ENCONTRADOS NA LITERATURA

Na síntese do DPCA em [Foschini 93], Foschini *et al* admitiram que as potências transmitidas no canal reverso são controladas de tal modo que a SINR i contínua evolui com uma taxa proporcional à distância do valor desejado:

$$\frac{d\gamma_i(t)}{dt} = -\alpha(\gamma_i(t) - \gamma_i^*), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.39)$$

Em seguida, consideraram a interferência total, denotada por

$$I_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^K g_{ij} p_j(t) + \sigma^2, \quad (2.40)$$

aproximadamente constante e, então, reescreveram (2.39) na seguinte forma:

$$\frac{g_{ii}}{I_i(t)} \frac{dp_i(t)}{dt} = -\alpha(\gamma_i(t) - \gamma_i^*), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.41)$$

Que equivale a:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\alpha \left(1 - \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i(t)} \right) p_i(t), \quad i = 1, \dots, K \quad (2.42)$$

Discretizando (2.42), Foschini *et al* obtiveram:

$$p_i[n+1] = p_i[n] - \alpha \left(1 - \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i[n]} \right) p_i[n], \quad i = 1, \dots, K \quad (2.43)$$

Este conjunto de equações recursivas é o DPCA de Foschini *et al* propriamente dito. Enfatiza-se que substituindo $z_i(x) = x$ e $\alpha_i = \alpha$ na expressão (2.25) obtém-se a (2.43), o que corrobora a idéia de que (2.25) é a forma primária dos algoritmos distribuídos de controle de potência.

Conforme mencionado na seção 2.6, o algoritmo em [Ulukus 98, eq. (28)] também pode ser obtido de (2.25) por meio da substituição $z_i(x) = x$. Portanto, o DPCA em [Foschini 93] e o em [Ulukus 98] são fundamentalmente o mesmo. Entretanto, há muitas contribuições significativas em [Ulukus 98], dentre as quais: a elaboração do método prático para estimar a SINR descrito na seção 2.5; e a demonstração analítica da convergência considerando passo de integração variável e medidas imperfeitas de SINR.

O número de iterações que o DPCA de Foschini *et al* precisa realizar para convergir diminui com α [Foschini 93]. Este parâmetro positivo não pode ser maior do que a unidade, situação em que o algoritmo diverge [Foschini 93]. Portanto, maximiza-se a velocidade de convergência do DPCA de Foschini *et al* fazendo-se $\alpha = 1$.

A equação (2.43) equivale ao seguinte procedimento iterativo matricial:

$$\mathbf{p}[n+1] = ((1-\alpha)\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})\mathbf{p}[n] + \alpha\boldsymbol{\eta} \quad (2.44)$$

Para $\alpha = 1$, (2.44) é o próprio algoritmo de Jacobi, um método iterativo para resolver sistemas lineares bem conhecido e encontrado em textos de álgebra linear numérica (em [Golub 96], por exemplo).

Em [Uykan 04], encontra-se um exemplo de DPCA derivado diretamente de (2.25). Para sua síntese, simplesmente substituiu-se

$$z_i(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right), \quad \alpha_i = \alpha, \quad i = 1, \dots, K, \quad (2.45)$$

em (2.25), ou seja, o DPCA em [Uykan 04], denominado sigmoidal, é dado por:

$$p_i[n+1] = p_i[n] - \alpha \tanh\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i[n]}\right)p_i[n]\right), \quad i = 1, \dots, K, \quad (2.46)$$

Na realidade, em [Uykan 04] há ainda uma constante multiplicativa ajustável no argumento da função $\tanh(\cdot)$.

Desconsiderando erros nas estimativas das SINR's, demonstrou-se analiticamente em [Uykan 04] que (2.46) converge para qualquer α positivo. Entretanto, os resultados numéricos neste mesmo artigo foram obtidos adicionando-se erros nas estimativas.

A idéia descrita na seção 2.4 de que o projeto de um DPCA consiste em desenvolver um sistema dinâmico com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) com ponto de equilíbrio sendo a solução do problema de alocação encontra-se justamente em [Uykan 04].

No capítulo 3, seguindo essa metodologia de projeto encontrada em [Uykan 04], desenvolve-se um novo DPCA. Em termos específicos, propõe-se o emprego de uma função $z_i(\cdot)$, $\forall i$, não-linear proveniente de um modelo de predição populacional.

CAPÍTULO 3

ALGORITMO PROPOSTO

O trabalho de Foschini e Miljanic [Fosch 94] constitui o alicerce de diversos DPCA's difundidos na literatura à medida que o processo de síntese destes orienta-se no sentido de satisfazer a equação diferencial ordinária proposta em [Fosch 94, eq. (1)], ou seja, a diretriz de grande parte das investigações existentes sobre controle de potência distribuído tem sido a de aprimorar estruturas de controle atendo-se ao mesmo modelo dinâmico. Assim, a utilização de outra equação diferencial pode conduzir a algoritmos que sejam promissores sob algum aspecto significativo, como por exemplo, velocidade de convergência, proximidade do valor ótimo e sensibilidade a erros de estimação.

Neste capítulo, estrutura-se um novo DPCA valendo-se do modelo de predição populacional atribuído a P.F. Verhulst [Monteiro 02]. Delimita-se algebricamente um subconjunto da *bacia de atração* do algoritmo assim sintetizado. Adicionalmente, apresentam-se resultados gráficos que confirmam a validade das propriedades analíticas observadas.

3.1 PROCEDIMENTO DE SÍNTESE

O modelo dinâmico sugerido por Verhulst consiste na equação [Monteiro 02]:

$$\dot{p} = p \left(1 - \frac{p}{p_{\text{otimo}}} \right) \quad (3.1)$$

Esta formulação foi proposta por Verhulst na tentativa de se descrever a evolução temporal do número de indivíduos, denotado por $p(t)$, de uma determinada população humana. Seu modelo assume que o alimento disponível e o espaço físico ocupado são finitos. Esta restrição de recursos impede que a população aumente de maneira ilimitada. Tais considerações são levadas em conta no termo que provoca diminuição da taxa de crescimento conforme a população aumenta.

Integrando a eq. (3.1) analiticamente obtém-se:

$$p(t) = \frac{\exp(t) p(0) p_{otimo}}{p_{otimo} + p(0) [\exp(t) - 1]} \quad (3.2)$$

Portanto, o valor assintótico desta solução é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p_{otimo} \quad (3.3)$$

para qualquer condição inicial $p(0)$ estritamente positiva, conforme evidenciado na Fig. 3.1.

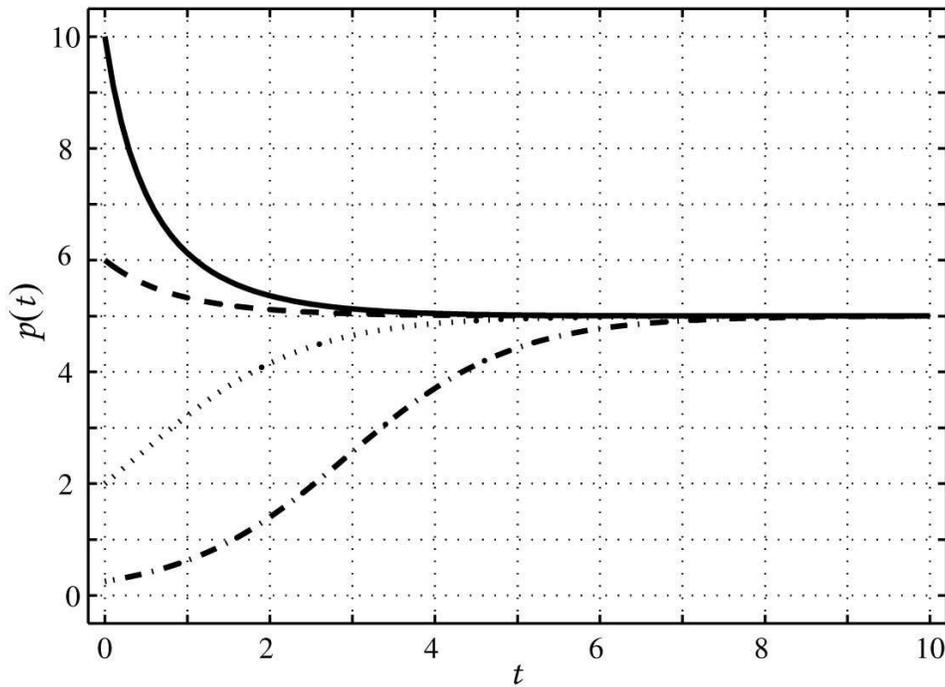


Figura 3.1: Curva $p(t)$ parametrizada por diferentes condições iniciais.

Quando $p(0)$ for maior que p_{otimo} , o sinal de dp/dt será negativo, e $p(t)$ decrescerá de forma que $p(+\infty) = p_{otimo}$. Caso contrário, dp/dt será positivo, e $p(t)$ aumentará em direção ao mesmo valor assintótico.

Supondo que existam várias populações sob análise, é conveniente que se reescreva a eq. (3.1) em um formato matricial:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p} \ominus \mathbf{p}^*), \text{ onde } \mathbf{p} = [p_1 \dots p_K]^T, \mathbf{u} = [1 \dots 1]^T \text{ e } \mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t)|_{t \rightarrow +\infty} \quad (3.4)$$

Os símbolos empregados na eq. (3.4) são utilizados aqui para representarem as operações elementares $[\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}]_{ij} = [\mathcal{A}]_{ij} [\mathcal{B}]_{ij}$ e $[\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}]_{ij} = [\mathcal{A}]_{ij} / [\mathcal{B}]_{ij}$, sendo \mathcal{A} e \mathcal{B} matrizes com dimensões iguais.

Impondo que a evolução do vetor de potências seja regida pelo modelo populacional da eq. (3.4), \mathbf{p} denotará daqui em diante o vetor de potências transmitidas pelas unidades móveis e \mathbf{p}^* a solução ótima do problema de alocação, dada por $(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \boldsymbol{\eta}$.

Admitindo que \mathbf{p} esteja próximo de \mathbf{p}^* , pode-se afirmar que $\mathbf{p}^* \approx \mathbf{H}\mathbf{p} + \boldsymbol{\eta}$. Portanto:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p} \ominus (\mathbf{H}\mathbf{p} + \boldsymbol{\eta})) \quad (3.5)$$

Na Fig. 3.2 apresenta-se o sistema de controle correspondente à eq. (3.5). A estruturação do mesmo segue da definição:

$$\mathbf{z}(-(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p} \ominus (\mathbf{H}\mathbf{p} + \boldsymbol{\eta})) \quad (3.6)$$

A função $\mathbf{y} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}_a = -(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p}_a + \boldsymbol{\eta}$ resulta em $\mathbf{y}_a = \mathbf{p}_a \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p}_a \ominus (\mathbf{H}\mathbf{p}_a + \boldsymbol{\eta}))$. Troca-se \mathbf{H} por \mathbf{H}' e $\boldsymbol{\eta}$ por $\boldsymbol{\eta}'$ e encontra-se \mathbf{p}_b tal que $\mathbf{x}_a = -(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p}_a + \boldsymbol{\eta} = -(\mathbf{I} - \mathbf{H}')\mathbf{p}_b + \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{x}_b$. Sendo \mathbf{x}_b assim definido, obtém-se $\mathbf{y}_b = \mathbf{z}(\mathbf{x}_b) = \mathbf{p}_b \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p}_b \ominus (\mathbf{H}'\mathbf{p}_b + \boldsymbol{\eta}')) \neq \mathbf{y}_a$. Portanto, a perturbação da matriz \mathbf{H} e/ou do vetor $\boldsymbol{\eta}$ modifica o mapeamento $\mathbf{y} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$, o que justifica a seta e o retângulo tracejados presentes na Fig. 3.2. No DPCA de Foschini e Miljanic [Fosch 94] e no sigmoidal [Uykan 04], tal mapeamento não experimenta alteração.

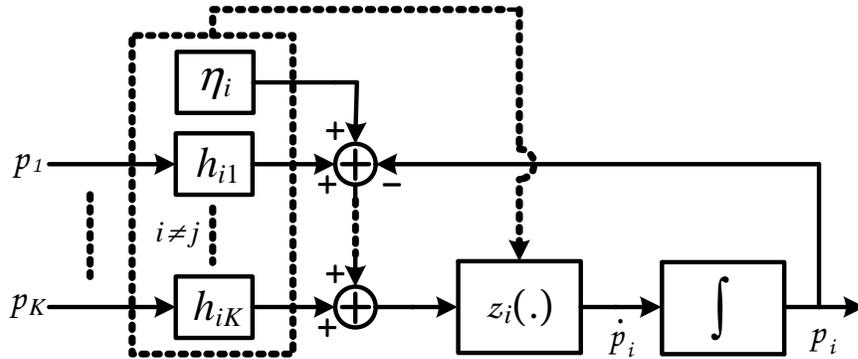


Figura 3.2: Sistema referente ao DPCA proposto.

Discretizando (3.5) pelo Método de Euler para Integração Numérica, obtém-se:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(n)) = \mathbf{p}(n) + \alpha \mathbf{p}(n) \otimes [\mathbf{u} - \mathbf{p}(n) \otimes (\mathbf{H}\mathbf{p}(n) + \boldsymbol{\eta})] \quad (3.7)$$

Portanto, calcula-se o elemento i do vetor $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ por:

$$F_i(\mathbf{p}) = (1 + \alpha)p_i - \alpha \mu_i(\mathbf{p}) \gamma_i^{-t_{gt}} (p_i)^{+2}, \text{ onde } \mu_i(\mathbf{p}) = g_{ii} (\sum_{j \neq i} g_{ij} p_j + \nu_i)^{-1} \quad (3.8)$$

A eq. (3.7) também equivale ao seguinte conjunto de iterações escalares:

$$p_i(n+1) = (1 + \alpha)p_i(n) - \alpha [\gamma_i(n) / \gamma_i^{t_{gt}}] p_i(n), \quad i = 1, \dots, K, \text{ e } \gamma_i(n) = p_i(n) \mu_i(\mathbf{p}(n)) \quad (3.9)$$

Estas iterações constituem a versão implementável do DPCA proposto. Salienta-se que o diagrama de controle da Fig. 3.2 constitui apenas uma forma sistemática de visualizar como ocorre a evolução das potências transmitidas pelas unidades móveis, não correspondendo à estrutura que deve ser efetivamente construída na prática. Observa-se que a implementação direta do esquema da Fig. 3.2 exigiria o conhecimento de $h_{ij, i \neq j}$, η_i e $z_i(\cdot)$ e, portanto, seria um procedimento centralizado. De fato, se $h_{ij, i \neq j}$, η_i e $z_i(\cdot)$ fossem conhecidos exatamente e se a estimação da SINR $\gamma_i(n)$ fosse perfeita em cada iteração n das eqs. (3.9), o sistema de controle da Fig. 3.2 produziria o mesmo resultado que as eqs. (3.9).

Observa-se nas eqs. (3.9) que a atualização da potência transmitida de cada usuário depende apenas de parâmetros referentes ao mesmo, ou seja, da sua própria SINR estimada, do seu nível de potência transmitida na iteração anterior e de sua meta de QoS (*Quality of Service*). Este aparente desacoplamento entre os usuários decorre do fato de se estimar a SINR diretamente e não efetuar seu cálculo pela relação que a define (eq. (2.7)). A obtenção da SINR aplicando-se a eq. (2.7) exigiria processos de estimação para os ganhos de canal dos interferentes e para o ganho do usuário de interesse, tornando a implementação do algoritmo mais complexa.

O fato da atualização de uma determinada potência transmitida depender apenas de parâmetros próprios é típico de algoritmos distribuídos. Entretanto, o DPCA definido pelas iterações nas eqs. (3.9) apresenta uma característica singular: no termo entre colchetes, a SINR estimada está no numerador da divisão. Esta propriedade torna a sensibilidade do algoritmo face a erros de estimação independente do nível verdadeiro da SINR. Sabe-se que funções do tipo $\varphi(\gamma) = \kappa \gamma^{-1}$ (SINR no denominador é inerente aos

algoritmos distribuídos presentes na literatura atual, como o apresentado em [Fosch 94] e [Uykan 04]) possuem diferencial $d\phi = -\kappa\gamma^2 d\gamma$, ou seja, a variação de ϕ para pequenos desvios de γ depende do valor real deste, enquanto, para funções do tipo $\phi(\gamma) = \kappa\gamma$ (SINR no numerador é o caso do DPCA proposto), tem-se $d\phi = \kappa d\gamma$, não havendo influência, portanto, do nível verdadeiro de γ sobre a variação de ϕ . No algoritmo sigmoidal [Uykan 04], observa-se que o resultado da operação na qual γ está no denominador é ainda argumento de uma função do tipo tangente hiperbólica. Evidentemente, esta função hiperbólica influencia, mas não anula, a relação entre valor real de γ e comportamento do algoritmo na presença de medidas imperfeitas de SINR.

3.2 DOMÍNIO ATRATOR DO ALGORITMO PROPOSTO

A região do hiperespaço cujos pontos sejam levados ao ponto ótimo \mathbf{p}^* por sucessivas aplicações de $\mathbf{F}(\cdot)$ denomina-se *domínio atrator* ou *bacia de atração* do mapeamento $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(n))$. Evidentemente, determinar a localização desta região, ou parte dela, evita que se faça uma escolha inadequada de condição inicial $\mathbf{p}(0)$.

Neste tópico, estrutura-se um subconjunto da bacia de atração do algoritmo proposto. Em seguida, confirmam-se graficamente as proposições elaboradas para tal fim.

3.2.1 SÍNTESE DE UM SUBCONJUNTO DO DOMÍNIO ATRATOR

Este subconjunto resulta da concatenação das proposições subseqüentes.

Proposição 1: A solução ótima do problema de alocação \mathbf{p}^* é ponto fixo de $\mathbf{F}(\mathbf{p})$.

Prova: Para o ponto ótimo \mathbf{p}^* tem-se $p_i^* = (\mu_i(\mathbf{p}^*))^{-1} \gamma_i^{tgt}$. Portanto, da eq. (3.8), obtém-se $F_i(\mathbf{p}^*) = (1+\alpha)p_i^* - \alpha \mu_i(\mathbf{p}^*) \gamma_i^{tgt} (p_i^*)^2 = p_i^*$.

Proposição 2: Considere o poliedro $\mathbb{P}_\alpha = \{\mathbf{p}: (\beta\mathbf{I}-\mathbf{H})\mathbf{p} \leq \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p} > \mathbf{0}\}$,

$\beta = (2\alpha)(1+\alpha)^{-1}$. Se $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}''$ e ambos estiverem em \mathbb{P}_α , então $\mathbf{F}(\mathbf{p}') \geq \mathbf{F}(\mathbf{p}'')$.

Prova: Evidentemente, é suficiente demonstrar que $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ cresce monotonicamente em \mathbb{P}_α . Para $i \neq j$ tem-se $\partial \mu_i(\mathbf{p}) / \partial p_j < 0$ e, portanto, o elemento i do vetor $\mathbf{F}(\mathbf{p})$, dado por $F_i(\mathbf{p}) = (1+\alpha)p_i - \alpha \mu_i(\mathbf{p}) \gamma_i^{-tgt} (p_i)^{+2}$, aumenta de forma estrita quando cresce qualquer potência interferente p_j . Na direção p_i , entretanto, a função de várias variáveis $F_i(\mathbf{p})$ consiste numa parábola côncava que passa pela origem e atinge valor máximo no ponto $p_i = (1+\alpha)(2\alpha \mu_i(\mathbf{p}))^{-1} \gamma_i^{tgt}$. Portanto, $F_i(\mathbf{p})$ cresce no domínio definido pela desigualdade $p_i \leq (1+\alpha)(2\alpha \mu_i(\mathbf{p}))^{-1} \gamma_i^{tgt}$. A definição de $\mu_i(\mathbf{p})$ na eq. (3.8) implica que $p_i = (1+\alpha)(2\alpha \mu_i(\mathbf{p}))^{-1} \gamma_i^{tgt}$ representa a equação de um hiperplano. Assim, $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ cresce monotonicamente no poliedro $0 < p_i \leq (1+\alpha)(2\alpha \mu_i(\mathbf{p}))^{-1} \gamma_i^{tgt}$, $i = 1, 2, \dots, K$, o qual equivale à inequação matricial $(\beta \mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p} \leq \boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{p} > 0$, onde $\beta = (2\alpha)(1+\alpha)^{-1}$.

Proposição 3: $\mathbf{p}^* \in \mathbb{P}_\alpha$ para $0 < \alpha \leq 1$.

Prova: O poliedro \mathbb{P}_α contém a solução do problema de alocação $\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \boldsymbol{\eta}$ se $(\beta \mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p}^* \leq \boldsymbol{\eta}$. Assim, basta verificar se $\beta \mathbf{p}^* \leq \boldsymbol{\eta} + \mathbf{H}\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*$. Como $\beta = (2\alpha)(1+\alpha)^{-1}$, tem-se $0 < \beta \leq 1$ para $0 < \alpha \leq 1$ e, portanto, $\beta \mathbf{p}^* \leq \mathbf{p}^*$.

Proposição 4: Se $\mathbf{p}' \in \mathbb{P}_\alpha$ e $0 < \lambda < 1$, então $\lambda \mathbf{p}' \in \mathbb{P}_\alpha$.

Prova: Se $\mathbf{p}' \in \mathbb{P}_\alpha$, então $(\beta \mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{p}' \leq \boldsymbol{\eta}$ e $\mathbf{p}' > 0$. Logo, $(\beta \mathbf{I} - \mathbf{H})\lambda \mathbf{p}' \leq \lambda \boldsymbol{\eta} < \boldsymbol{\eta}$ e $\lambda \mathbf{p}' > 0$.

Proposição 5: Para todo $0 < \lambda < 1$, $\mathbf{F}(\lambda \mathbf{p}) > \lambda \mathbf{F}(\mathbf{p})$. E, para todo $\lambda \geq 1$, $\lambda \mathbf{F}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{F}(\lambda \mathbf{p})$.

Prova: Verifica-se que $F_i(\lambda \mathbf{p}) - \lambda F_i(\mathbf{p}) = [\mu_i(\mathbf{p}) - \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p})] \lambda \alpha \gamma_i^{-tgt} (p_i)^{+2}$. Lembrando que $\mu_i(\mathbf{p}) = g_{ii}(\mathbf{S}_i + v_i)^{-1}$, onde $\mathbf{S}_i = \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j$, obtém-se $\lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}) / \mu_i(\mathbf{p}) = (\mathbf{S}_i + v_i) / (\mathbf{S}_i + \lambda^{-1} v_i)$. Assim, para $0 < \lambda < 1$, $\mu_i(\mathbf{p}) - \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}) > 0$ e, para $\lambda \geq 1$, $\mu_i(\mathbf{p}) - \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}) \leq 0$.

Proposição 6: O poliedro \mathbb{P}_α não contém pontos fixos distintos.

Prova: Por hipótese, admite-se que os vetores estritamente positivos \mathbf{p}' e \mathbf{p}'' sejam pontos fixos distintos contidos em \mathbb{P}_α . Sem perda de generalidade, pode-se assumir que existe pelo menos um i tal que $p_i'' < p_i'$. Então, existe $0 < \lambda < 1$ tal

que $\mathbf{p}'' \geq \lambda \mathbf{p}'$, com igualdade $p_i'' = \lambda p_i'$ para algum i . Das proposições 2, 4 e 5, obtém-se:

$$p_i'' = F_i(\mathbf{p}'') \geq F_i(\lambda \mathbf{p}') > \lambda F_i(\mathbf{p}') = \lambda p_i' \quad (3.10)$$

Como $p_i'' = \lambda p_i'$, tem-se uma contradição e, portanto, a hipótese da existência de pontos fixos distintos em \mathbb{P}_α é falsa.

Proposição 7: Considere $0 < \alpha \leq 1$. Neste caso, se $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha$, então $\mathbf{F}^n(\mathbf{p}) \in \mathbb{P}_\alpha$.

Prova: Usa-se a notação $\mathbf{F}^n(\mathbf{p})$ para representar $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\dots \mathbf{F}(\mathbf{p}))))$, onde n corresponde ao número de vezes que se aplica a função $\mathbf{F}(\cdot)$. Em conseqüência, o algoritmo recursivo $\mathbf{p}(m+1) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(m))$ pode ser escrito como $\mathbf{p}(n) = \mathbf{F}^n(\mathbf{p})$, onde $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$.

Dado que $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha$, para demonstrar que a seqüência $\mathbf{F}^n(\mathbf{p})$ fica confinada no poliedro \mathbb{P}_α , é suficiente mostrar que $\mathbf{F}(\mathbf{p}) \in \mathbb{P}_\alpha$, pois o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ pode ser interpretado como um novo \mathbf{p} .

A definição $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ aliada à eq. (3.8) resulta em:

$$d_i(\mathbf{p}) = F_i(\mathbf{p}) - p_i = \alpha p_i (1 - \mu_i(\mathbf{p}) p_i / \gamma_i^{tgt}) \quad (3.11)$$

De acordo com esta equação, a variação da potência transmitida pelo usuário i será positiva se a meta γ_i^{tgt} for maior que a $\text{SINR}_i = \mu_i(\mathbf{p}) p_i$ e negativa caso contrário. Nota-se que este fato está coerente com o objetivo do algoritmo, que consiste em encontrar o vetor de potências que torna a SINR de cada usuário igual a respectiva meta de QoS.

Para que um determinado vetor \mathbf{p} não seja exterior ao poliedro \mathbb{P}_α , qualquer p_i deve ser no máximo igual a $(1+\alpha)(2\alpha\mu_i(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_i^{tgt}$. Da eq. (3.11), pode-se afirmar que, na região compreendida entre os hiperplanos $p_i = (1+\alpha)(2\alpha\mu_i(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_i^{tgt}$, com $0 < \alpha \leq 1$, e $p_i = (\mu_i(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_i^{tgt}$, a variação $d_i(\mathbf{p})$ possui sinal negativo. Logo, qualquer ponto em tal região se afasta da fronteira $p_i = (1+\alpha)(2\alpha\mu_i(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_i^{tgt}$, tendendo ao interior do poliedro \mathbb{P}_α . Evidentemente, estas observações são válidas para qualquer índice i , ou seja, precede cada fronteira i do poliedro \mathbb{P}_α .

uma região com $d_f(\mathbf{p}) < 0$. Assim, P_α possui uma camada C_α que reveste internamente toda sua extensão limítrofe de tal sorte que todo \mathbf{p} nela localizado tende ao interior do poliedro ao se aplicar $F(\cdot)$, ou seja, $\mathbf{p} \in C_\alpha \Rightarrow F(\mathbf{p}) \in P_\alpha$.

Para garantir o *confinamento* em P_α , deve-se mostrar ainda que não existe possibilidade de algum \mathbf{p} “saltar” diretamente tal camada ao se aplicar $F(\cdot)$. Para tanto, considere M_α o conjunto que resta quando se retira do poliedro P_α essa sua camada externa C_α , ou seja, $P_\alpha = C_\alpha \cup M_\alpha$ e $C_\alpha \cap M_\alpha = \emptyset$. Se todo \mathbf{p} em M_α resultar em $F(\mathbf{p})$ no interior de P_α , então o “salto” mencionado não ocorre.

Quando todo $F(\mathbf{p})$ for inferior à respectiva fronteira $(1+\alpha)[2\alpha\mu_f(\mathbf{F}(\mathbf{p}))]^{-1}\gamma_i^{tgt}$, o vetor $F(\mathbf{p})$ localiza-se em P_α . Assim, necessita-se que:

$$r_i = (1+\alpha)[2\alpha\mu_f(\mathbf{F}(\mathbf{p}))]^{-1}\gamma_i^{tgt} - F(\mathbf{p}) \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, K \quad (3.12)$$

Portanto, observando as definições em (3.8), deve-se ter, para todo i :

$$r_i = \alpha(\xi_f(\mathbf{p}))^{-1}p_i^{+2} - (1+\alpha)p_i + (1+\alpha)(2\alpha)^{-1}\xi_f(\mathbf{F}(\mathbf{p})) \geq 0, \text{ com } \xi_f(\mathbf{p}) = \gamma_i^{tgt}/\mu_f(\mathbf{p}) \quad (3.13)$$

O discriminante $\delta(\alpha)$ desta parábola vale:

$$\delta(\alpha) = (1+\alpha)[(1+\alpha) - 2\xi_f(\mathbf{F}(\mathbf{p}))(\xi_f(\mathbf{p}))^{-1}] \quad (3.14)$$

O vetor $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ não possui elemento negativo para todo ponto \mathbf{p} em M_α . Assim, $F(\mathbf{p}) \geq \mathbf{p}$ e, conseqüentemente, $\mu_f(\mathbf{p}) [\mu_f(\mathbf{F}(\mathbf{p}))]^{-1} \geq 1$. Mostra-se que o lado esquerdo desta desigualdade equivale a $\xi_f(\mathbf{F}(\mathbf{p})) [\xi_f(\mathbf{p}))^{-1}$. Logo, o discriminante dado na eq. (3.14) não atinge valor positivo para $0 < \alpha \leq 1$. Portanto, a condição $r_i \geq 0$ na eq. (3.13) sempre é satisfeita para qualquer i , o que equivale a afirmar que o vetor $F(\mathbf{p})$ não ultrapassa nenhuma fronteira de P_α quando \mathbf{p} estiver em M_α , ou seja, pode-se escrever que $\mathbf{p} \in M_\alpha \Rightarrow F(\mathbf{p}) \in P_\alpha$.

Proposição 8: Dado que $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \lambda < 1$, a seqüência $\mathbf{p}(n) = F^n(\lambda\mathbf{p}^*)$ converge para o ponto ótimo \mathbf{p}^* de forma monotônica.

Prova: As proposições 1 e 3 garantem que \mathbf{p}^* é um ponto fixo localizado em P_α . A desigualdade $\mathbf{p}^* > \lambda\mathbf{p}^*$, aliada às proposições 2, 4 e 5, resulta em:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{F}(\mathbf{p}^*) > \mathbf{F}(\lambda \mathbf{p}^*) > \lambda \mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^* \quad (3.15)$$

O confinamento (proposição 7) na região de monotonicidade \mathbb{P}_α assegura que aplicações sucessivas de $\mathbf{F}(\cdot)$ em cada termo de (3.15) não alteram a ordem das desigualdades, ou seja:

$$\mathbf{p}^* > \mathbf{F}^{n+1}(\lambda \mathbf{p}^*) > \mathbf{F}^n(\lambda \mathbf{p}^*) \quad (3.16)$$

De forma equivalente:

$$\mathbf{p}^* > \mathbf{p}(n+1) > \mathbf{p}(n), \text{ com } \mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \quad (3.17)$$

Portanto, a seqüência $\mathbf{p}(n) = \mathbf{F}^n(\lambda \mathbf{p}^*)$ é estritamente crescente e limitada acima por \mathbf{p}^* . Como há somente este ponto fixo em \mathbb{P}_α , afirma-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\lambda \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \quad (3.18)$$

A unicidade do ponto fixo \mathbf{p}^* em \mathbb{P}_α decorre da proposição 6.

Proposição 9: Considere $0 < \alpha \leq 1$. Para um determinado $\lambda \geq 1$, verifica-se que $\lambda \mathbf{p}^* \in \mathbb{P}_\alpha$ quando $\mathcal{T}(\lambda) = \max_{i=1, \dots, K} (\beta \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}^*) / \mu_i(\mathbf{p}^*)) \leq 1$.

Prova: Da eq. (3.8):

$$\partial F_i(\mathbf{p}) / \partial p_i \big|_{\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}^*} = (1 + \alpha) - 2\alpha \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}^*) / \mu_i(\mathbf{p}^*) \quad (3.19)$$

Se $\partial F_i(\mathbf{p}) / \partial p_i \big|_{\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}^*} < 0$ para pelo menos um i , então $\lambda \mathbf{p}^* \notin \mathbb{P}_\alpha$. Deste fato aliado à eq. (3.19), infere-se que λ deve satisfazer todas as seguintes desigualdades para que o ponto $\lambda \mathbf{p}^*$ localize-se em \mathbb{P}_α :

$$\beta \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}^*) / \mu_i(\mathbf{p}^*) \leq 1, \quad i = 1, \dots, K, \text{ onde } \beta = (2\alpha)(1 + \alpha)^{-1} \quad (3.20)$$

Portanto, multiplicar \mathbf{p}^* por $\lambda \geq 1$ não resulta em ponto exterior ao poliedro \mathbb{P}_α , $0 < \alpha \leq 1$, se λ for tal que:

$$\mathcal{T}(\lambda) = \max_{i=1, \dots, K} (\beta \lambda \mu_i(\lambda \mathbf{p}^*) / \mu_i(\mathbf{p}^*)) \leq 1 \quad (3.21)$$

Proposição 10: Considere $0 < \alpha \leq 1$ e um $\lambda \geq 1$ que satisfaz o critério $\mathcal{T}(\lambda) \leq 1$.

Sob estas condições, a seqüência $\mathbf{p}(n) = \mathbf{F}^n(\lambda \mathbf{p}^*)$ converge monotonicamente para o ponto ótimo \mathbf{p}^* .

Prova: Das proposições 1 e 3 segue que $F(p^*) = p^* \in P_\alpha$. Associando $\lambda p^* \geq p^*$ às proposições 2, 5 e 9, obtém-se:

$$p^* = F(p^*) \leq F(\lambda p^*) \leq \lambda F(p^*) = \lambda p^* \quad (3.22)$$

Pela proposição 7, ocorre confinamento na região de monotonicidade P_α . Portanto, sucessivas aplicações de $F(\cdot)$ em cada termo de (3.22) não alteram a ordem das desigualdades. Assim:

$$p^* \leq F^{n+1}(\lambda p^*) \leq F^n(\lambda p^*) \quad (3.23)$$

De forma equivalente:

$$p^* \leq p(n+1) \leq p(n), \quad p(0) = \lambda p^* \text{ e } \lambda \geq 1 \text{ satisfazendo } \mathcal{T}(\lambda) \leq 1 \quad (3.24)$$

Portanto, a seqüência $p(n) = F^n(\lambda p^*)$ é decrescente e limitada inferiormente por p^* . Pela proposição 6, este ponto fixo é único em P_α . Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\lambda p^*) = p^* \quad (3.25)$$

Proposição 11: Para $0 < \alpha \leq 1$, a seqüência $p(n) = F^n(p)$ converge para a solução ótima p^* para todo $p \in P_\alpha$ não maior do que $\lambda_2 p^*$, onde λ_2 é definido como o máximo $\lambda \geq 1$ que satisfaz $\mathcal{T}(\lambda) \leq 1$.

Prova: Para qualquer p inicial positivo contido em P_α pode ser encontrado um λ_1 positivo e suficientemente menor do que a unidade de forma que $\lambda_1 p^* \leq p$. Portanto, pode-se estabelecer a ordenação:

$$\lambda_1 p^* \leq p \leq \lambda_2 p^* \quad (3.26)$$

As proposições 4 e 9 garantem que estes limites pertencem a P_α . O confinamento (proposição 7) na região de monotonicidade P_α assegura que sucessivas aplicações de $F(\cdot)$ nos termos em (3.26) não alteram a ordem das desigualdades. Logo:

$$F^n(\lambda_1 p^*) \leq F^n(p) \leq F^n(\lambda_2 p^*) \quad (3.27)$$

Das proposições 8 e 10 segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\lambda_1 p^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\lambda_2 p^*) = p^*$.

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p) = p^* \quad (3.28)$$

Assim, mostrou-se que o conjunto $B = P_\alpha \cap \{\mathbf{p} : \mathbf{p} \leq \lambda_2 \mathbf{p}^*\}$, onde $0 < \alpha \leq 1$ e λ_2 o máximo $\lambda \geq 1$ que satisfaz $\mathcal{T}(\lambda) \leq 1$, consiste em um subconjunto da bacia de atração do algoritmo recursivo $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(n))$ definido na eq. (3.7).

3.2.2 ANÁLISE GRÁFICA

Neste item, apresentam-se informações suplementares às proposições anteriores. Essencialmente, valendo-se de gráficos, realizam-se verificações e esclarecimentos das afirmações expostas de forma algébrica em 3.2.1.

A percepção de que o ponto fixo do algoritmo proposto localiza-se, quando se tem $0 < \alpha \leq 1$, na região crescente de $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ decorre, primordialmente, das propriedades gráficas apresentadas na Fig. 3.3 e delineadas a seguir.

A análise do comportamento de $F_i(\mathbf{p}) = (1+\alpha)p_i - \alpha \mu_i(\mathbf{p}) \gamma_i^{-t g_i} (p_i)^{+2}$ na direção p_i pode ser realizada convertendo tal função escalar de várias variáveis em um conjunto de curvas no plano cartesiano. Para tanto, basta interpretar a função multivariável $\mu_i(\mathbf{p})$ como sendo um simples parâmetro μ_i e, então, associar a cada valor deste uma curva $f_i(p_i) = (1+\alpha)p_i - \alpha \mu_i \gamma_i^{-t g_i} (p_i)^{+2}$, conforme indicado na Fig. 3.3.

O lugar geométrico dos máximos destas parábolas côncavas do usuário i localiza-se sobre a reta $0,5(1+\alpha)p_i$. Logo, para $0 < \alpha \leq 1$, todos os máximos estão abaixo da reta que possui 45° de inclinação, independentemente do valor assumido por μ_i . Portanto, o ponto fixo de cada parábola $f_i(p_i)$ do usuário i está necessariamente na respectiva região crescente (ver Fig. 3.3).

A potência ótima p_i^* consiste no ponto fixo da parábola que tem parâmetro $\mu_i = \mu_i(\mathbf{p}^*)$. Do parágrafo anterior, infere-se que tal ponto fixo está na região crescente da correspondente curva $f_i(p_i)$ quando $0 < \alpha \leq 1$. Portanto, pode-se afirmar que:

$$\partial F_i(\mathbf{p}) / \partial p_i \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} \geq 0, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.29)$$

Evidentemente, esta argumentação estende-se para todos os usuários, ou seja, vale para $i = 1, \dots, K$.

Adicionalmente, para qualquer vetor \mathbf{p} , verifica-se de imediato que $\partial F_i(\mathbf{p})/\partial p_j > 0$, sendo $i \neq j$. Este fato, aliado às observações acima, permite declarar que:

$$\partial F_i(\mathbf{p})/\partial p_j \big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} \geq 0, \text{ para quaisquer índices } i \text{ e } j \text{ positivos não maiores que } K \quad (3.30)$$

Esta constatação garante que o ponto fixo \mathbf{p}^* localiza-se no domínio de crescimento da função vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ quando $0 < \alpha \leq 1$, fato este que motivou a estruturação do poliedro \mathbb{P}_α realizada durante a demonstração da proposição 2.

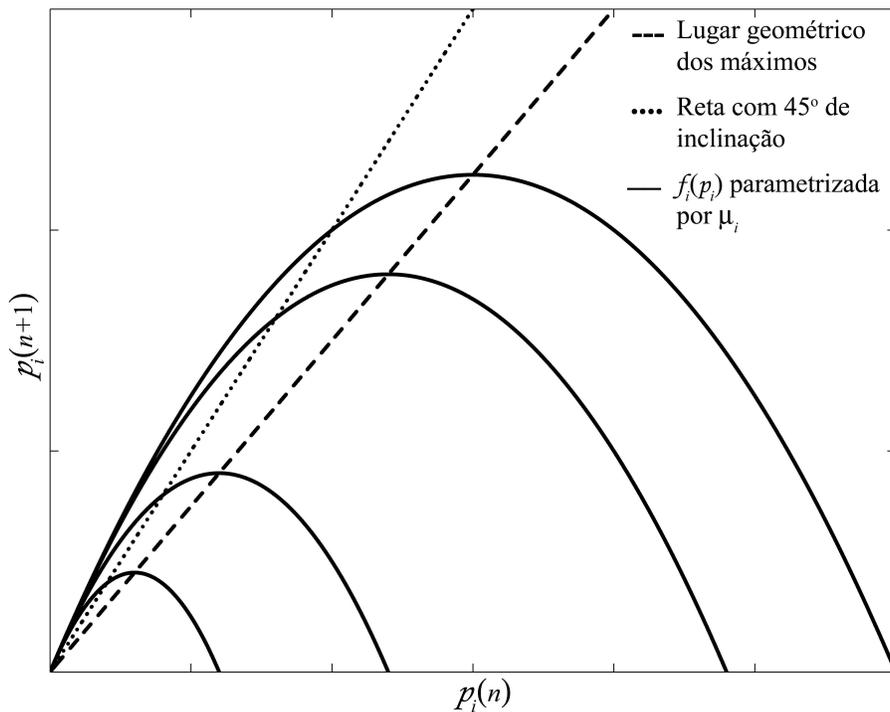


Figura 3.3: Projeção da função $F(\mathbf{p})$ no plano cartesiano.

Adiante, para explanação gráfica das demais proposições, idealiza-se um cenário com apenas dois usuários compartilhando o canal reverso. Este carregamento com mínima quantidade de interferentes visa à simplificação da análise, pois permite que se utilize essencialmente figuras geométricas

bidimensionais. Além do mais, estender as observações a dimensões superiores não incorre em dificuldades extras.

Considere que as atenuações promovidas pelo canal e as correlações cruzadas entre as seqüências de espalhamento resultem na matriz:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,5782 & 0,1000 \\ 0,2833 & 0,8870 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Adicionalmente, para cada usuário i , admita que a potência do AWGN e o índice de QoS sejam dados por $\nu_i = 0,1$ e $10\log_{10}(\gamma_i^{tgt}) = 6$ dB, respectivamente. Neste contexto, originalmente definido em [Uykan 04], realizam-se os testes subseqüentes do algoritmo proposto. Salieta-se que, neste capítulo, resultando em um sistema *viável*, o cenário em particular não constitui fator relevante, pois visa-se apenas à confirmação gráfica das propriedades analíticas gerais descritas em 3.2.1.

Nas condições do parágrafo anterior, calcula-se $\mu_1(\mathbf{p})$ e $\mu_2(\mathbf{p})$, valendo-se da definição dada na eq. (3.8). Em seguida, obtém-se as fronteiras $\mathcal{L}_1(\mathbf{p}) = (1+\alpha)(2\alpha\mu_1(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_1^{tgt}$ e $\mathcal{L}_2(\mathbf{p}) = (1+\alpha)(2\alpha\mu_2(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_2^{tgt}$. Realizados estes procedimentos, consegue-se delinear o poliedro \mathbb{P}_α fazendo-se a intersecção, no primeiro quadrante, da região que satisfaz $p_1 \leq \mathcal{L}_1(\mathbf{p})$ com a que obedece $p_2 \leq \mathcal{L}_2(\mathbf{p})$, conforme apresentado na Fig. 3.4.

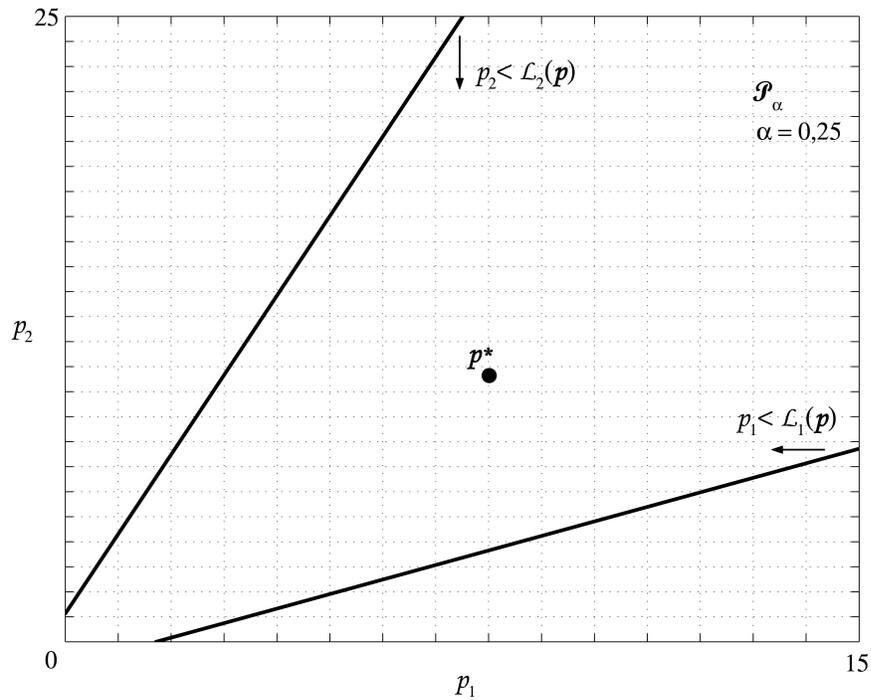


Figura 3.4: Processo de estruturação do poliedro \mathcal{P}_α , considerando $\alpha = 0,25$.

Note que $p_1 = \mathcal{L}_1(\mathbf{p})$ e $p_2 = \mathcal{L}_2(\mathbf{p})$ são simplesmente retas porque o canal reverso está sendo compartilhado por apenas dois usuários. Genericamente, essas igualdades são hiperplanos, conforme afirmado durante a demonstração da proposição 2.

Para o cenário especificado na página anterior, o cômputo de $(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-1}\boldsymbol{\eta}$ resulta na solução ótima $\mathbf{p}^* = [8,01 \ 10,63]^\top$. Por inspeção da Fig. 3.4, confirma-se que este ponto pertence a \mathcal{P}_α , fato que concorda com a proposição 3. Para tornar completa a validação desta proposição, deve-se variar o parâmetro α no intervalo $]0;1]$ e verificar se o ponto ótimo localiza-se no interior de cada \mathcal{P}_α (ver Fig. 3.5).

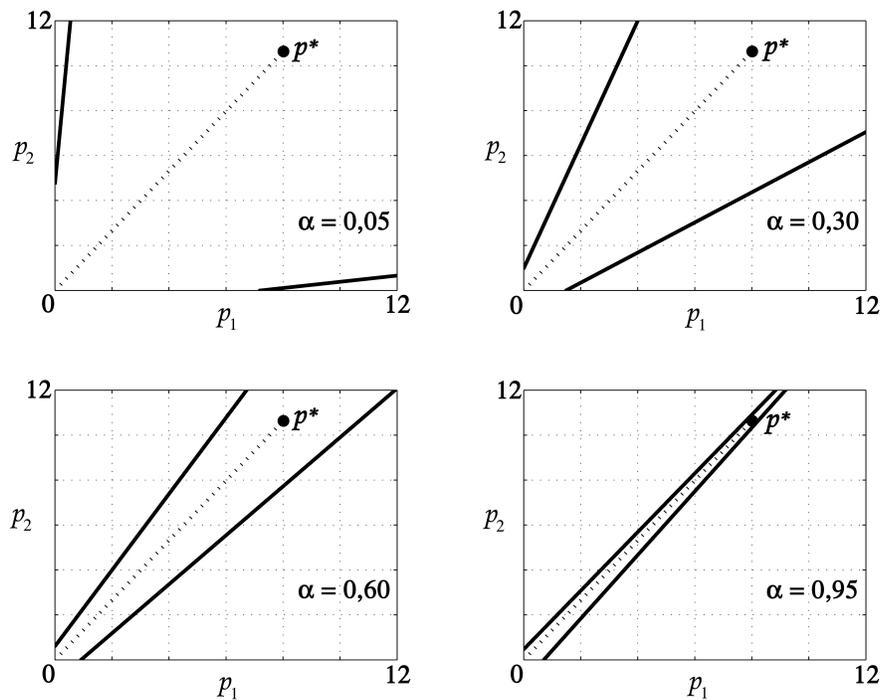


Figura 3.5: Efeito da variação do parâmetro α sobre a forma do poliedro \mathbb{P}_α .

Observa-se nestes gráficos que, apesar do aumento de α aproximar as fronteiras do poliedro, este continua contendo o ponto ótimo p^* .

O estreitamento de \mathbb{P}_α torna maior a possibilidade de se fazer uma seleção não apropriada de condição inicial $p(0)$. Na prática, entretanto, α constitui um parâmetro controlável e, de acordo com os próprios gráficos da Fig. 3.5, aproximando-o de zero o suficiente, pode-se fazer com que as fronteiras englobem o vetor de inicialização. Por outro lado, diminuir α implica velocidade de convergência menor, pois o mesmo define o passo da integração numérica realizada pelo algoritmo proposto. Portanto, a penalidade por utilizar α para locar $p(0)$ no poliedro \mathbb{P}_α consiste na baixa velocidade de convergência resultante. A utilização de um passo α variável constitui uma estratégia para contornar este problema. Neste caso, deve-se incrementar o passo, de um valor suficientemente próximo de zero até a unidade, à medida que ocorrem as iterações do algoritmo.

As semi-retas pontilhadas presentes na Fig. 3.5 sugerem que todo vetor estritamente positivo e com a mesma direção da solução ótima, mas com menor norma, localiza-se no interior de P_α para todo $\alpha \in]0; 1]$, o que está de acordo com a proposição 4. Em conseqüência, um vetor com todos os elementos positivos e próximos de zero pertence ao poliedro P_α para qualquer α em tal faixa. Portanto, utilizando-se este vetor específico para inicializar o algoritmo proposto, tem-se mais liberdade para fixar o tamanho do passo α , pois não ocorre o conflito exposto no parágrafo anterior.

Com o intuito de validar graficamente a proposição 5, define-se:

$$E_\lambda(\lambda, \mathbf{p}) = \text{sinal}\{F_\lambda(\lambda, \mathbf{p}) - \lambda F_\lambda(\mathbf{p})\}, \text{ onde } \text{sinal}\{x\} = x/\max\{-x, x\} \quad (3.32)$$

Considera-se que o sinal de $E_\lambda(\lambda, \mathbf{p})$ determina se a região infinitesimal em torno da coordenada (λ, \mathbf{p}) da superfície arbitrária $\Omega(\lambda, \mathbf{p}) = 0$ deve ou não receber a cor cinza. Em outros termos, para todo (λ, \mathbf{p}) condicionado a $\Omega(\lambda, \mathbf{p}) = 0$:

$$E_\lambda(\lambda, \mathbf{p}) = +1 \Rightarrow (\lambda, \mathbf{p}) \text{ em cinza; } E_\lambda(\lambda, \mathbf{p}) = -1 \Rightarrow (\lambda, \mathbf{p}) \text{ em branco} \quad (3.33)$$

Desta forma, impondo-se que a superfície $\Omega(\lambda, \mathbf{p}) = 0$ seja elipsoidal, lembrando-se da configuração do cenário e usando-se $\alpha = 0,25$, consegue-se a matiz da Fig. 3.6.

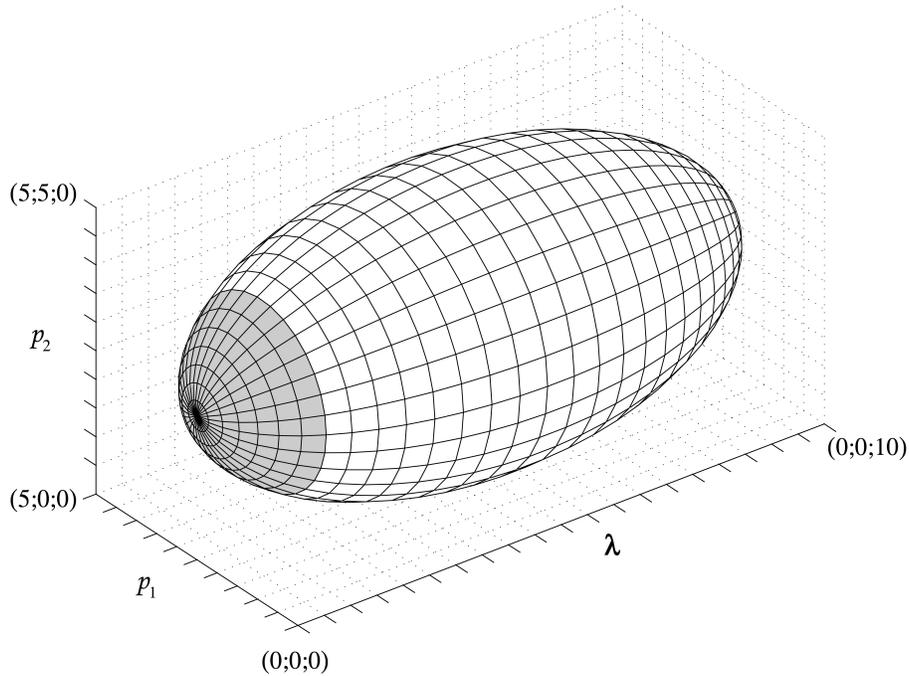


Figura 3.6: Matização de uma superfície elipsoidal segundo $E(\lambda, \mathbf{p})$.

O usuário não foi especificado na Fig. 3.6 porque se obteve a mesma ilustração ao se alterar $i = 1$ para $i = 2$. Nesta figura, nota-se claramente que a “calota” cinza ocorre para $0 < \lambda < 1$. Este fato, aliado às definições (3.32) e (3.33), concorda com a proposição 5, onde se afirma que $F_i(\lambda \mathbf{p}) > \lambda F_i(\mathbf{p})$ se $0 < \lambda < 1$ e $\lambda F_i(\mathbf{p}) \geq F_i(\lambda \mathbf{p})$ se $\lambda \geq 1$. Superfícies elipsoidais com diferentes tamanhos fornecem resultado idêntico, no sentido de que sempre se observa uma “calota” cinza na faixa $0 < \lambda < 1$, o que corrobora a proposição 5 de forma ampla.

Adiante, sintetiza-se uma justificativa geométrica para a proposição 7. Basicamente, analisa-se a relação entre a orientação do deslocamento vetorial $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ e a posição do ponto \mathbf{p} no interior do poliedro P_α .

Inicialmente, deve ser sublinhado que se atinge a meta de QoS do usuário i quando o vetor \mathbf{p} obedecer a equação:

$$p_i = \mathcal{V}_i(\mathbf{p}) = \gamma_i^{tgt} / \mu_i(\mathbf{p}) \quad (3.34)$$

Os K hiperplanos deste tipo se encontram na solução ótima \mathbf{p}^* e seccionam \mathbb{P}_α de tal forma que se identificam 2^K regiões distintas quanto à orientação do vetor $\mathbf{d}(\mathbf{p})$. No cenário simplificado que se utiliza neste capítulo, há apenas dois usuários ocupando ativamente o canal reverso e, portanto, existem $2^K = 4$ dessas regiões, as quais estão denotadas na Fig. 3.7 por A, B, C e D. Percebe-se, nesta figura, que:

$$A = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: p_1 < \gamma_1(\mathbf{p}) \text{ e } p_2 < \gamma_2(\mathbf{p})\}, \quad B = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: p_1 > \gamma_1(\mathbf{p}) \text{ e } p_2 < \gamma_2(\mathbf{p})\}, \quad (3.35)$$

$$C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: p_1 > \gamma_1(\mathbf{p}) \text{ e } p_2 > \gamma_2(\mathbf{p})\} \text{ e } D = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: p_1 < \gamma_1(\mathbf{p}) \text{ e } p_2 > \gamma_2(\mathbf{p})\}.$$

De acordo com (3.11) e (3.34), o i -ésimo elemento do vetor $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ vale:

$$d_i(\mathbf{p}) = \alpha_{p_i} (1 - p_i / \gamma_i(\mathbf{p})) \quad (3.36)$$

Deste modo:

$$p_i < \gamma_i(\mathbf{p}) \Rightarrow \text{sinal}\{d_i(\mathbf{p})\} = +1 \text{ e } p_i > \gamma_i(\mathbf{p}) \Rightarrow \text{sinal}\{d_i(\mathbf{p})\} = -1 \quad (3.37)$$

Portanto, (3.35) equivale a:

$$A = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: \text{sinal}\{\mathbf{d}(\mathbf{p})\} = [+1 \ +1]^T\}, \quad B = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: \text{sinal}\{\mathbf{d}(\mathbf{p})\} = [-1 \ +1]^T\}, \quad (3.38)$$

$$C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: \text{sinal}\{\mathbf{d}(\mathbf{p})\} = [-1 \ -1]^T\} \text{ e } D = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_\alpha: \text{sinal}\{\mathbf{d}(\mathbf{p})\} = [+1 \ -1]^T\}.$$

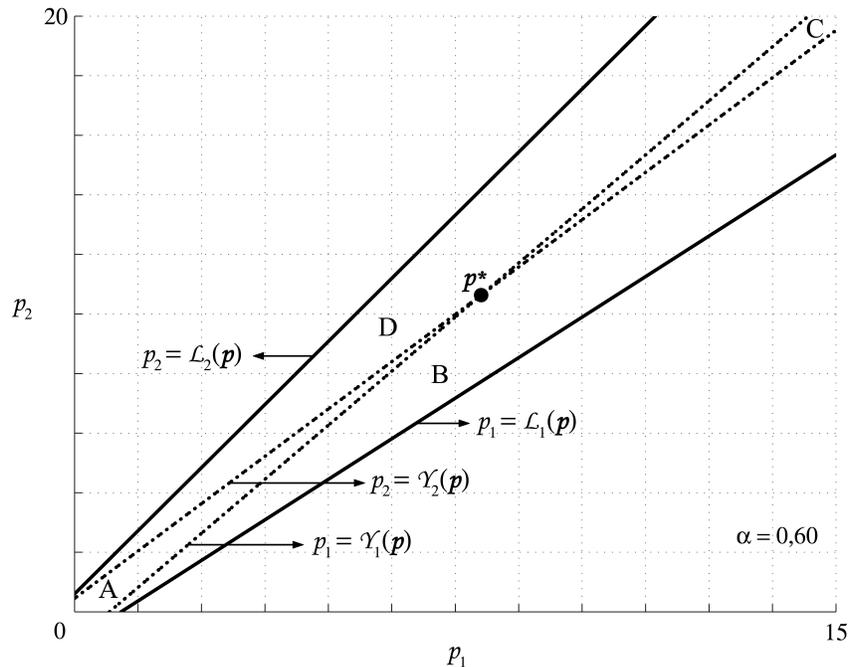


Figura 3.7: Seccionamento de \mathbb{P}_α utilizando-se $p_i = \gamma_i(\mathbf{p})$, $i = 1, 2$.

As definições em (3.38) implicam que a região onde se localiza p determina o quadrante do deslocamento $\mathbf{d}(p)$. Explicita-se esta correspondência na Fig. 3.8.

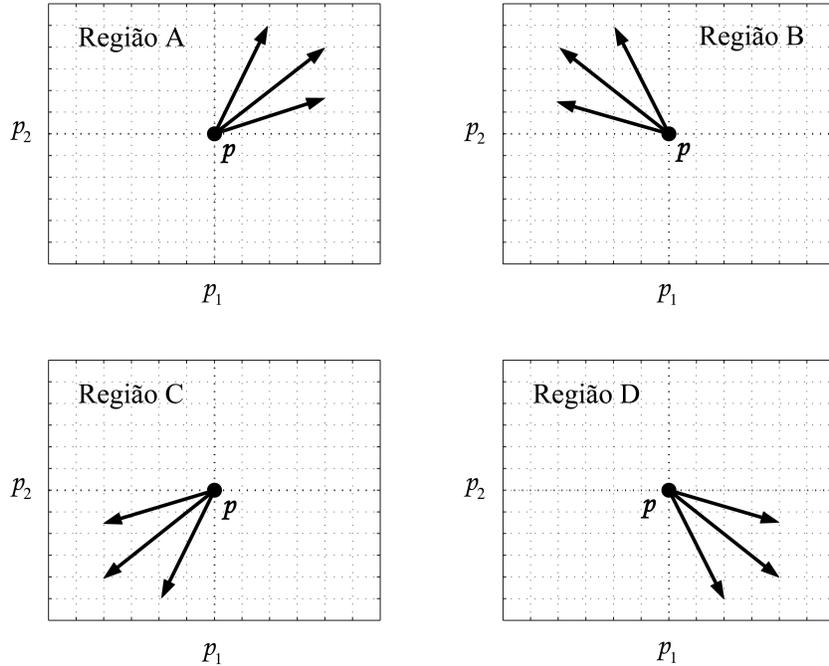


Figura 3.8: Orientação do vetor $\mathbf{d}(p) = \mathbf{F}(p) - p$ conforme a região de P_α .

Associando a localização de cada região no interior do poliedro (ver Fig. 3.7) com a respectiva orientação do deslocamento $\mathbf{d}(p)$ (ver Fig. 3.8), infere-se que qualquer ponto em P_α tende a permanecer neste ao ser deslocado por $\mathbf{F}(\cdot)$. Esta propriedade constitui a essência da proposição 7.

Na Fig. 3.9 destaca-se de vermelho um processo de convergência iniciado em D. Percebe-se nitidamente que, durante a permanência nesta região, o deslocamento vetorial $\mathbf{d}(p)$ limita-se ao quarto quadrante. Entretanto, ao se entrar na região C, sua orientação restringe-se ao terceiro. Analogamente, no processo em azul, enquanto em B, observa-se $\mathbf{d}(p)$ no segundo quadrante, passando para o primeiro ao se atingir a região A. Essas constatações estão coerentes com as asserções expostas na Fig. 3.8.

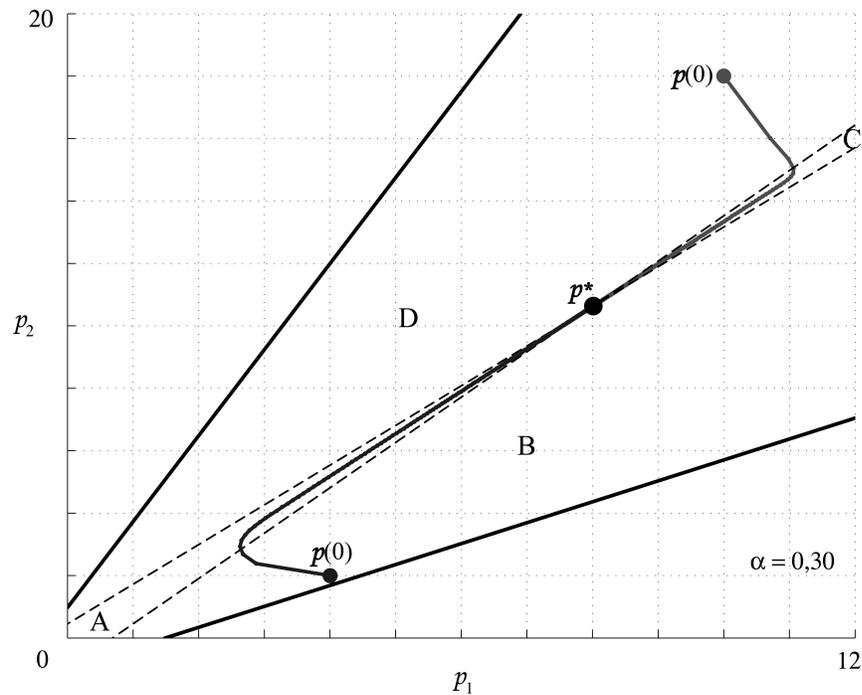


Figura 3.9: Processos de convergência obtidos por simulações.

As descrições em (3.38) sugerem que se designem as regiões A, B, C e D pelas palavras 11, -11 , $-1-1$ e $1-1$, respectivamente. Esta notação, além de ser mais simples e compacta, permite que se imagine cada região como um estado transitório de um circuito seqüencial. Neste contexto, especificar um processo de convergência consiste em determinar qual seqüência de estados ocorre até se atingir a solução ótima. Ao todo, distinguem-se 3^K estados possíveis quando há K usuários ativos.

Considere uma circunferência infinitesimal envolvendo p^* (imagine isto na Fig. 3.9). Percorrendo-a no sentido anti-horário, identificam-se os seguintes estados: 11 (A), 01 (fronteira entre A e B), -11 (B), -10 (fronteira entre B e C), $-1-1$ (C), $0-1$ (fronteira entre C e D), $1-1$ (D) e 10 (fronteira entre D e A). A solução ótima p^* corresponde ao estado 00 e completa a lista de estados possíveis para $K=2$.

Os processos mostrados em vermelho e azul na Fig. 3.9 equivalem, respectivamente, às seqüências $D=1-1 \rightarrow C=-1-1 \rightarrow \mathbf{p}^*=00$ e $B=-11 \rightarrow A=11 \rightarrow \mathbf{p}^*=00$.

Destaca-se que as regiões $A=11$ e $C=-1-1$ funcionam como “sorvedouros” dos processos de convergência, ou seja, todo procedimento iterativo iniciado no poliedro P_α acaba “capturado” em algum momento por uma dessas duas regiões (ver Fig. 3.9). No hiperespaço, os estados $111\dots 1$ e $-1-1-1\dots -1$ constituem os “sorvedouros” das iterações.

Estando em $111\dots 1$, o vetor de potências aumenta de forma monotônica em direção à solução ótima, denotada pelo estado $000\dots 0$. Na região $-1-1-1\dots -1$, as potências diminuem monotonicamente de maneira que também se aproximam dos respectivos valores ótimos. Observe os resultados apresentados na Fig. 3.9.

Aliando os dois parágrafos anteriores, afirma-se que o algoritmo proposto realiza a convergência em duas etapas: 1) penetra no estado $111\dots 1$ ou $-1-1-1\dots -1$, tornando (ou mantendo) as potências todas menores ou todas maiores que os limiares necessários às devidas metas de QoS; 2) aproxima todas as potências das respectivas quantidades ótimas de forma monotônica. Portanto, pode-se dizer que o algoritmo tende a não privilegiar qualquer parcela de usuários.

Sublinha-se que o conjunto M_α , definido durante a demonstração da proposição 7, corresponde à região denotada por $111\dots 1$. Já a camada \mathbf{C}_α , também caracterizada ao se provar a proposição 7, equivale à união das demais regiões que compõem o poliedro P_α . Ressalta-se que a barreira \mathbf{C}_α torna-se acentuadamente delgada ao se aproximar α da unidade, pois $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{L}_i(\mathbf{p}) = \gamma_i(\mathbf{p})$. Lembre-se que $\gamma_i(\mathbf{p}) = \gamma_i^{tgt} / \mu_i(\mathbf{p})$ e $\mathcal{L}_i(\mathbf{p}) = (1+\alpha)(2\alpha\mu_i(\mathbf{p}))^{-1}\gamma_i^{tgt}$.

Na Fig. 3.10, visualiza-se a evolução das potências transmitidas para diferentes condições iniciais. Cada procedimento recursivo apresentado nessa figura principia com um vetor de mesma orientação e menor norma que a solução ótima. Constata-se que as curvas aproximam-se das respectivas assíntotas de

maneira crescente e monotônica, o que comprova a proposição 8 para o cenário particular deste capítulo. Observa-se que a taxa de convergência para a condição de equilíbrio experimenta forte influência do parâmetro α . Nota-se relação direta: aumento de α acentua a taxa.

Na eq. (3.8), verifica-se por substituição que $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Assim sendo, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, vetor não pertencente ao poliedro \mathcal{P}_α , define um ponto fixo do método iterativo em questão. Entretanto, pela proposição 8, a seqüência com termo geral $\mathbf{F}^n(\lambda \mathbf{p}^*)$ converge para \mathbf{p}^* quando λ for ligeiramente superior a zero. Desta forma, a origem constitui ponto de equilíbrio instável. As curvas em azul na Fig. 3.10 refletem esta propriedade.

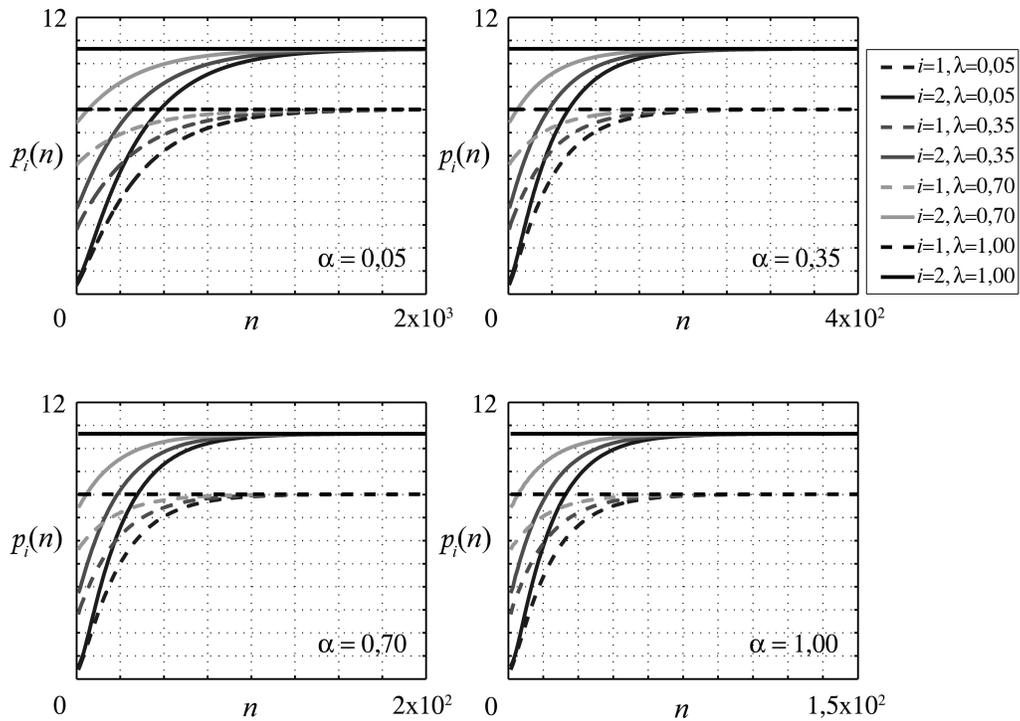


Figura 3.10: Comportamento típico de $\mathbf{p}(n) = [p_1(n) \ p_2(n)]^T$ para $\mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \leq \mathbf{p}^*$.

Na síntese da Fig. 3.11, modificou-se o QoS do segundo usuário para 2 dB, porém manteve-se as demais características do cenário. Essa alteração facilita

a percepção visual do vínculo entre a curva $\mathcal{T}(\lambda)$, definida na proposição 9, e a posição de $\lambda_{\mathcal{P}^*}$ em relação ao poliedro \mathcal{P}_α .

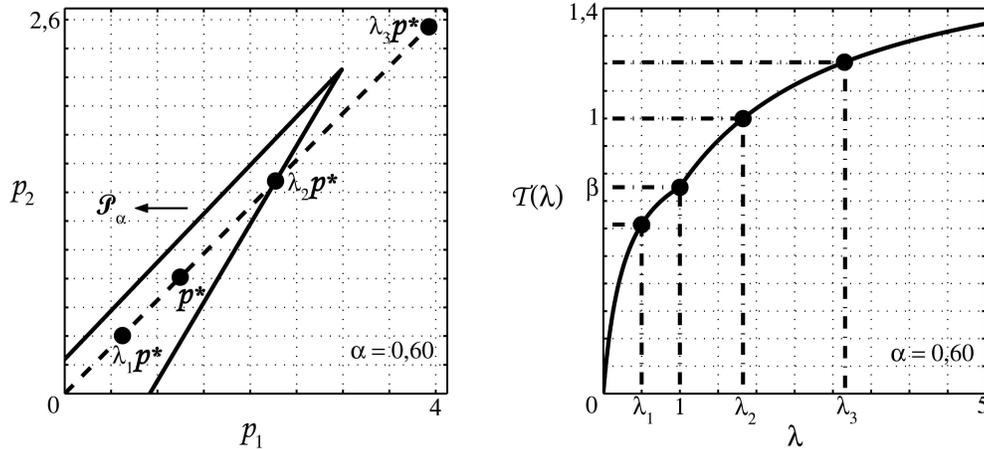


Figura 3.11: Correspondência entre $\mathcal{T}(\lambda)$ e a posição de $\lambda_{\mathcal{P}^*}$ relativa ao poliedro \mathcal{P}_α .

Na Fig 3.11, constata-se que a função $\mathcal{T}(\lambda)$ cresce de forma monotônica à medida que λ aumenta. De acordo com essa figura, no momento que este satisfaz a igualdade $\mathcal{T}(\lambda) = 1$, o ponto $\lambda_{\mathcal{P}^*}$ correspondente atinge a fronteira de \mathcal{P}_α . Também se nota que $\mathcal{T}(\lambda) < 1$ e $\mathcal{T}(\lambda) > 1$ implicam, respectivamente, $\lambda_{\mathcal{P}^*}$ interno e externo ao poliedro. Estas observações estão coerentes com a proposição 9.

Em consequência do exposto acima, a equação $\mathcal{T}(\lambda) = 1$ constitui um limiar para “detectar” o λ crítico, sendo este definido como o maior fator multiplicativo λ que não torna $\lambda_{\mathcal{P}^*}$ externo ao poliedro. Ressalta-se que diferentes cenários resultam, freqüentemente, em distintos fatores críticos. Entretanto, o limiar para identificá-los permanece sendo $\mathcal{T}(\lambda) = 1$.

Analisando a Fig. 3.11, conclui-se que $\mathcal{T}(\beta) \leq 1$ para o cenário em questão. Também se verifica que $\mathcal{T}(\beta^{-1}) \leq 1$, aliando $\mathcal{T}(\lambda)$ à definição de $\mu(\mathcal{P})$ em (3.8). Na verdade, essas inequações são identidades, no sentido de que não são intrínsecas ao cenário. Nestas argumentações, está implícito que $0 < \alpha \leq 1$.

Retornando o QoS do usuário 2 para seu valor antigo (6 dB), sintetizou-se a Fig. 3.12. Nesta figura, percebe-se que a função teste $\mathcal{T}(\lambda)$ sofre acentuada influência do parâmetro α . Nota-se que valores deste suficientemente próximos de zero fazem com que as respectivas funções teste estejam sempre abaixo do limiar. Esta característica associada às explicações na página anterior permite afirmar que o poliedro \mathbb{P}_α tende a englobar a linha λ_{p^*} inteira conforme α decresce. Essa tendência está subentendida na Fig. 3.5.

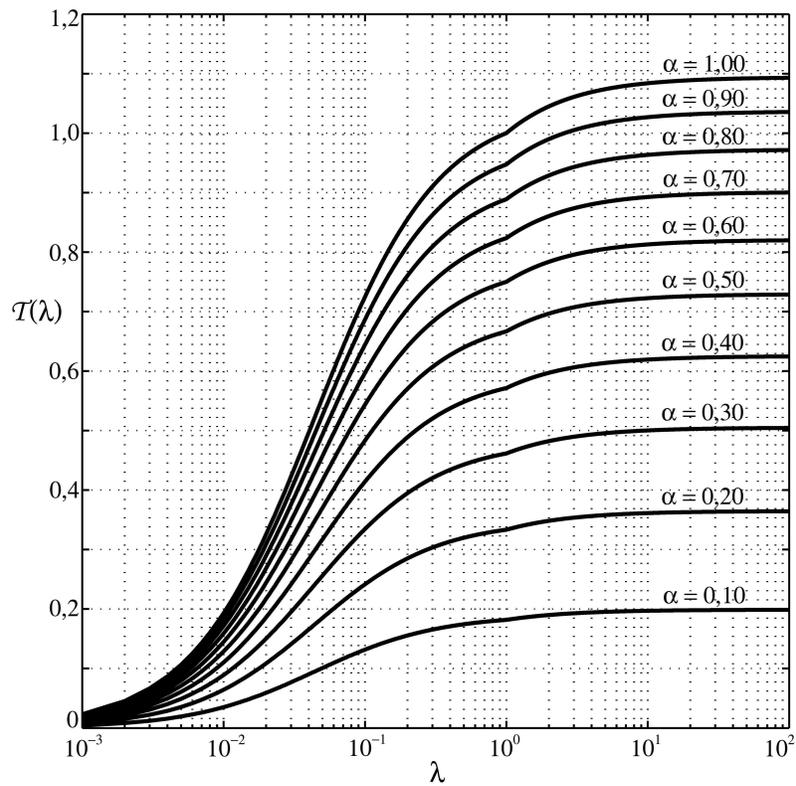


Figura 3.12: Efeito da perturbação de α sobre a função teste $\mathcal{T}(\lambda)$.

Na Fig. 3.12, constata-se que um α próximo o bastante da unidade faz com que a função teste correspondente intercepte o limiar $\mathcal{T}(\lambda) = 1$, o que implica o surgimento de um λ crítico, cuja existência significa que \mathbb{P}_α não contém a linha λ_{p^*} completa. Note a consistência com a Fig. 3.5, onde se observa o fechamento de \mathbb{P}_α à medida que α incrementa em direção à unidade. Ainda na

Fig. 3.12, verifica-se que $\tau(\lambda) \leq 1$ quando $0 < \lambda \leq 1$ e $0 < \alpha \leq 1$, fato este coerente com a proposição 4.

Na Fig. 3.13, para um dado α , todo processo iterativo, cada qual identificado por uma cor, inicia com um vetor proporcional à solução ótima, mas com maior norma, e locado no interior do poliedro \mathbb{P}_α . Nessa figura, observa-se as curvas referentes a cada processo recursivo alcançando as respectivas assíntotas de forma decrescente e monotônica, o que corrobora a proposição 10 para o cenário adotado neste capítulo. Ressalta-se que, para garantir $\mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \in \mathbb{P}_\alpha$, cada α usado na síntese da Fig. 3.13 corresponde a uma curva $\tau(\lambda)$ na Fig. 3.12 menor que a unidade na faixa $0 < \lambda \leq 2,5$.

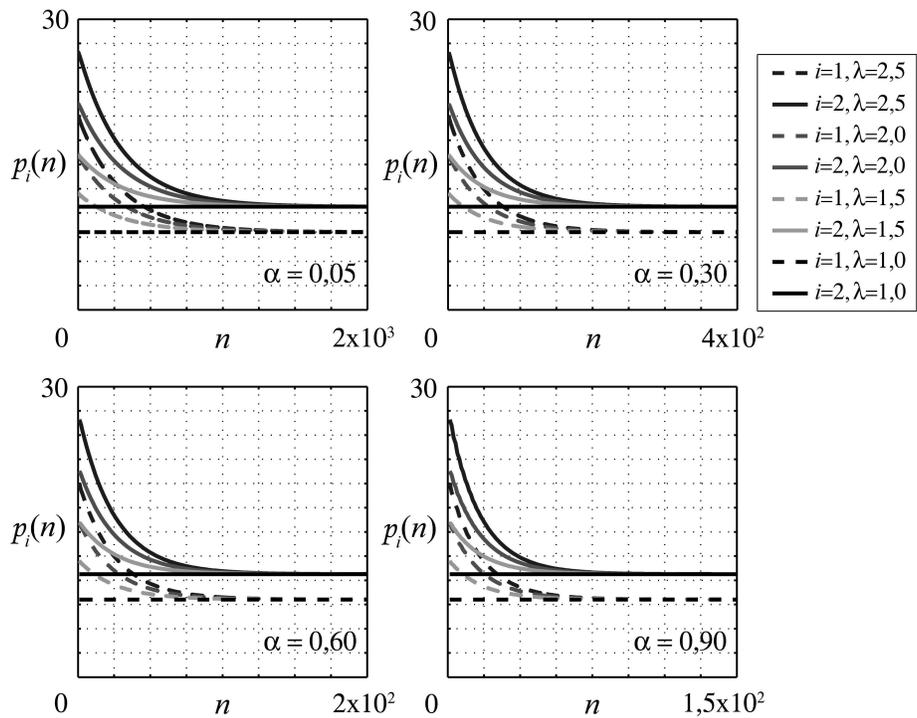


Figura 3.13: Comportamento típico de $\mathbf{p}(n) = [p_1(n) \ p_2(n)]^T$ para $\mathbf{p}(0) = \lambda \mathbf{p}^* \geq \mathbf{p}^*$.

Na Fig. 3.13, a velocidade com que ocorre a estabilização das iterações aumenta acentuadamente conforme o passo α cresce em direção à unidade. Além disso, para um dado α , constata-se que todos os processos iterativos tornam-se visualmente indistinguíveis das assíntotas aproximadamente no

mesmo instante. Na Fig. 3.10, identifica-se esta mesma propriedade. Desta forma, o intervalo de tempo necessário para se atingir o estado estacionário não sofre expressiva influência da condição inicial, pelo menos quando esta é proporcional ao vetor ótimo.

Na Fig. 3.14, retrata-se a evolução de uma coleção de pontos que ocorre conforme se aplica $\mathbf{F}(\cdot)$ a cada um destes. Parte-se dum volume J de vetores iniciais distribuídos uniformemente no interior de \mathcal{P}_α ($\alpha = 0,6$).

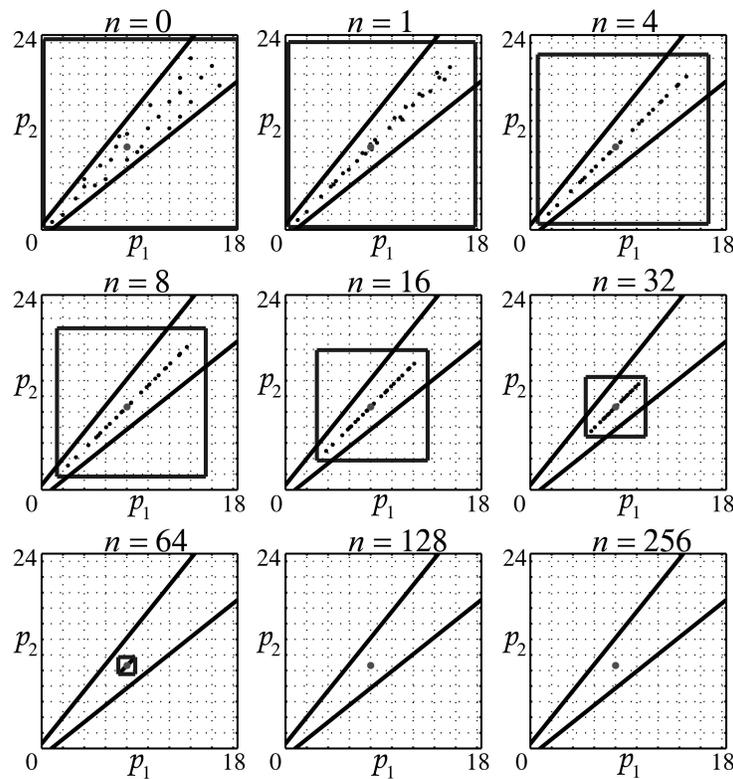


Figura 3.14: Configuração dos pontos conforme o número de iterações.

Considere o problema de determinar uma “hipercaixa” (retângulo quando $K=2$ usuários) que contenha todas as condições iniciais e que, além do mais, possua dois de seus vértices proporcionais ao ponto ótimo e localdos no poliedro \mathcal{P}_α . Resolve-se esta questão encontrando-se λ_1 e λ_2 de forma que, para $j=1, 2, \dots, J$:

$$\lambda_1 \mathbf{p}^* \leq \mathbf{p}^j(0) \leq \lambda_2 \mathbf{p}^*, \text{ onde } \mathbf{p}^j(0) = [p_1^j(0) \cdots p_i^j(0) \cdots p_k^j(0)]^T \text{ é o vetor inicial } j \quad (3.39)$$

Para tanto, calcula-se primeiramente:

$$\lambda(i, j) = p_i^j(0)/p_i^*, \text{ em todos os } K \times J \text{ pares } (i, j) \quad (3.40)$$

Em seguida, dentre os valores obtidos, separa-se o ínfimo e o supremo:

$$\lambda_{\text{inf}} = \inf\{\lambda(i, j)\} \text{ e } \lambda_{\text{sup}} = \sup\{\lambda(i, j)\} \quad (3.41)$$

Finalmente, seleciona-se $\lambda_1 \leq \lambda_{\text{inf}}$ e $\lambda_2 \geq \lambda_{\text{sup}}$. Adicionalmente, a constante λ_2 deve ser tal que $\mathcal{T}(\lambda_2) \leq 1$, pois deseja-se que $\lambda_1 \mathbf{p}^*$ e $\lambda_2 \mathbf{p}^*$ estejam em \mathbb{P}_α .

Sabe-se que os resultados numéricos na Fig. 3.14 referem-se a um cenário com apenas $K=2$ usuários. Neste caso bidimensional, a “hipercaixa” estruturada de acordo com os passos anteriores reduz-se ao retângulo azul visualizado nessa figura em $n=0$. Os retângulos apresentados na Fig. 3.14 variam com n , pois são definidos pelos vértices $\mathbf{F}^n(\lambda_1 \mathbf{p}^*)$ e $\mathbf{F}^n(\lambda_2 \mathbf{p}^*)$.

Na Fig. 3.14, todos os pontos permanecem no interior do retângulo à medida que as iterações prosseguem. Desta forma, para todo n :

$$\mathbf{F}^n(\lambda_1 \mathbf{p}^*) \leq \mathbf{F}^n(\mathbf{p}^j(0)) \leq \mathbf{F}^n(\lambda_2 \mathbf{p}^*), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.42)$$

Observa-se na Fig. 3.14 que as dimensões do retângulo experimentam contração com o aumento de n . Sua superfície, contendo os J pontos, tende a se degenerar em torno da solução ótima, esta destacada em vermelho. Na escala dessa figura, para $n=128$ iterações, não há possibilidade de distinguir visualmente o ponto ótimo do retângulo. Ocorre estabilização, pois em $n=256$ também não se consegue fazer tal distinção. Assim, infere-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\lambda_1 \mathbf{p}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\lambda_2 \mathbf{p}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}^n(\mathbf{p}^j(0)) = \mathbf{p}^*, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.43)$$

Os resultados (3.42) e (3.43), obtidos numericamente, equivalem, respectivamente, às afirmações (3.27) e (3.28), as quais constituem a essência da proposição 11.

Destaca-se que os J pontos, após poucas iterações, alinham-se e cada qual passa a localizar-se ou na região 111...1 ou na $-1-1-1...-1$ do poliedro \mathbb{P}_α (lembre-se do “fenômeno sorvedouro”). Percebe-se que os pontos organizam-se de tal modo que originam uma configuração espacial no interior do retângulo que, a menos de um fator de escala, repete-se indefinidamente com o

incremento das iterações. Em outras palavras, após o alinhamento, ampliando-se convenientemente o retângulo em $n + m$, consegue-se o aspecto em n . Para se certificar disto, basta observar na Fig. 3.14 as configurações nos instantes $n = 8$ e $n = 16$.

Para finalizar este capítulo, descreve-se nas próximas páginas o comportamento do algoritmo proposto supondo-se interferência constante.

Impondo-se $\xi_i(p) = \gamma_i^{tgt} / \mu_i(p) = \xi = \text{cte}$ em (3.8), desacopla-se os usuários, e a análise da convergência simplifica-se ao estudo da seguinte iteração unidimensional:

$$p(n+1) = F(p(n)) = (1 + \alpha)p(n) - \alpha \xi^{-1} p(n)^2 \quad (3.44)$$

Esta recursão, simples na forma, possui ampla diversidade de comportamentos conforme se varia o parâmetro α .

Considere os intervalos $I_\alpha =]0; \xi(1 + \alpha)^2(4\alpha)^{-1}]$ e $I'_\alpha =]0; \xi(1 + \alpha)\alpha^{-1}]$. A parábola côncava $F(p)$ em (3.44) produz valores em I_α quando p estiver em I'_α . Não estando p neste intervalo, obtém-se $F(p) \leq 0$.

Do parágrafo anterior, deduz-se que $p(0)$ deve estar necessariamente em I'_α e que a iteração $p(n+1) = F(p(n))$, ao atingir o regime, fica confinada em I_α .

Nas asserções acima, está implícito que $I_\alpha \subset I'_\alpha$. Caso contrário, em algum instante n , tem-se $F(p(n)) \leq 0$, o que faz o algoritmo divergir. Note que (3.44) é “aditiva” para valores negativos. Evidentemente, a propriedade $I_\alpha \subset I'_\alpha$ não é válida para $\alpha > 3$. Portanto, basta analisar o comportamento de (3.44) para α na faixa $0 < \alpha \leq 3$.

Consegue-se descrever as propriedades de convergência do algoritmo em (3.44) para α na faixa $0 < \alpha \leq 3$ valendo-se do conceito de entropia [Proakis 95]:

$$H = -\sum_{j=1, 2, \dots, N} P_j \log_2 P_j, \quad (3.45)$$

onde a variável P_j é a probabilidade de ocorrer um evento dentre N alternativas.

Para tal descrição, deve-se realizar o seguinte procedimento:

1. para todo α positivo não maior que 3, divide-se o intervalo de confinamento I_α em N sub-intervalos;
2. escolhe-se uma condição inicial qualquer em I'_α e itera-se (3.44). Descarta-se os primeiros valores obtidos para tentar ficar apenas com a solução assintótica;
3. calcula-se a freqüência relativa f_i com que cada sub-intervalo é visitado pelos valores em regime;
4. aplica-se a fórmula da entropia dada em (3.45), fazendo-se $P_i \approx f_i$. Sublinha-se que qualquer sub-intervalo não visitado contribui com $f_i \log_2 f_i = 0$ (limite quando $f_i \rightarrow 0$).

Seguindo esses passos, sintetizou-se a entropia em função de α na Fig. 3.15. Para tanto, dividiu-se cada intervalo I_α em $N = 200$ sub-intervalos, usou-se $\xi = 8,01$, iterou-se o mapa (3.44) 40000 vezes e descartou-se os primeiros 10000 valores.

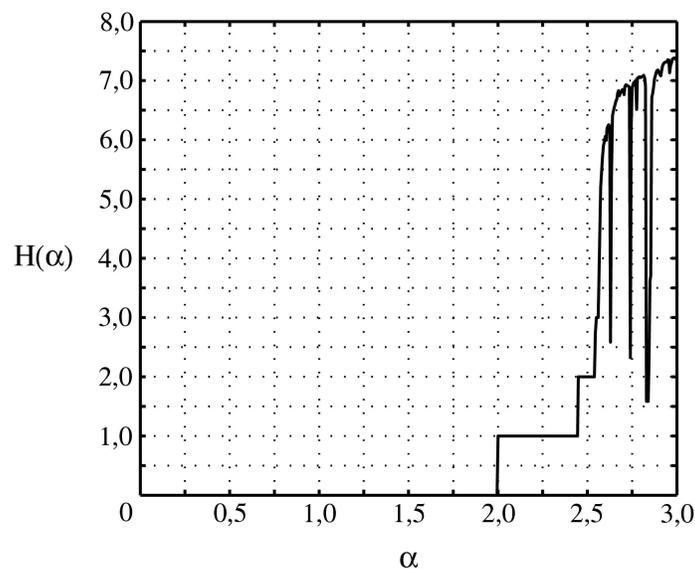


Figura 3.15: Entropia em função de α para a versão escalar do algoritmo proposto.

Para evitar excessivas referências à Fig. 3.15, declara-se que todos os comentários que seguem decorrem do resultado nessa figura, a menos que se diga o contrário.

Na faixa $0 < \alpha \leq 2$, as iterações convergem para o ponto de equilíbrio da eq. (3.44) (fato desejável em controle de potência), o que se afirma em consequência da entropia ser nula, fato este que ocorre quando apenas um sub-intervalo é visitado. Para $2 < \alpha < \alpha' \approx 2,45$, tem-se $H = 1$, significando que somente dois sub-intervalos são visitados com freqüência relativa 0,5, ou seja, a seqüência $p(n)$ alterna entre dois valores e, portanto, tem um período igual a 2. De forma geral, período pequeno ($\ll N$) implica sucessivos valores em apenas alguns sub-intervalos, o que torna a entropia baixa em relação ao seu máximo, que é $\log_2 N$. Por outro lado, período grande ($\gg N$) equivale a muitos sub-intervalos visitados, refletindo em entropia da ordem de $\log_2 N$. Em $\alpha = 3$, as iterações estendem-se por todo o intervalo I_α (por meio de um simples gráfico de histogramas pode-se constatar isto), o que justifica o valor elevado $H(3) \approx 7,32$. Para este α , a seqüência gerada é tão errática que se assemelha a um processo estocástico. De fato, se a distribuição fosse uniforme, cada freqüência relativa tenderia a $1/200$, o que resultaria em entropia $\log_2 200 \approx 7,64$, próxima, portanto, de $H(3) \approx 7,32$. Por histogramas, verifica-se que, na realidade, a distribuição da seqüência para $\alpha = 3$ tem a forma de “U”. Assim, para este α , a versão escalar do mapa proposto comporta-se como se fosse um gerador de número aleatório com pdf em “U”. Os pesquisadores S.M Ulam e J. Von Neumann identificaram esse comportamento “quase aleatório” no mapa logístico [Ulam 47]. Aliás, o procedimento para síntese da Fig. 3.15 foi adaptado de [Monteiro 02], onde se caracteriza o mapa logístico com uma figura similar. Encontra-se em [May 76] um estudo detalhado desse mapa.

Ainda em relação à versão escalar do mapa proposto, para $\alpha = 3$, por simulação, verifica-se que uma pequena perturbação no ponto inicial contido em I'_α resulta em uma seqüência confinada no intervalo I_α completamente diferente, mas não se observa alteração do caráter entrópico sintetizado na Fig.

3.15. Portanto, para $\alpha = 3$, existe instabilidade a nível de seqüência, mas comportamento estável em termos de descrição estatística.

No próximo capítulo, sintetiza-se resultados numéricos visando à análise comparativa do algoritmo proposto com o de Uykan *et al* [Uykan 04] e o de Foschini *et al* [Fosch 94]. O critério é a aplicabilidade como algoritmo para controle de potência em sistemas DS-CDMA.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, compara-se o algoritmo proposto ao DPCA de Foschini *et al* [Fosch 93] e ao sigmoidal [Uykan 04], em termos de erro quadrático médio normalizado, consumo de potência e velocidade de convergência.

4.1 PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO

As simulações foram realizadas em ambiente Matlab 6.5 para $K = 2, 5, 10$ e 15 usuários. Considerou-se que a condição (2.35) sempre é satisfeita, o que reflete em matrizes de ganhos estáticas no intervalo de tempo referente a um único processo de convergência. Os elementos de cada matriz \mathbf{G} possuem valores intermediários entre os usados em [Uykan 04, eq. (31)] e [Chai 04, Exemplo I]. As metas de QoS utilizadas estão entre 4 dB e 6 dB, faixa baseada em [Uykan 04] e [Ulukus 98]. A potência do AWGN é igual a 0,1 para todos os usuários e consiste no valor usado em [Uykan 04, Exemplo 1].

O algoritmo proposto e o de Foschini *et al* foram simulados para α 's (passos de integração numérica) positivos não maiores do que a unidade, pois ambos divergem para outros valores de passo (ver capítulo 3 deste trabalho e [Fosch 93]). De acordo com [Uykan 04], o sigmoidal converge para qualquer α positivo. Entretanto, foram adotados α 's não maiores do que 1 para o mesmo devido à excessiva degradação do desempenho em termos de proximidade da solução ótima em regime à medida que α aumenta além da unidade.

Na prática, as estimativas das SINR's nas estações rádio base não são perfeitas, no sentido de que os valores obtidos no processo de estimação continuam possuindo caráter aleatório (ver capítulo 2). Para incorporar esta situação realista às simulações, adicionou-se um erro aleatório às SINR's calculadas em cada iteração. Considerou-se que a razão entre o valor estimado da SINR e o verdadeiro vale $(1 + \varepsilon)$, onde ε é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[-\delta; +\delta]$. Realizaram-se as simulações para os

seguintes δ s: 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; e 0,25. Estes valores também foram utilizados em [Uykan 04, Exemplo 1].

Em todas as simulações, os três algoritmos iterativos foram inicializados com o vetor de potências $\mathbf{p}(0) = [0,1 \ 0,1 \ \dots \ 0,1]^T$, o qual localiza-se no poliedro que delimita a região de monotonicidade do algoritmo proposto (ver capítulo 3).

4.2 MEDIDAS DE DESEMPENHO DE ALGORITMOS DISTRIBUÍDOS

As principais propriedades de um algoritmo de controle de potência distribuído são:

- 1) o quão próxima da solução do problema de alocação está a solução encontrada pelo algoritmo;
- 2) consumo médio de potência por usuário quando o algoritmo atinge o regime;
- 3) número de atualizações para o algoritmo atingir a condição de regime;
- 4) complexidade de implementação.

A primeira propriedade pode ser quantificada por meio do erro quadrático médio normalizado (NSE) na condição de regime. A definição do NSE encontra-se em [Ulukus 98] e é dada por:

$$\text{NSE}(n) = E \left[\frac{\|\mathbf{p}(n) - \mathbf{p}^*\|^2}{\|\mathbf{p}^*\|^2} \right], \quad (4.1)$$

onde $\|\cdot\|^2$ denota o quadrado da distância euclidiana em relação à origem.

O consumo de potência por usuário na n -ésima iteração é calculado por:

$$\text{PM}(n) = E \left[\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K p_i(n) \right] \quad (4.2)$$

O valor de (4.2) quando o algoritmo atinge o regime quantifica a propriedade 2.

O número de iterações necessárias para o $\text{NSE}(n)$ ficar confinado em um intervalo estreito pré-estabelecido quantifica a propriedade 3.

Finalmente, uma forma simples de quantificar a propriedade 4 consiste em obter o total de somas, subtrações, divisões, multiplicações e acessos a valores em tabelas necessários à realização de uma atualização.

4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nas simulações, os três algoritmos geraram suas respectivas funções amostra $\mathbf{p}(n)$ realizando cada qual 2000 iterações. Foram obtidas 1000 funções amostra para cada algoritmo.

Obteve-se a curva $NSE(n)$ (ver. eq. (4.1)) de cada algoritmo fazendo-se a média nas 1000 funções amostra. Sintetizou-se a curva $PM(n)$ (ver eq. (4.2)) de cada algoritmo de forma análoga.

Em seguida, fez-se uma média com os últimos 500 pontos de cada curva $NSE(n)$ e $PM(n)$. Os valores obtidos representam, respectivamente, o NSE e o PM em regime.

Finalmente, com esses valores em regime calcularam-se os seguintes ganhos:

$$NSEG_{Foschini} = \frac{NSE_{Proposto}^{regime}}{NSE_{Foschini}^{regime}} \quad (4.3)$$

$$NSEG_{Sigmoidal} = \frac{NSE_{Proposto}^{regime}}{NSE_{Sigmoidal}^{regime}} \quad (4.4)$$

$$PMG_{Foschini} = \frac{PM_{Proposto}^{regime}}{PM_{Foschini}^{regime}} \quad (4.5)$$

$$PMG_{Sigmoidal} = \frac{PM_{Proposto}^{regime}}{PM_{Sigmoidal}^{regime}} \quad (4.6)$$

Repetiu-se o procedimento descrito acima para todo (α, δ, K) possível. Os resultados podem ser visualizados nas Figs. 4.2 a 4.9.

Para cada (α, δ, K) existem três curvas $NSE(n)$, cada qual referente a um algoritmo. Considere o máximo desvio, nos últimos 500 pontos, de cada uma dessas três curvas em relação aos respectivos valores de regime (ressalta-se que a média nos últimos 500

pontos foi adotada como representante do valor de regime). Dentre esses três valores máximos, selecionou-se o maior, que em seguida foi multiplicado por 2. O valor resultante deste procedimento define aqui o máximo desvio que cada uma das três curvas $NSE(n)$ pode ter em regime. Assim, o número de iterações necessárias para a convergência de cada algoritmo foi definido como aquele à partir do qual o desvio da correspondente curva $NSE(n)$ em relação ao seu valor de regime é sempre menor que esse máximo desvio. Note que cada (α, δ, K) resulta em um máximo desvio diferente.

Do exposto acima, o número de iterações que cada algoritmo precisa para convergir depende de (α, δ, K) . Entretanto, o parâmetro determinante da velocidade de cada algoritmo é o α , pois consitui o próprio passo de integração numérica. Assim, para cada α , fez-se a média em δ e depois em K .

Através do procedimento descrito, obtiveram-se as curvas da Fig. 4.1. O número médio de iterações para a convergência de cada algoritmo é denotado por m_{avg} .

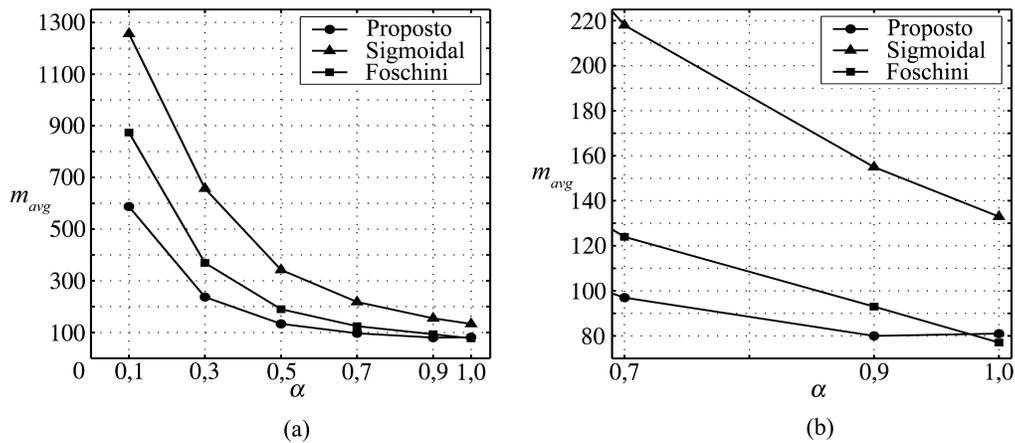


Figura 4.1: Número médio de iterações para a convergência em função de α .

Constata-se na Fig. 4.1 que o algoritmo proposto possui desempenho superior em termos de número médio de iterações em relação aos outros dois, exceto para $\alpha = 1$, situação em que o de Foschini *et al* mostra-se superior aos demais, porém de forma insignificante em relação ao proposto. Observa-se que a discrepância de ambos em relação ao proposto é maior conforme α decresce. Note que, existindo um limite superior para m_{avg} (ver expressão em (2.35)), é possível utilizar um passo α menor para o proposto, o que é importante porque sabe-se que menores passos de integração

numérica resultam em maior proximidade, em regime, da solução ótima.

Conforme as Figs. 4.3, 4.5, 4.7 e 4.9, o DPCA proposto, para qualquer α e δ , resulta em menor consumo de potência por usuário (PM em regime) em relação aos outros dois. Observa-se que essa vantagem em termos de PM em regime tende a ser maior à medida que o erro de estimação e o passo α aumentam.

Essa economia de potência por parte do algoritmo proposto constitui efetivamente uma vantagem se o vetor de potências em regime fornecido pelo mesmo não ficar muito distante (alto NSE em regime) do vetor ótimo. Os resultados nas Figs. 4.2, 4.4, 4.6 e 4.8 comprovam que o algoritmo proposto atinge um NSE em regime ou menor (o que ocorre em inúmeras situações) ou pelo menos comparável aos valores de NSE em regime dos outros dois. Constata-se que o $NSE_{\text{Sigmoidal}}$ (dB) tende a tornar-se positivo ao se diminuir δ , ou seja, o sigmoidal tende a superar o proposto em termos de NSE (em regime) apenas para baixos erros de estimação. Observa-se que o quão baixo precisa ser o δ para que $NSE_{\text{Sigmoidal}}$ (dB) torne-se positivo depende fortemente de α . O NSE_{Foschini} (dB) tende a ser estritamente não positivo quando o sistema está carregado com mais de 2 usuários. Para $K > 2$, a vantagem do proposto em relação ao de Foschini *et al* em termos de NSE (em regime) aumenta estritamente com δ . Constata-se que a diminuição do passo α tende a beneficiar mais o proposto do que os outros dois, em termos de NSE em regime.

As curvas $NSE_{\text{Sigmoidal}}$ (dB) e $PMG_{\text{Sigmoidal}}$ (dB) quando $\alpha = 0,1$ não foram incluídas nas Figs. 4.2 a 4.9 porque o algoritmo sigmoidal não atingiu a situação de regime nas 2000 iterações. A diminuição da quantidade de pontos nas Figs. 4.2 a 4.9 à medida que o número de usuários decresce (baixos carregamentos) deve-se à tendência do algoritmo proposto não convergir quando há, simultaneamente, baixo carregamento, elevado erro de estimação e passo α próximo da unidade.

No método distribuído, cada elo $M_i B_i$ realiza isoladamente suas atualizações, ou seja, o controle de potência como um todo é realizado por K processadores em paralelo e cada qual executa apenas operações escalares. Assim, a análise da complexidade reduz-se ao estudo da iteração i . Procedendo conforme a seção 4.2, conclui-se que a iteração i do DPCA proposto e a i do DPCA de Foschini *et al* possuem a mesma complexidade. A iteração i do sigmoidal exige adicionalmente acesso a tabela (devido à função $\tanh(\cdot)$),

portanto possui maior complexidade de implementação.

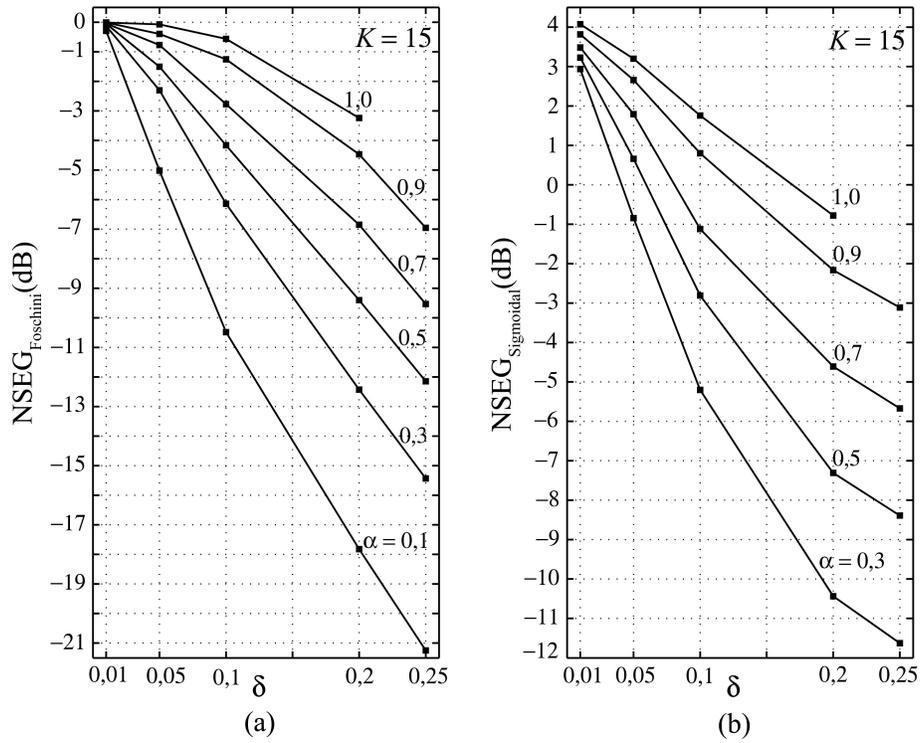


Figura 4.2: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 15$.

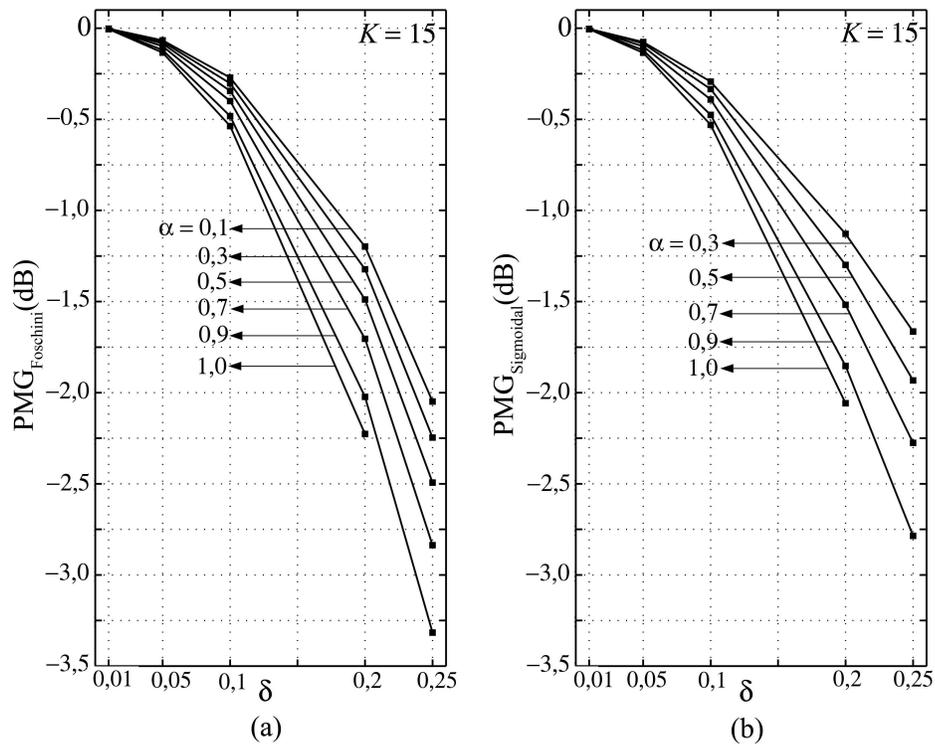


Figura 4.3: Ganho em termos de PM em regime para $K = 15$.

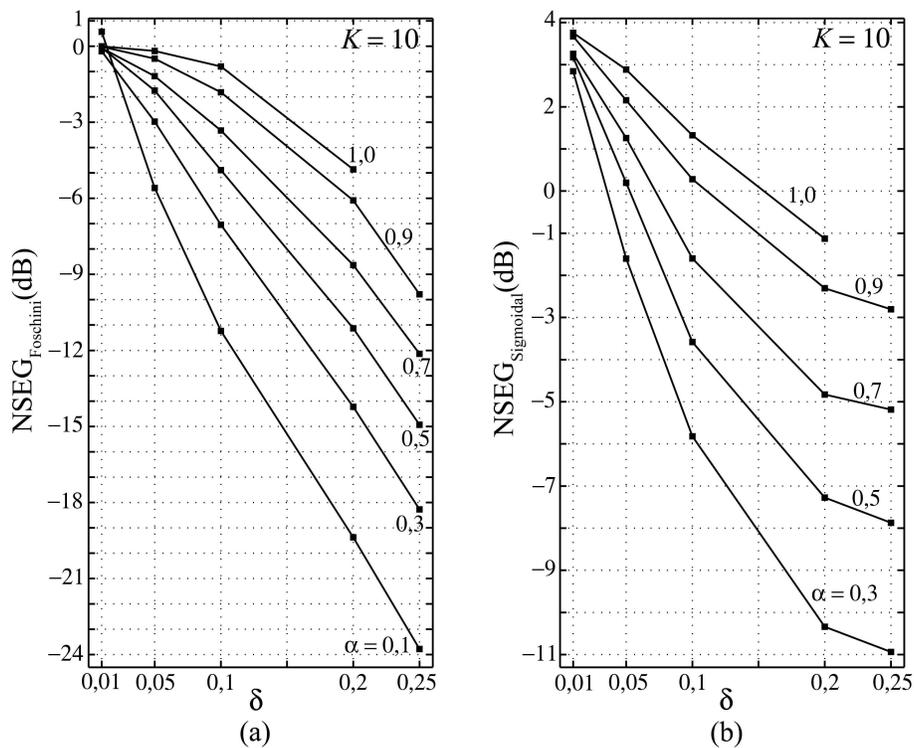


Figura 4.4: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 10$.

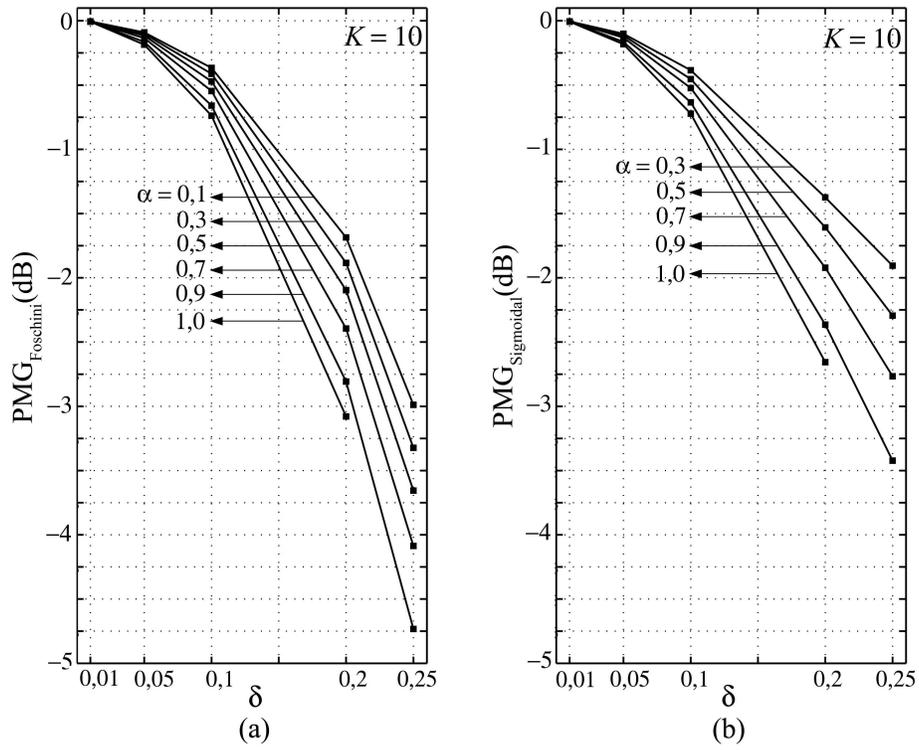


Figura 4.5: Ganho em termos de PM em regime para $K = 10$.

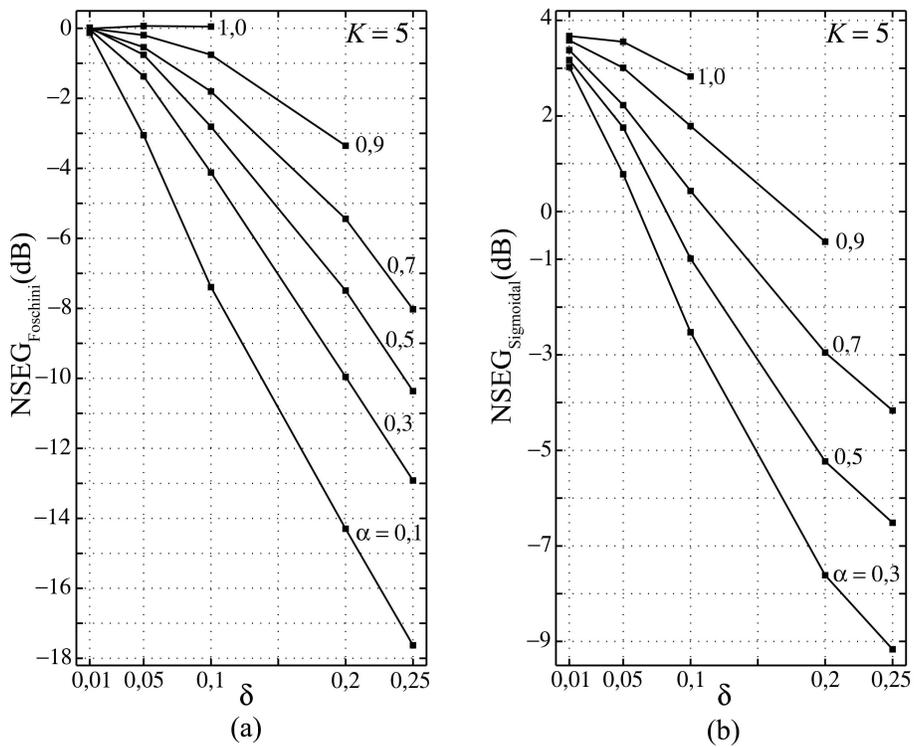


Figura 4.6: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 5$.

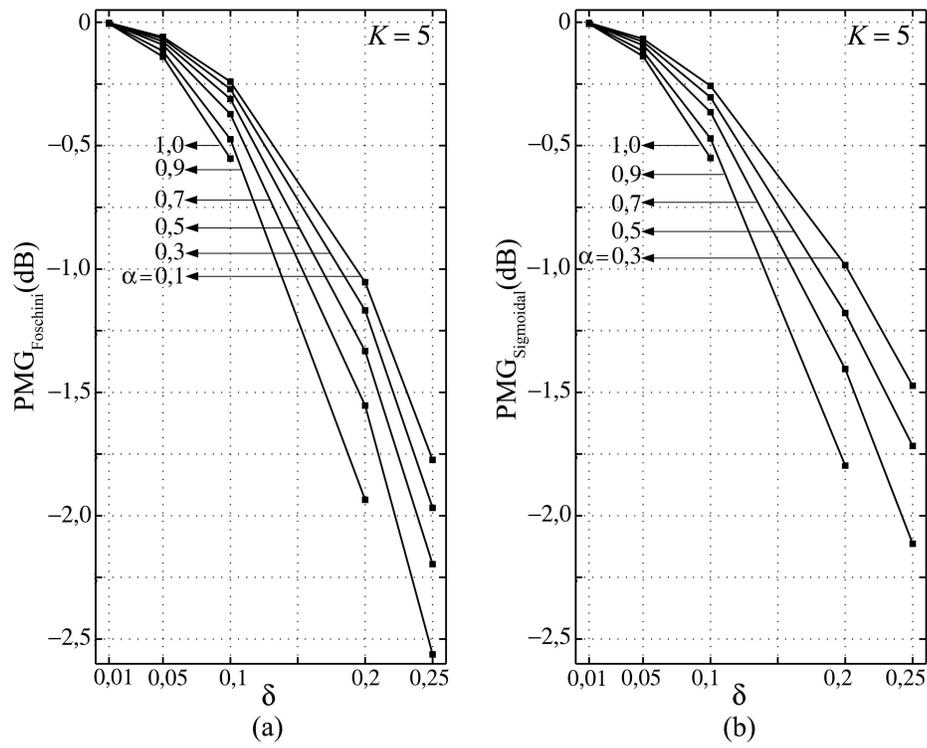


Figura 4.7: Ganho em termos de PM em regime para $K = 5$.

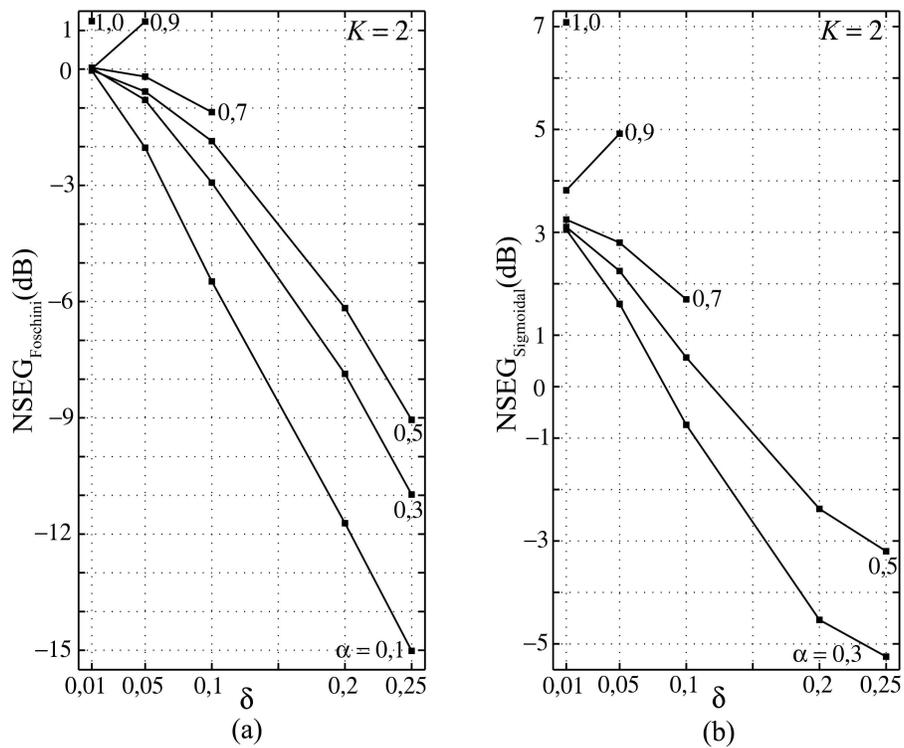


Figura 4.8: Ganho em termos de NSE em regime para $K = 2$.

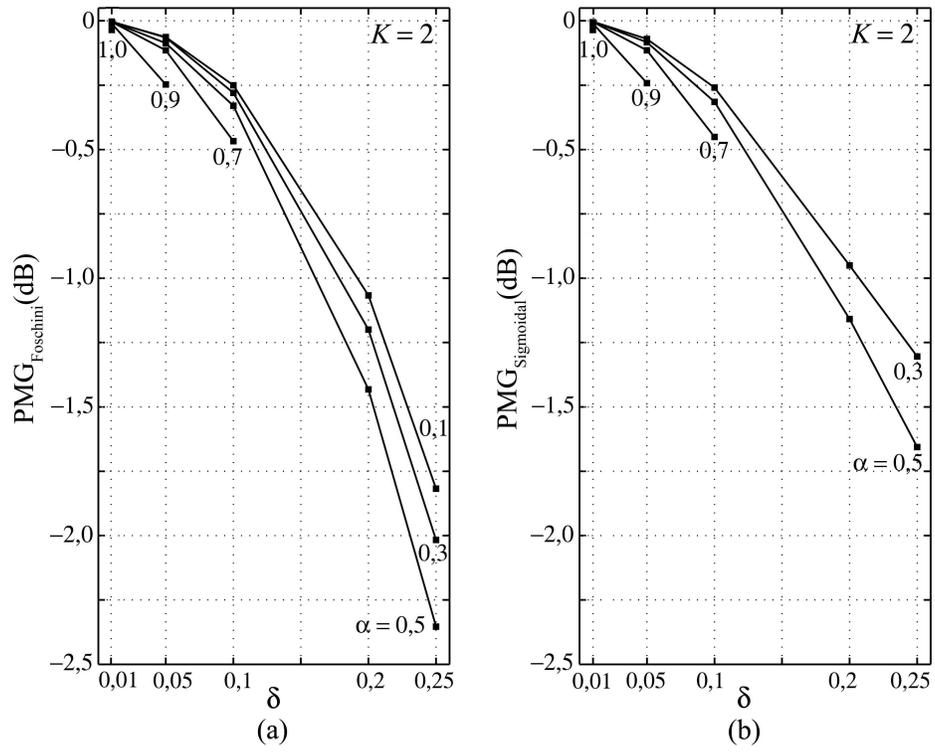


Figura 4.9: Ganho em termos de PM em regime para $K = 2$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Chai 04] C. C. Chai *et al.* *A Unified Framework for Transmitter Power Control in Cellular Radio Systems*. ETRI Journal, vol. 26, no. 5, pages 423-31, October 2004.
- [Farrokhi 98a] Farrokh, Rashid-Farrokhi; Tassiulas, Leandros. *Transmit Beamforming and Power Control for Cellular Wireless Systems*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, v.16, n.8, p.1437-1449, October 1998.
- [Farrokhi 98b] Farrokh, Rashid-Farrokhi; Tassiulas, Leandros. *Joint Optimal Power Control and Beamforming in Wireless Networks Using Antenna Arrays*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, v.46, n.10, p.1313-1323, October 1998.
- [Foschini 93] G. J. Foschini & Z. Miljanic. *A Simple Distributed Autonomous Power Control Algorithm and its Convergence*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 42, no. 4, pages 641-46, November 1993.
- [Hanly 96] S. V. Hanly. *Capacity and Power Control in Spread Spectrum Macro-diversity Radio Networks*. IEEE Transactions on Communications, vol. 44, no. 2, pages 247-56, February 1996.
- [Hui 98] Hui, A. L. C.; Letaief, K. B. *Successive Interference Cancellation for Multiuser Asynchronous DS/CDMA Detectors in Multipath Fading Links*. IEEE Transactions on Communications, March 1998, pp. 384-391.
- [Kuramoto 04] Kuramoto, A. S. R.; *Metodologias de Seleção de Seqüências de Espalhamento para Sistemas DS-CDMA Quase-Síncronos*, Dissertação de Mestrado, EPUSP-PTC, 2005.

- [May 76] R. M. May. *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*. Published in *Nature*, vol. 261, page 459, June 1976.
- [Monteiro 02] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- [Monzingo 80] Monzingo, R. A.; Miller, T. W. *Introduction to Adaptive Arrays*. New York. Wiley
- [Priscoli 96] Priscoli, F. D.; Sestini, F. *Effects of Imperfect Power Control and User Mobility on a CDMA Cellular Network*. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v.14, n.9, p.1809-1816, December 1996.
- [Sim 99] Sim, Moh Lim; Soh, Cheong-Boon. *Performance Study of Close-Loop Power Control Algorithms for a Cellular CDMA System*. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v.48, n.3, p.911-921, May 1999.
- [Ulukus 98] S. Ulukus & R. D. Yates. *Stochastic Power Control for Cellular Radio Systems*. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 6, pages 784-98, June 1998.
- [Uykan 04] Z. Uykan & H. N. Koivo. *Sigmoid-Basis Nonlinear Power-Control Algorithm for Mobile Radio Systems*. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 1, pages 265-71, January 2004.
- [Verdu 86] Verdú, S. T. *Minimum Probability of Error for Asynchronous Gaussian Multiple-Access Channels*. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.32, n.1, p.85-96, January 1986.
- [Verdu 98] Verdú, S. T. *Multiuser Detection*. Cambridge, U. K.: Cambridge University Press, 1998.

- [Viterbi 93] Viterbi, A. M.; Viterbi, A. J. *Erlang Capacity of a Power Controlled CDMA System*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, v.11, n.6, p.892-900, August 1993.
- [Yates 95] R. D. Yates. *A Framework for Uplink Power Control in Cellular Radio Systems*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 13, no. 7, pages 1341-47, September 1995.
- [Yener 01] Yener, Aylin; Ulukus, Sennur. *Interference Management for CDMA Systems Through Power Control, Multiuser Detection and Beamforming*. IEEE Transactions on Communications, v. 49, n.7, p.1227-1239, July 2001.
- [Zander 92] J. Zander. *Distributed Cochannel Interference Control in Cellular Radio Systems*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 41, no. 3, pages 305-11, August 1992.

ANEXO A

Cópia do artigo:

T. J. Gross, P. J. E. Jeszensky e T. Abrão, *Sistema Dinâmico Estocástico de Tempo Discreto Não Linear para Controle de Potência do Canal Reverso DS-CDMA*, XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Belém (PA) Brazil, 2004, pp. 1-6.