

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Área de Sistemas Eletrônicos

**Estimativa de parâmetros de canal para  
DS-CDMA baseada na decomposição  
em subespaços**

**Paulo José Garcia Guimarães**

Paulo José Garcia Guimarães

# Estimativa de parâmetros de canal para DS-CDMA baseada na decomposição em subespaços

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração:  
Sistemas Eletrônicos

Orientador:  
Prof. Dr. Paul Jean Etienne Jeszensky

## Ficha Catalográfica

Guimarães, Paulo José Garcia

Estimativa de parâmetros de canal para DS-CDMA baseada na decomposição em subespaços. São Paulo, 2005. 121 p.

Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Telecomunicações e Controle.

1. Estimativa de Parâmetros. 2. Decomposição em Subespaços. 3.DS-CDMA

Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Telecomunicações e Controle. Área de Sistemas Eletrônicos.

à minha esposa Katy e ao nosso filho João Miguel

# Agradecimentos

Acreditar em minha própria capacidade de realização foi apenas o primeiro passo. Muitos "tropeços" certificaram-me de que, mais do que acreditar em mim mesmo, é necessário ser acreditado.

Agradeço imensamente ao Professor Paul Jean pela orientação e apoio indispensáveis à construção deste trabalho.

À Katy Anne pelo apoio, compreensão e paciência.

E, aos meus pais, que ensinaram-se a dar o primeiro passo.

# Resumo

Com o desenvolvimento de técnicas para aumentar a capacidade de sistemas *Direct Spread Code Division Multiple Access* (DS-CDMA), entre elas o uso de detectores *Multiuser Detector* (MuD), vem crescendo a necessidade de obtenção de parâmetros de canal (amplitude de sinal, atrasos de propagação e fase da portadora) de formas cada vez mais precisas. Alguns trabalhos sugerem o uso da técnica de decomposição em subespaços como base para a determinação destes parâmetros, porém, trabalhos apresentados até o momento deram bastante enfoque ao desenvolvimento de algoritmos sem muita preocupação com a análise das limitações e sensibilidade destes algoritmos. Este trabalho tem por objetivo analisar o desempenho e sensibilidade de um dos esquemas propostos dentro da técnica de decomposição em subespaços, com a finalidade de avaliar sua utilização prática, apontar vulnerabilidades e propor alterações para melhorar o desempenho.

# Abstract

With the development of techniques that increase DS-CDMA capacity as MuD, it is growing the need of accurate channel parameters estimation (signal strength, propagation delays and carrier phase). Some articles suggest subspace-based techniques for these parameters determination, however, papers presented so far are focusing on algorithms development while less attention is given to the analysis of limits and sensitivity. The objective of this dissertation is to work on performance and sensitivity analysis of one proposed algorithm based on subspace decomposition, focusing on practical utilization, in order to point vulnerabilities and suggest changes that increase algorithm performance.

# Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas

Convenções e Lista de Símbolos

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	2
1.2	Escopo . . . . .	3
1.3	Contribuição . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Estimativa de Parâmetros</b>	<b>4</b>
2.1	Definição de Estimador e Estimativa . . . . .	4
2.1.1	Propriedades dos Estimadores . . . . .	5
2.2	Métodos de Estimação . . . . .	5
2.2.1	Método da Máxima Verossimilhança . . . . .	5
2.2.2	Método de Bayes . . . . .	7
2.2.3	Discussão . . . . .	10
2.3	Limite Inferior de Cramér-Rao . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Estimativa de Parâmetros Baseada na Decomposição em Subespaços</b>	<b>13</b>
3.1	Generalidades Sobre o Método de Decomposição em Subespaços . . . . .	14
3.2	O Algoritmo MUSIC . . . . .	15

3.2.1	Estimando o Subespaço de Sinal . . . . .	17
3.2.2	Ortogonalidade Entre os Subespaços de Sinal e Ruído . . . . .	18
3.2.3	Estimando Parâmetros do Sinal . . . . .	19
3.3	O Algoritmo ESPRIT . . . . .	20
3.3.1	Geometria dos Sensores e Modelamento . . . . .	21
3.3.2	Estimando o Operador de Rotação de Subespaço . . . . .	25
3.3.3	Sumário do Algoritmo <i>ESPRIT</i> . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Estimativa de Parâmetros em Sistemas DS-CDMA</b>	<b>27</b>
4.1	A necessidade de Estimativa de Parâmetros em DS-CDMA . . . . .	28
4.2	Problemas que Dificultam as Estimativas . . . . .	28
4.2.1	Multipercurso . . . . .	30
4.2.2	Interferência de Múltiplo Acesso e o Efeito <i>Near-Far</i> . . . . .	32
4.3	O Contexto de Estimativas de Parâmetros de Canal . . . . .	32
4.4	Correlator de Escorregamento ou <i>Sliding Correlator</i> . . . . .	34
4.5	Deteção e Estimativa Conjunta . . . . .	35
4.6	Algoritmos Sub-Ótimos para Deteção e Estimativa Conjunta . . . . .	38
4.6.1	Uma Árvore de Busca Prática . . . . .	38
4.6.2	Uso do RLS para Estimação de Amplitude . . . . .	40
4.7	Métodos Baseados na Decomposição em Subespaços . . . . .	43
4.7.1	Características . . . . .	43
4.7.2	Subespaços em DS-CDMA . . . . .	44
4.7.3	Diferenças Entre os Algoritmos . . . . .	46
4.8	Métodos Baseados em Máxima Verossimilhança . . . . .	48
<b>5</b>	<b>O Modelo Utilizado</b>	<b>49</b>
5.1	Modelamento . . . . .	49
5.2	Estimando Subespaços e Canal . . . . .	52
5.3	Estimando Parâmetros do Canal . . . . .	55

5.3.1	Estimando Atrasos . . . . .	55
5.3.2	Estimando Amplitudes . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Aspectos Analíticos</b>	<b>63</b>
6.1	Resultados do Limitante Inferior de Cramér-Rao . . . . .	64
6.2	Distribuição Assintótica do MUSIC . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>71</b>
7.1	Cenário 1: Único Usuário em Canal Invariante . . . . .	72
7.1.1	Estimativas de Atrasos . . . . .	72
7.1.2	Estimativas de Amplitudes . . . . .	75
7.2	Cenário 2: Múltiplos Usuários em Canal Invariante . . . . .	77
7.2.1	Estimativas de Atrasos . . . . .	77
7.2.2	Estimativas de Amplitudes . . . . .	81
7.3	Cenário 3: Múltiplos Usuários em Canal Variante e com Multipercursos . . . . .	85
7.3.1	Estimativas de Atrasos . . . . .	85
7.3.2	Estimativas de Amplitudes . . . . .	91
7.4	Discussão . . . . .	92
7.4.1	Escolha dos códigos de espalhamento . . . . .	92
7.4.2	Limite de carga . . . . .	94
7.4.3	Análise da solução proposta . . . . .	98
7.4.4	Sensibilidade à variação de canal . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>102</b>
<b>9</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>103</b>
<b>10</b>	<b>Referências</b>	<b>105</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>109</b>

<b>Apêndice A - Modelagem do Simulador e Rotinas</b>	<b>110</b>
A.1 Objetivo do Simulador . . . . .	110
A.2 Diagrama em blocos do simulador . . . . .	111
A.3 Rotinas . . . . .	113

# Lista de Figuras

3.1	Geometria do <i>MUSIC</i> para três sensores e duas fontes, sem ruído	16
3.2	Geometria dos sensores para aplicação <i>DOA</i> utilizando <i>ESPRIT</i>	22
4.1	A correta estimativa do atraso de um usuário é fundamental na detecção da informação	29
4.2	Decodificador sucessivo	29
4.3	Multipercurso	30
4.4	Sobreposição de desvanecimentos	31
4.5	Resumo histórico	34
4.6	<i>Sliding correlator</i> (paralelo) [ $N$ =comprimento da seqüência de espalhamento]	35
4.7	<i>Sliding Correlator</i> (seqüencial) [ $N$ =comprimento da seqüência de espalhamento]	36
4.8	Modelo DS-CDMA	37
4.9	Alternativas para amostragem	47
5.1	Vetor observação, contem o final de um bit e o início do próximo bit	50
7.1	Raiz do erro quadrático médio em função da janela ( $J$ ) [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=1$ ]	73
7.2	Raiz do erro quadrático médio em função da janela ( $J$ ) e do comprimento da seqüência [ $S/N=12$ dB, $K=1$ ]	73
7.3	Raiz do erro quadrático médio em função da relação $S/N$ [ $J=60$ , $N=31$ , $K=1$ ]	74
7.4	Probabilidade de aquisição em função da janela ( $J$ ) [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=1$ , $\delta = .0625$ ]	74
7.5	Raiz do erro quadrático médio em função da janela ( $J$ ) [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=1$ ]	76

7.6	Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) e do comprimento da seqüência [ $K=1$ , $S/N=12$ dB] . . . . .	76
7.7	Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J= 60$ , $N=31$ , $K=1$ ] . . . . .	77
7.8	Amplitude estimada em função da janela (J) [ $N=31$ , $S/N = 12$ dB, $K=1$ ] . . . . .	78
7.9	Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) e do número de usuários [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $MAI=0$ dB] . . . . .	79
7.10	Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J= 60$ , $N=31$ , $K=5$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	79
7.11	Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J= 60$ , $N=31$ , $K=2$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	80
7.12	Probabilidade de aquisição em função da janela (J) [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=5$ , $\delta = .0625$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	80
7.13	Raiz do erro quadrático médio em função da MAI [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=5$ ] . . . . .	81
7.14	Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) e do número de usuários [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $MAI=0$ dB] . . . . .	82
7.15	Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J= 60$ , $N=31$ , $K=5$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	83
7.16	Raiz do erro quadrático médio em função da MAI [ $N=31$ , $S/N=12$ dB, $K=5$ ] . . . . .	83
7.17	Amplitude estimada em função de S/N [ $N=31, K=5$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	84
7.18	Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N e número de usuários [ $J= 60$ , $N=31$ , $MAI=0$ dB] . . . . .	85
7.19	Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=20$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, $MAI=0$ dB] . . . . .	86
7.20	Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=30$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, $MAI=0$ dB] . . . . .	87
7.21	Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=40$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, $MAI=0$ dB] . . . . .	87

7.22	Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0,80$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, MAI=0 dB] . . . . .	88
7.23	Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0,85$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, MAI=0 dB] . . . . .	88
7.24	Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0,90$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, MAI=0 dB] . . . . .	89
7.25	<i>Sliding correlator</i> [ $N=31$ , $S/N=20$ dB, $K=1$ ] . . . . .	89
7.26	<i>Sliding correlator</i> [ $N=31$ , $S/N=20$ dB, $K=2$ , MAI=0 dB] . . . . .	90
7.27	Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=30$ , $K=6$ , $N=31$ , $S/N=20$ dB, MAI=0 dB] . . . . .	91
7.28	<i>Sliding correlator</i> e estimador geométrico [ $N=255$ , $S/N=10$ dB] . . . . .	93
7.29	<i>Estimador geométrico</i> [Código de Gold, $N=31$ , $S/N=10$ dB] . . . . .	95
7.30	<i>Sliding correlator</i> e estimador geométrico[SMC, $N=31$ ] . . . . .	95
7.31	"Espectro do erro"[ $K = 8$ , $N=31$ , $\mathbf{V}_N = 31 \times 15$ $S/N=10$ dB] . . . . .	97
7.32	"Espectro do erro"[ $K = 8$ , $N=31$ , $\mathbf{V}_N = 31 \times 19$ , $S/N=10$ dB] . . . . .	97
7.33	Comparação entre o método de otimização e método algébrico[SMC, $N=31$ ] . . . . .	98
7.34	Capacidade de discriminação de percursos vizinhos[SMC, $N=31$ ] . . . . .	99
7.35	Sensibilidade a variações do canal[SMC, $N=31$ ] . . . . .	101
7.36	Sensibilidade a variações do canal[SMC, $N=31$ ] . . . . .	101
A.1	Diagrama em blocos do simulador . . . . .	111

# Lista de Tabelas

2.1	Função de verossimilhança . . . . .	6
2.2	Função custo . . . . .	10
7.1	Comparação de algoritmos,[S/N=20 dB, MAI=0 dB] . . . . .	91
7.2	Dimensão do subespaço de ruído, $S_N$ . . . . .	96
7.3	Valores Referência de $f_m$ . . . . .	100

# Lista de Abreviaturas

**AWGN** *Additive White Gaussian Noise*

**BPSK** *Binary Phase-Shift Keying*

**CRB** *Cramér-Rao Bound*

**DOA** *Direction-of-Arrival*

**DS-CDMA** *Direct Spread Code Division Multiple Access*

**ERB** *Estação Rádio Base*

**ESPRIT** *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques*

**EVD** *Eigen Value Decomposition*

**FDP** *Função Densidade de Probabilidade*

**LS** *Least-Squares*

**MAI** *Multiple-Access Interference*

**MAP** *Máximo a posteriori*

**ML** *Maximum Likelihood*

**MODE** *Method of Direction of Arrival Estimation*

**MuD** *Multiuser Detector*

**MUSIC** *Multiple Signal Classification*

**PLL** *Phase-Locked Loop*

**PSK** *Phase-Shift Keying*

**RLS** *Recursive Least-Square*

**SC** *Sliding Correlator*

**SMC** *Seqüência de Máximo Comprimento*

**SVD** *Singular Value Decomposition*

**TAM** *Toeplitz Approximation Method*

**TLS** *Total Least-Squares*

# Convenções e Lista de Símbolos

Na notação das fórmulas, as seguintes convenções foram utilizadas:

- letras maiúsculas em negrito são matrizes, exemplo:  $\mathbf{R}$ ;
- letras minúsculas em negrito são vetores, exemplo:  $\mathbf{y}$ ;
- o símbolo  $\hat{\cdot}$  sobreposto a uma variável indica uma estimativa, exemplo:  $\hat{\mathbf{R}}$ ;
- o símbolo  $T$  superposto à matrizes ou vetores indica transposição;
- o símbolo  $\dagger$  indica conjugado transposto;
- o símbolo  $*$  indica uma operação de convolução.
- $\Re[\cdot]$  indica subespaço ou espaço imagem gerado por  $[\cdot]$
- $P(\cdot)$  indica probabilidade de  $(\cdot)$
- $p(\cdot)$  indica função densidade de probabilidade de  $(\cdot)$
- $\text{Re}[\cdot]$  indica a parte real de  $[\cdot]$
- $\text{diag}[\cdot]$  indica a diagonal
- $\text{var}[\cdot]$  indica variância de  $[\cdot]$

Os seguintes símbolos serão utilizados:

símbolo	descrição	página
$\alpha_{k,p}$	atenuação do usuário $k$ , percurso $p$	
	fator de "esquecimento" $\gamma$	
$\Gamma$	espaço amostral	
$\theta$	parâmetro a ser estimado	
$\eta_i$	vetor ruído aditivo gaussiano	
$\hat{\theta}$	estimador	
$\epsilon$	uma evidência experimental	

*continua...*

símbolo	descrição	página
$\lambda$		
$\Lambda$	conjunto de valores de $\theta$	
$\tau$	atraso	
$\phi$	fase de portadora referente ao usuário k	
$\Phi$	parâmetros de amplitude	
$\Delta$	deslocamento entre as duplas de sensores	
$\Psi$		
$\omega_0$		
$\mathbf{a}_k$	código de espalhamento do usuário k	
$\mathbf{a}_k^r$		
$\mathbf{a}_k^r$		
$\mathbf{A}$	matriz de vetores de transferência	
$A_k$	amplitude de sinal do usuário k	
$\mathbf{A}$		
$c_i$	amplitude do sinal	
$\mathbf{c}_i$	vetor de amplitude de sinais	
$C$	função custo	
$\mathbf{D}$	matriz dos autovalores de $\mathbf{R}$	
$d$	distância euclidiana entre os subespaços	
$\mathbf{F}$		
$\mathbf{F}_X$		
$\mathbf{F}_Y$		
$h$	resposta ao impulso	
$\mathbf{H}$	conjunto de respostas ao impulso possíveis	
$\mathbf{h}$	vetor resposta ao impulso	
$\mathbf{I}$	matriz identidade	
$J$	número de amostras ou tamanho da janela de amostragem	
$K$	número de sinais ou usuários	
$L(\cdot)$	função de verossimilhança	
$L$	número de caminhos de propagação	
$\mathbf{m}(\cdot)$	vetor de transferência	
$\mathbf{M}$		
$n$	tamanho da população contador	
$N$	comprimento da seqüência de espalhamento	

*continua...*

símbolo	descrição	página
$P_k$	potência do usuário k	
$q$	estimativa	
$Q$	número de amostras por chip	
$r(\hat{\theta})$	estimador de Bayes	
$r(t)$	sinal recebido	
$\mathbf{r}$	vetor sinal	
$R_\theta$	risco condicional	
$\mathbf{R}$	matriz de correlação	
$\mathbf{R}_S$	matriz de correlação de amplitude de sinais	
$s(t)$	sinal transmitido	
$s_i(t)$	sinal incidente	
$S_Y$	subespaço de sinal	
$S_N$	subespaço de ruído	
$\mathbf{u}_k^r$		
$\mathbf{u}_k^l$		
$v_i(t)$	fase do sinal incidente	
$\mathbf{T}$	operador não singular	
$T$	período de um símbolo	
$T_c$	período de um chip	
$T_m$	máxima diferença entre atrasos de propagação	
$\mathbf{V}$		
$\mathbf{V}_S$	base para subespaço de sinal	
$\mathbf{V}_N$	base para subespaço de ruído	
$\mathbf{V}_X$	base para subespaço de sinal do primeiro elemento de duplas de antenas	
$\mathbf{V}_Y$	base para subespaço de sinal do segundo elemento de duplas de antenas	
$Z_X$	primeiro elemento de uma dupla de antenas	
$Z_Y$	segundo elemento de uma dupla de antenas	
$y$	valor da observação aleatória Y	
$\mathbf{y}_i$	vetor de observação	
$Y$	observação aleatória	

# 1 Introdução

O DS-CDMA é o esquema de múltiplo acesso já utilizado na segunda geração de sistemas de telefonia celular e também proposto para os sistemas de terceira geração e suas futuras evoluções, além de uma grande variedade de outras aplicações em telecomunicações. Características como baixa potência, alta capacidade, inerente privacidade, imunidade a interferências externas e desvanecimento por multipercurso [1], são algumas das qualidades que tornam o DS-CDMA uma técnica ainda com grandes possibilidades de desenvolvimento e de utilização.

Se por um lado o DS-CDMA é robusto contra interferências externas, por outro, como todos os sistemas de comunicação, sofre com a interferência de múltiplo acesso (*Multiple-Access Interference*, ou MAI). Porém, em CDMA o efeito da MAI é muito prejudicial já que a mesma banda é compartilhada por vários usuários os quais se distinguem por diferentes códigos de espalhamento. O receptor deve lidar com uma superposição linear dos sinais transmitidos, atenuados por diferentes fatores e atrasados por um tempo arbitrário (sistema assíncrono). [PENDÊNCIA<sup>1</sup>].

A primeira e mais natural alternativa para se combater a MAI é o uso de códigos de espalhamento com propriedades que permitam separar os vários usuários no receptor, como ortogonalidade dos códigos ou, pelo menos, baixas correlações cruzadas.

Porém, a propriedade de baixa correlação cruzada assegura o bom desempenho apenas quando a energia de sinal de todos os usuários no receptor são similares, caso contrário, um receptor CDMA convencional (por exemplo, filtro casado) é incapaz de detectar corretamente a informação transmitida pelos usuários de menor energia. Este efeito é chamado de *near-far*, e pode ser minimizado com um sistema de controle de potência o qual tenta manter a intensidade de sinal recebida de cada usuário aproximadamente no mesmo nível, porém, mesmo uma pequena discrepância de energia entre os usuários pode degradar

---

<sup>1</sup>nota sobre sistemas síncronos no uplink

severamente o desempenho de um receptor convencional [2].

A terceira e melhor alternativa para combater a MAI vem da teoria de detectores multiusuários [3]. Esta teoria é baseada na idéia de que é possível melhorar o desempenho se o receptor puder incorporar informações sobre os demais usuários. O receptor ótimo correspondente foi desenvolvido por Verdú [4] e [5], mas dada a complexidade deste receptor ótimo, a atenção nesta área está voltada ao desenvolvimento de receptores subótimos [6],[7], de menor complexidade.

Muitas das soluções propostas para estes receptores assumem perfeito conhecimento dos parâmetros do canal, como atraso de propagação, amplitudes e fases dos sinais recebidos, parâmetros que, na prática, devem ser estimados e atualizados continuamente (aquisição e *tracking*). No campo das comunicações DS-CDMA este é o principal objetivo da estimativa de parâmetros: determinar atrasos e atenuações variantes no tempo através do processamento do sinal recebido de forma a auxiliar a detecção da informação transmitida pelos usuários.

A proposta deste trabalho é apresentar uma visão geral das técnicas já desenvolvidas para a estimativa de parâmetros e analisar de forma mais detalhada os algoritmos baseados na decomposição em subespaços os quais apresentam características favoráveis para uso comercial, como por exemplo, baixa capacidade de processamento e privacidade.

## 1.1 Motivação

O que tem sido chamado atualmente de *evolved 3G*, considera a utilização de detectores multiusuários para aumento do desempenho, capacidade e taxas de transmissão. Estas técnicas avançadas de detecção em DS-CDMA necessitam de informação precisa dos parâmetros de atraso, fase e amplitude do sinal para a correta detecção da informação transmitida e neste ponto ainda existem lacunas e portanto, abertura para contribuições.

Mesmo nos sistemas DS-CDMA convencionais, que necessitam estimativa apenas do atraso, estas técnicas de estimativas podem ser utilizadas em substituição ao *sliding correlator* que tem baixo desempenho diante da presença de interferência de múltiplo acesso e efeito *near-far*.

Assim, a estimativa de parâmetros de canal para DS-CDMA constitui um campo ainda com possibilidades de desenvolvimento e com aplicações imediatas, o que motiva este trabalho.

## 1.2 Escopo

O trabalho apresenta os seguintes tópicos:

- Sumário sobre teoria de estimativas;
- Principais técnicas de estimativas de parâmetros propostas em literatura;
- Resumo teórico da análise de sinais através da decomposição em subespaços;
- Apresentação do modelo utilizado nas simulações;
- Aspectos analíticos do algoritmo;
- Simulação de desempenho em canais variantes;
- Análise do desempenho através da comparação com o *Sliding Correlator* (SC)
- Aplicações para o mercado;

## 1.3 Contribuição

A proposta deste trabalho é a avaliação detalhada e sistemática de algoritmos para a solução do problema de estimativa de parâmetros baseados na técnica de decomposição do sinal recebido em subespaços de sinal e ruído, dentro do contexto de detectores multiusuários.

São apresentados, de forma resumida, os esforços que têm sido feitos nesta área e, de forma detalhada, a técnica de decomposição em subespaços, que tem sido apresentada como uma forma de aplicação prática, podendo, num futuro próximo, ser utilizada como peça fundamental no desenvolvimento de sistemas sem fio, sempre na busca de maior capacidade e altas taxas de transmissão.

## 2 Estimativa de Parâmetros

O problema de estimativa é recorrente sempre que se deseje tirar conclusões probabilísticas sobre aspectos de populações com base na observação de amostras extraídas desta população. Assim, pode-se, por exemplo, estimar-se que em uma cidade com  $n$  habitantes exista uma proporção  $p$  de analfabetos baseando-se em uma amostra de tamanho  $J$ , com  $J \ll n$ .

Em comunicações, a necessidade de estimação está geralmente associada à detecção de sinais, já que para a correta decisão sobre a informação recebida, é necessário inferir parâmetros desconhecidos introduzidos pelo canal de comunicação, como atrasos e atenuações.

De forma geral, detecção e estimação envolvem fazer-se inferências à partir de observações que nada mais são do que sinais distorcidos ou corrompidos pelo canal. No problema de detecção, a decisão a ser tomada está contida em um número finito de possibilidades, já na estimação, deseja-se inferir um valor, ou conjunto de valores, que podem pertencer a um intervalo contínuo, ou seja, existem infinitas possibilidades.

São básicos nos estudos de detecção e estimação os conceitos de observação aleatória  $Y$ , elemento de um espaço amostral  $\Gamma$  que pode ser constituído de vetores, formas de ondas ou números. A partir de  $Y$  desejamos extrair informação sobre algum fenômeno relacionado a  $Y$ . Neste capítulo são apresentadas algumas definições da teoria de estimação que serão úteis no decorrer do trabalho.

### 2.1 Definição de Estimador e Estimativa

Chamamos de *estimador* à função (estatística) que será utilizada no processo de estimação do parâmetro desejado. Assim, o estimador é uma variável aleatória, caracterizada por uma distribuição de probabilidades, conhecida ou não, e seus respectivos parâmetros próprios.

Estimativa, é cada valor particular assumido pelo estimador.

### 2.1.1 Propriedades dos Estimadores

#### Justeza ou não-tendenciosidade

Seja  $\hat{\theta}$  um estimador do parâmetro  $\theta$ , e  $q$  uma estimativa. O estimador  $\hat{\theta}$  é dito justo (ou não-tendencioso) se sua média for o próprio parâmetro que se deseja estimar, ou seja,  $E[\hat{\theta}] = \theta$ .

#### Consistência

O estimador  $\hat{\theta}$  é consistente se  $\lim_{J \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \zeta) = 0$  para qualquer  $\zeta > 0$ . Em outras palavras, com amostras suficientemente grandes e um estimador consistente, pode-se tornar o erro de estimação tão pequeno quanto se queira.

Se o estimador for justo, a condição de consistência é equivalente a se ter  $\lim_{J \rightarrow \infty} \sigma^2(\hat{\theta}) = 0$ , ou seja, a variância do estimador tende a zero quando o tamanho da amostra tende a infinito.

#### Eficiência

Dados dois estimadores,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  de um mesmo parâmetro  $\theta$ , diz-se que  $\hat{\theta}_1$  é mais eficiente do que  $\hat{\theta}_2$  se para um mesmo tamanho de amostras

$$E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] < E[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]$$

Se ambos estimadores forem justos, esta condição é equivalente a dizer que a variância de  $\hat{\theta}_1$  é menor do que a variância de  $\hat{\theta}_2$ .

## 2.2 Métodos de Estimação

Nesta seção são citados dois critérios amplamente conhecidos para estimação de parâmetros, o método da máxima verossimilhança e o método de Bayes. Para facilitar a compreensão, é dado como exemplo um problema de estimação, extraído de [34] e estendido aqui para o critério máximo *a posteriori* (MAP).

### 2.2.1 Método da Máxima Verossimilhança

É um método bastante empregado que fornece, em geral, estimadores consistentes e assintoticamente eficientes.

O método consiste em estabelecer uma função de verossimilhança que expresse a probabilidade do evento observado em função do parâmetro que se deseja esti-

$\theta$	$L(\theta)$	$\theta$	$L(\theta)$
0	0	6	384/2500
1	729/2500	7	189/2500
2	1024/2500	8	64/2500
3	1029/2500	9	9/2500
4	854/2500	10	0
5	625/2500		

**Tabela 2.1:** Função de verossimilhança

mar. Assim, conhecendo o parâmetro, pode-se escrever a probabilidade de ocorrer um determinado evento, dado  $\theta$ .

Seja a probabilidade de ocorrência de um evento  $\epsilon$ , dado o parâmetro  $\theta$ ,  $P(\epsilon | \theta)$ .

Na estimação, conhecemos o evento e desejamos estimar  $\theta$ . Montamos então uma função de verossimilhança

$$L(\epsilon | \theta).$$

A estimação do parâmetro é feita através da maximização de  $L(\epsilon | \theta)$ .

### Exemplo

Suponha uma caixa contendo dez bolas, das quais  $\theta$  são pretas e  $(10 - \theta)$  são brancas. Retirando-se uma amostra de quatro bolas desta caixa, com reposição, foram verificadas três bolas brancas e uma bola preta. Passaremos então a estimar o parâmetro  $\theta$  pelo método da máxima verossimilhança.

O primeiro passo é a determinação da função de verossimilhança correspondente ao resultado amostral obtido. Esta função será dada pela probabilidade em função de  $\theta$  de, em uma amostra  $J = 4$ , extraírmos três bolas brancas e uma bola preta.

Designando por  $L(\theta)$  a função de verossimilhança

$$L(\theta) = P(\epsilon | \theta) = 4 \frac{\theta}{10} \left( \frac{10 - \theta}{10} \right)^3 = \frac{1}{2500} \theta (10 - \theta)^3 \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon$  representa a particular evidência experimental admitida neste caso.

No caso contínuo poderíamos calcular o máximo da função encontrando os nulos da derivada de  $L(\theta)$  em relação a  $\theta$ . Como estamos com um problema discreto, vamos tabelar os valores de  $L(\theta)$  para todo  $\theta$ .

Na tabela 2.1 verifica-se imediatamente que o valor que maximiza  $L(\theta)$  é  $\theta = 3$ , sendo a estimativa de  $\theta$  para o problema, ou seja,  $q$ .

### 2.2.2 Método de Bayes

Assumindo-se como modelo uma família de distribuições para a observação aleatória  $Y$ , indexadas pelo parâmetro  $\theta$  que tem valores em  $\Lambda$ , ou seja, a família  $P_\theta, \theta \in \Lambda$  onde  $P_\theta$  denota uma distribuição no espaço amostral  $\Gamma$ .

Dentro deste modelo, o objetivo do problema de estimação de parâmetros é encontrar uma função  $\hat{\theta}: \Gamma \rightarrow \Lambda$  tal que  $\hat{\theta}(y)$  é a melhor escolha para o parâmetro  $\theta$  (ou seja, o valor de  $\theta$  para o qual  $Y \sim P_\theta$ ) baseado na observação  $Y = y$ .

Para a estimativa de Bayes começamos assumindo uma função custo para a decisão sobre o parâmetro.

Supondo-se então uma função  $C: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C[q, \theta]$  é o custo de se estimar  $\theta$  como  $q$ , com  $q$  e  $\theta$  pertencentes a  $\Lambda$ .

Dada a função  $C$ , pode-se então associar um risco condicional, ou custo médio, sobre  $Y$  para cada  $\theta \in \Lambda$ :

$$R_\theta(\hat{\theta}) = E_\theta \{C[\hat{\theta}(Y), \theta]\}. \quad (2.2)$$

Adotando a interpretação de que o valor real  $\theta$  é a realização de uma variável aleatória  $\Theta$ , pode-se definir o custo médio por:

$$r(\hat{\theta}) \triangleq E \{R_\Theta(\hat{\theta})\} \quad (2.3)$$

e o objetivo é encontrar um estimador através da minimização de  $r(\hat{\theta})$ .

Notando que

$$r(\hat{\theta}) = E \{C[\hat{\theta}(Y), \Theta]\} = E \{E \{C[\hat{\theta}(Y), \Theta] | Y\}\} \quad (2.4)$$

na equação (2.4) a estimativa de Bayes de  $\theta$  pode ser encontrada minimizando-se para cada  $y \in \Gamma$ , o custo posterior, dado por  $Y=y$ :

$$E \{C[\hat{\theta}(y), \Theta] | Y = y\}. \quad (2.5)$$

Se assumirmos que  $\Theta$  tem densidade de probabilidade condicional  $p(\theta | y)$ ,

com  $Y = y$  para cada  $y \in \Gamma$ , então, a estimativa de Bayes é encontrada minimizando-se

$$\int_{\Lambda} C[\hat{\theta}(y), \theta] p(\theta | y) d\theta. \quad (2.6)$$

Diferentes funções custos podem ser utilizadas, adiante listamos as mais freqüentes:

### Mínimo erro quadrático médio

$$C[q, \theta] = (q - \theta)^2, \quad (q, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.7)$$

### Mínimo erro absoluto médio

$$C[q, \theta] = |q - \theta|, \quad (q, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.8)$$

### Máxima probabilidade *a posteriori* (MAP).

$$C[q, \theta] = \begin{cases} 0 & \text{se } |q - \theta| \leq \Delta \\ 1 & \text{se } |q - \theta| > \Delta \end{cases} \quad (2.9)$$

com  $\Delta > 0$

### Exemplo

Vamos agora resolver o mesmo problema da seção 2.2.1 através do método de Bayes.

Para estimar  $\theta$  utilizando o critério de Bayes é necessário associar uma função custo (ou de perda) ao erro da estimativa, bem como uma distribuição de probabilidade *a priori* para os possíveis valores do parâmetro  $\theta$ . Como não temos nenhuma informação a respeito da distribuição de probabilidades de  $\theta$ , iremos admiti-la equiprovável, ou seja:

$$P(\theta = i) = \frac{1}{11} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

Vamos também admitir como função custo o erro quadrático médio

$$C(\hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2.10)$$

Retomando a equação (2.1) e utilizando a fórmula de Bayes [40], temos

$$P(\theta_i | \epsilon) = \frac{P(\theta_i) \cdot P(\epsilon | \theta_i)}{P(\epsilon)} \quad (2.11)$$

onde  $P(\epsilon)$  pode ser calculada por

$$P(\epsilon) = \sum_i P(\theta_i) \cdot P(\epsilon | \theta_i). \quad (2.12)$$

Assim, substituindo-se (2.12) em (2.11) teremos

$$P(\theta_i | \epsilon) = \frac{P(\theta_i) P(\epsilon | \theta_i)}{\sum_j P(\theta_j) P(\epsilon | \theta_j)} = \frac{P(\epsilon | \theta_i)}{\sum_j P(\theta_j)} \quad (2.13)$$

já que todas as probabilidades  $P(\theta_i)$  foram admitidas iguais.

As probabilidades  $P(\epsilon | \theta_i)$  já foram calculadas na tabela 2.1 e portanto, temos diretamente que

$$\sum_i P(\epsilon | \theta_i) = \frac{4917}{2500},$$

e portanto,  $P(\theta_i | \epsilon) = \frac{2500}{4917} P(\epsilon | \theta_i)$ . Utilizando (2.1), teremos

$$P(\theta_i | \epsilon) = \frac{1}{4917} \theta_i (10 - \theta_i)^3 \quad (2.14)$$

Considerando agora o custo, para cada estimativa  $\hat{\theta}$ , *a posteriori* da verificação experimental

$$E[C(\hat{\theta} | \epsilon)] = (\hat{\theta} - \theta_i)^2 P(\theta_i | \epsilon) = \frac{1}{4917} \sum_i (\hat{\theta} - \theta_i)^2 \theta_i (10 - \theta_i)^3 \quad (2.15)$$

A tabela 2.2 ilustra o cálculo do custo médio expresso por (2.15).

Conforme a tabela 2.2, a melhor estimativa segundo o critério utilizado é  $\hat{\theta} = 3$ , ou seja, o mesmo resultado obtido na seção anterior.

É interessante notar neste ponto que, as probabilidades  $P(\theta_i | \epsilon)$  são proporcionais às probabilidades  $P(\epsilon | \theta_i)$ , isto sempre ocorre quando a distribuição de probabilidades do parâmetro que se deseja estimar é uniforme, como considerado neste exemplo. Neste caso, se assumirmos a função custo máximo *a posteriori*

$\theta_i$	$\hat{\theta} = 0$	$\hat{\theta} = 1$	$\hat{\theta} = 2$	$\hat{\theta} = 3$	$\hat{\theta} = 4$	$\hat{\theta} = 5$	$\hat{\theta} = 6$	$\hat{\theta} = 7$	$\hat{\theta} = 8$	$\hat{\theta} = 9$	$\hat{\theta} = 10$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	729	0	729	2916	6561	11664	18225	26244	35721	46656	59049
2	4096	1024	0	1024	4096	9216	16384	25600	36864	50176	65536
3	9261	4116	1029	0	1029	4116	9261	16464	25725	37044	50421
4	13824	7776	3456	864	0	864	3456	7776	13824	21600	31104
5	15625	10000	5625	2500	625	0	625	2500	5625	10000	15625
6	13824	9600	6144	3456	1536	384	0	384	1536	3456	6144
7	9261	6804	4725	3024	1701	756	189	0	189	756	1701
8	4096	3136	2304	1600	1024	576	256	64	0	64	256
9	729	576	441	324	225	144	81	36	9	0	9
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$E(C)$	14,53	8,75	4,97	3,19	3,42	5,64	9,86	16,08	24,30	34,52	46,74

Tabela 2.2: Função custo

(MAP), recairemos no caso do método de máxima verossimilhança.

### 2.2.3 Discussão

Neste trabalho estamos concentrados na estimativa de parâmetros de sinais (atrasos e amplitudes). Apesar dos exemplos das das seções 2.2.1 e 2.2.2 estarem bastante distâtes do universo estudado neste trabalho, eles são esclarecedores pois são muito simples e deles podemos traçar uma paralelo com a estimativa de parâmetros de canal.

Assim, assumindo que estejamos interessados em recuperar a informação carregada por um sinal  $s(t)$ , que foi corrompido por ruído aditivo gaussiano. O sinal recebido pode ser expresso por

$$r(t) = s(t, \Phi, \tau) + \eta(t) \quad (2.16)$$

onde  $\Phi$  e  $\tau$  representam os parâmetros de sinal a serem estimados. Para simplificação de notação, vamos denominar o vetor  $\{\Phi, \tau\}$  de  $\Psi$ .

O método da máxima verossimilhança e o método MAP, que é um caso particular do método de Bayes, são formas clássicas para estimativa de parâmetros.

No critério MAP o vetor de parâmetros é modelado como aleatório e caracterizado por uma Função Densidade de Probabilidade (FDP)  $p(\Psi)$  conhecida *a priori*. No exemplo dado, esta distribuição de probabilidades foi assumida uniforme. Já no critério de máxima verossimilhança o vetor de parâmetro de sinal é tratado como determinístico, porém, desconhecido.

Chamando de  $\mathbf{r}$  um vetor de sinal composto pelos coeficientes que represen-

tam a projeção de  $r(t)$  sobre uma base ortonormal de  $N$  dimensões, ou seja,  $\mathbf{r} \equiv [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N]$ , a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $[r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N]$  pode ser expressa por  $p(\mathbf{r} | \Psi)$ .

Assim, a estimativa de  $\Psi$  pelo método da máxima verossimilhança é o valor que maximiza  $p(\mathbf{r} | \Psi)$ . No exemplo, no lugar do vetor  $\mathbf{r}$ , tínhamos a evidência amostral  $\epsilon$  e procuramos o maior valor para  $p(\epsilon | \theta)$ .

Já com no critério MAP, procuramos o valor que maximize a função densidade de probabilidade *a posteriori*

$$p(\Psi | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \Psi)p(\Psi)}{p(\mathbf{r})}. \quad (2.17)$$

No exemplo dado, assim como na equação (2.17), maximizamos o valor  $P(\theta | \epsilon)$ .

Vale novamente lembrar que, se assumirmos  $p(\Psi)$  constante, assim como foi feito para  $P(\theta_i)$  no exemplo, o valor de  $\Psi$  que maximiza  $p(\mathbf{r} | \Psi)$  também maximiza  $p(\Psi | \mathbf{r})$ , ou seja, neste caso as estimativas por ambos critérios são idênticas.

## 2.3 Limite Inferior de Cramér-Rao

Esta seção apenas apresenta a definição do limitante inferior de Cramér-Rao, que será utilizado no capítulo 6.

Suponha que  $\hat{\theta}$  é uma estimativa do parâmetro  $\theta$  em uma família  $\{P_\theta; \theta \in \Lambda\}$  nas seguintes condições:

1.  $\Lambda$  é um intervalo aberto
2. a família  $\{P_\theta; \theta \in \Lambda\}$  tem uma correspondente família de fdp  $\{p_\theta; \theta \in \Lambda\}$
3.  $\partial p_\theta(y)/\partial \theta$  existe e é finita para todo  $\theta \in \Lambda$
4.  $\int_\Gamma h(y)p_\theta(y)\partial y/\partial \theta$  existe e é igual a  $\int_\Gamma h(y) [\partial p_\theta/\partial \theta(y)] \partial y/\partial \theta$ , para todo  $\theta \in \Lambda$ , com  $h(y) = \hat{\theta}(y)$  e  $h(y) = 1$

Então,

$$\text{var}_\theta[\hat{\theta}(Y)] \geq \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta \{ \hat{\theta}(Y) \} \right]^2}{I_\theta} \quad (2.18)$$

onde

$$I_\theta \triangleq E_\theta \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(Y) \right)^2 \right\} \quad (2.19)$$

onde  $I_\theta$  é conhecida como *informação de Fisher* para estimação de  $\theta$  a partir de  $Y$  e (2.18) é chamada de *desigualdade da informação*. No caso particular em que  $\hat{\theta}$  é justo, (2.18) reduz a

$$\text{var}_\theta[\hat{\theta}(Y)] \geq \frac{1}{I_\theta} \quad (2.20)$$

o resultado é conhecido como limitante inferior de Cramér-Rao.

Assim, dado um modelo para estimação,  $\hat{\theta}$ , a *Cramér-Rao Bound* (CRB) indica o melhor resulta que pode ser obtido para a variância do estimador.

### 3 Estimativa de Parâmetros Baseada na Decomposição em Subespaços

A estimativa de parâmetros baseada na decomposição em subespaços é uma ferramenta poderosa que pode ser utilizada em diversas aplicações dentro da área de processamento de sinais. Apesar das maiores contribuições para esta matéria voltarem-se para o problema de estimativa de direção, em inglês *direction-of-arrival* (DOA), com aplicação em radares, sonares, vigilância eletrônica, exploração sísmica e antenas inteligentes, diversas outras áreas, como identificação de sistemas, processamento de imagens, estimativa de canal e separação de sinais em comunicação sem fio podem se beneficiar com esta metodologia.

Existem basicamente três problemas relacionados em que o método pode ser aplicado. Assim, considerando-se o modelo

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{c}_i + \eta_i \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, J$$

onde  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é um vetor de dados "contaminado" por ruído o qual chamaremos de *vetor de observação*,  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  é um vetor de amplitude de sinais,  $\eta_i$  é ruído aditivo e a matriz  $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{N \times K}$  tem a estrutura

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{m}(\theta_1) \cdots \mathbf{m}(\theta_K)] \quad (3.2)$$

onde  $\{\theta_i\}$  é um parâmetro real e  $\mathbf{m}(\theta_i) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é um "vetor de transferência" entre o *i-ésimo* sinal e o vetor de parâmetros  $\theta = [\theta_1 \cdots \theta_K]^T$ .

Pode-se relacionar três possibilidades de estimação:

- a) Número de sinais,  $K$ .
- b) Amplitude do sinal,  $\mathbf{c}_i$ .

c) Vetor de parâmetros  $\theta$ .

Estes problemas são relacionados já que para a estimação do vetor de parâmetros é necessário conhecer o número de sinais,  $K$ . E, para a estimação do vetor de amplitude de sinal é necessário conhecer o vetor  $\theta$ .

O trabalho de Pisarenko [35] foi um dos primeiros métodos de decomposição em subespaços apresentados. Contudo, outros dois algoritmos, *Multiple Signal Classification* (MUSIC) e *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques* (ESPRIT) foram os que despertaram maior interesse, pelo desempenho e simplicidade computacional. Nas seções 3.2 e 3.3 estes algoritmos são detalhados.

### 3.1 Generalidades Sobre o Método de Decomposição em Subespaços

A teoria da estimação baseada na decomposição em subespaços explora propriedades geométricas do sinal medido. Desta forma, quando um sinal está confinado a um subespaço menor do que o subespaço medido, diz-se que este sinal é de *posto inferior*. O método de estimação explora esta propriedade juntamente com premissas sobre características do ruído para estimar o sinal de interesse ou parâmetros associados a este sinal.

Nos algoritmos, para garantir que o subespaço de sinal tenha dimensão menor do que o subespaço medido, impõem-se restrições à quantidade de sinais ou parâmetros que se deseja estimar. Assim, por exemplo, nas aplicações de estimativa de direção, o número de sensores deve ser maior do que o número de fontes de sinal.

O trabalho de Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [36] dividiu os algoritmos propostos até então em três classes:

1. *Subspace Fitting*

Nesta classe estão os algoritmos que buscam um vetor de sinal ortogonal ao subespaço de ruído estimado a partir dos vetores de observação. Podem ser considerados nesta classe o *MUSIC*, o *Weighted Subspace Fitting* e *Method of Direction of Arrival Estimation* (MODE).

2. *Single Shift-Invariant*

São exemplos desta classe os algoritmos *Toeplitz Approximation Method*

(TAM) e *ESPRIT*. Nestes métodos, uma invariância ao deslocamento é ‘‘forçada’’ através da imposição de uma restrição à estrutura física dos sensores que realizam as medidas.

### 3. Vetor Ortogonal

Esta técnica é relacionada com as duas estratégias anteriores já que é também baseada na invariância ao deslocamento, como o *ESPRIT*, mas pode equivalentemente ser descrita como um método que busca vetores ortogonais a um particular vetor extraído do subespaço de ruído. São exemplos desta classe os algoritmos *Min-Norm* e *AAK* (Adamjan, Arov e Krein).

Nas seções que se seguem são apresentados os algoritmos *MUSIC* e *ESPRIT*, como ilustração dos algoritmos da primeira e segunda classes descritas. Sendo a terceira classe uma intermediária entre as duas primeiras, não será descrita aqui, podendo ser encontrada nas referências [37] e [38].

## 3.2 O Algoritmo MUSIC

Schmidt [19] desenvolveu em 1977 o algoritmo *MUSIC* através de uma visão geométrica do problema de estimação de parâmetros. Até meados da década de 70 as técnicas utilizadas para DOA requeriam conhecimento analítico das características de radiação das antenas. Neste contexto, o trabalho dos projetistas de antenas estava em construir um *array* com diagramas especificados. O trabalho de Schmidt aliviou tais restrições através da redução da complexidade analítica com a calibração das antenas.

Para introdução dos conceitos do *MUSIC*, considere primeiramente o modelo livre de ruído

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{c}_i \quad (3.3)$$

Assim como em (3.1),  $\mathbf{y}_i \in \mathbf{C}^{N \times 1}$  é um vetor de dados,  $\mathbf{c}_i \in \mathbf{C}^{K \times 1}$  é um vetor de amplitude de sinais e a matriz  $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbf{C}^{N \times K}$  segue a estrutura apresentada em 3.2.

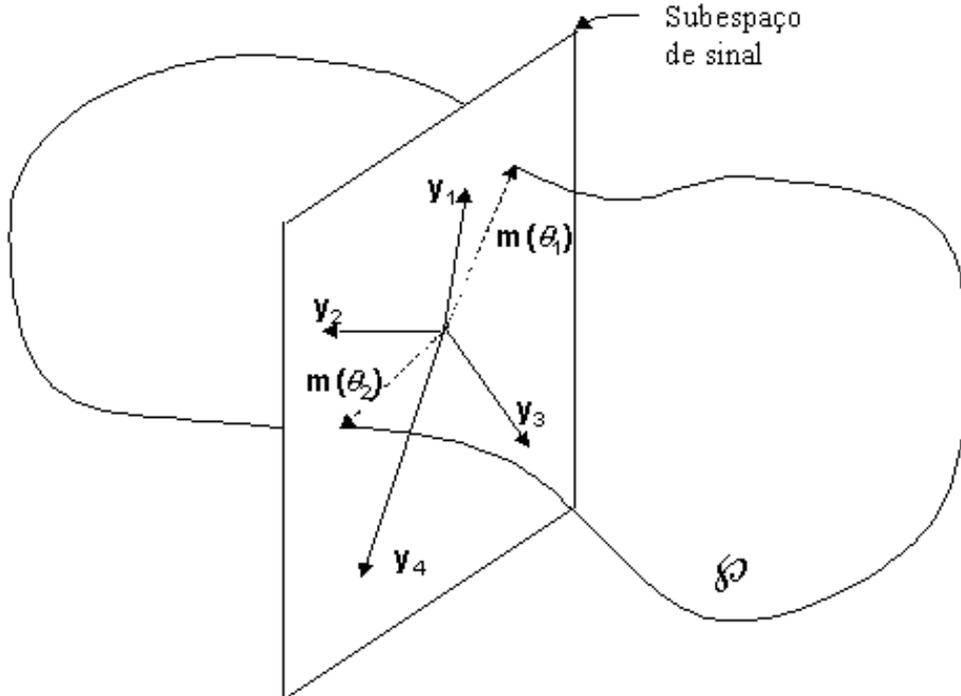
Os vetores  $\mathbf{m}(\theta_k)$ , que compõem as colunas de  $\mathbf{A}(\theta)$ , são elementos do conjunto composto por todos os vetores obtidos enquanto  $\theta$  percorre toda sua faixa de variação. Chamaremos este conjunto de  $\wp$ . Como exemplo, no caso particular da aplicação DOA para azimutes,  $\theta$  está no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e este conjunto pode

ser obtido através de calibração.

Para evitar ambiguidades, é necessário assumir que o mapeamento de  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_K]$  ao subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}(\theta)$  é unívoco. Esta propriedade pode ser garantida pelo projeto do conjunto de antenas.

Assim, sendo  $y_i = \mathbf{m}(\theta)c_i$  um modelo apropriado para um único sinal,  $y_i$  está confinado ao subespaço de dimensão unitária em  $\mathbf{C}^N$ , caracterizado pelo vetor  $\mathbf{m}(\theta)$ , enquanto, para  $K$  sinais, o vetor de observação  $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{c}_i$  está restrito ao subespaço  $K$ -dimensional em  $\mathbf{C}^N$ . Chamaremos este subespaço de *subespaço de sinal*,  $S_Y$ , gerado por  $K$  vetores  $\mathbf{m}(\theta_k)$ , colunas de  $\mathbf{A}(\theta)$ .

Com o conceito de subespaço de sinal e o conjunto  $\wp$  a visualização da solução é imediata. Assim, desconsiderando o ruído, os vetores de observação  $\mathbf{y}_i$  estão em um subespaço  $K$ -dimensional de  $\mathbf{C}^N$ . Desta forma, uma vez observados  $K$  vetores independentes,  $S_Y$  será conhecido e as intersecções entre o o subespaço observado e o conjunto  $\wp$  levam à solução do problema de determinação dos vetores  $\mathbf{m}(\theta)$ , ou seja, as colunas de  $\mathbf{A}(\theta)$ . A figura 3.1 ilustra o que foi descrito para  $K = 2$  e  $\mathbf{m}(\theta) \in \mathbb{R}^3$ .



**Figura 3.1:** Geometria do MUSIC para três sensores e duas fontes, sem ruído

Em um cenário real as medições apresentam ruído,  $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{c}_i + \eta_i$ , logo o subespaço de sinal deve ser estimado. Uma forma clássica para esta estimação seria através da maximização de uma função de verossimilhança, impondo-se que  $\hat{S}_Y$  deve ser formado por elementos de  $\wp$ , assumindo-se ruído gaussiano. Contudo,

esta formulação apresenta complexidade computacional proibitiva para a maioria das aplicações.

A idéia básica do *MUSIC* é facilitar a estimativa do subespaço de sinal através de um procedimento com dois passos. Primeiramente, busca-se um conjunto irrestrito de  $K$  vetores que melhor represente todas as medidas. Depois, dentro do subespaço gerado por estes vetores, procura-se os pontos mais próximos do conjunto  $\wp$ .

### 3.2.1 Estimando o Subespaço de Sinal

O objetivo é encontrar um conjunto de  $K$  vetores de dimensão  $\mathbb{C}^N$  que melhor represente, os vetores observados (medidos).

No parágrafo anterior, o termo ‘‘melhor representa’’ carrega a necessidade de um critério. Normalmente, o critério utilizado é o de mínimos quadrados.

Um método pode ser derivado a partir da matriz de correlação das medidas. Seja,

$$\mathbf{R} \triangleq E \{ \mathbf{y} \mathbf{y}^\dagger \} = \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.4)$$

Na expressão (3.4) foi assumido que os sinais incidentes e ruído são não correlacionados e adicionalmente, que os elementos do vetor ruído têm média zero e variância  $\sigma^2$ . Note também que a matriz  $\mathbf{R}_S = \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger$ , pode ser uma matriz diagonal, quando os sinais incidentes são completamente não correlacionados, ou singular, quando os sinais incidentes são correlacionados. Em geral,  $\mathbf{R}_S$  é positiva definida, refletindo os vários graus de correlação entre os sinais.

Um conjunto de  $K$  vetores linearmente independentes que está contido em  $S_Y$ , o subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ , é dado por  $\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_{S1}, \dots, \mathbf{v}_{SK}]$ , onde os vetores  $\mathbf{v}_{Sk}, k = 1, \dots, K$  são os autovetores correspondentes aos  $K$  maiores autovalores de  $\mathbf{R}$ .

Este fato segue diretamente da propriedade que define um autovetor, isto é,  $\mathbf{R} \mathbf{v}_{Sk} = \lambda_k \mathbf{v}_{Sk}$ , e sua ortogonalidade,  $\mathbf{V}^\dagger \mathbf{V} = \mathbf{I}$ . Onde  $\mathbf{V}$  é a matriz dos autovetores de  $\mathbf{R}$  e  $\lambda_k$  o autovalor associado ao autovetor  $\mathbf{v}_{Sk}$ . Seja  $\mathbf{\Lambda}$  a matriz dos autovalores de  $\mathbf{R}$ , então

$$\mathbf{R} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}.$$

Utilizando (3.4),

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V} + \sigma^2\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} - \sigma^2\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V}.$$

Como  $\mathbf{\Lambda}$  é uma matriz diagonal, podemos inverter sua posição na equação acima, assim,

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V}$$

considerando-se a propriedade  $\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , então

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}^{-1\dagger} [\mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{I}] \mathbf{V}^{-1}$$

da mesma propriedade dos autovetores,  $\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^{-1}$ , então

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} [\mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{I}] \mathbf{V}^\dagger. \quad (3.5)$$

Desta forma, desde que  $\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger$  seja positiva semi-definida de posto  $K$ , então os  $K$  maiores autovalores de  $\mathbf{R}$  são iguais aos  $K$  autovalores diferentes de zero de  $\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger$  aumentados de  $\sigma^2$  e portando, o subespaço gerado pelos autovetores correspondentes aos  $K$  maiores autovalores de  $\mathbf{R}$  é igual ao subespaço gerado por  $\mathbf{V}_S$  que, por sua vez, é igual ao subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ , ou seja,  $S_Y = \Re\{\mathbf{V}_S\} = \Re\{\mathbf{A}\}$ .

Similarmente, os  $N-K$  autovetores correspondentes aos menores autovalores de  $\mathbf{R}$  formam o subespaço de ruído. Chamaremos de  $\mathbf{V}_N$  uma base para este subespaço. É importante notar que estes autovalores são iguais a  $\sigma^2$  e este fato pode ser utilizado para estimar o número de sinais  $K$ .

### 3.2.2 Ortogonalidade Entre os Subespaços de Sinal e Ruído

A propriedade chave utilizada no algoritmo MUSIC é a ortogonalidade entre os subespaços de sinal e ruído.

Assim, considerando-se novamente a equação (3.4),  $\mathbf{R} \triangleq E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}$ , vimos na seção 3.2.1 que a decomposição da matriz de covariância  $\mathbf{R}$  fornecerá  $N$  autovalores, sendo que destes,  $K$  são maiores do que  $\sigma^2$ , correspondentes ao sinal e  $N-K$  iguais a  $\sigma^2$ , correspondentes ao ruído.

Retomando  $\mathbf{V}_S$  e  $\mathbf{V}_N$

$$\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_{S1}, \dots, \mathbf{v}_{SK}] \quad (N \times K)$$

$$\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_{N1}, \dots, \mathbf{v}_{N(N-K)}] \quad (N \times (N - K))$$

observando a propriedade de definição de autovalor:

$$\mathbf{R}\mathbf{V}_N = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V}_N + \sigma^2\mathbf{V}_N = \sigma^2\mathbf{V}_N \quad (3.6)$$

O que implica imediatamente que,

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V}_N = 0 \quad (3.7)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{m}^\dagger(\theta)\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^\dagger\mathbf{m}(\theta) = 0 \quad (3.8)$$

para  $\theta = \theta_1, \dots, \theta_K$

### 3.2.3 Estimando Parâmetros do Sinal

Na seção 3.2.1 foi visto que é possível encontrar o subespaço de sinal e o subespaço de ruído através da decomposição em autovalores e autovetores da matriz de covariância  $\mathbf{R}$ . Adicionalmente, na seção 3.2.2 foi demonstrado que estes subespaços de sinal e ruído, são ortogonais entre si, ou seja,  $\mathbf{V}_S\mathbf{V}_N = 0$ .

Com estas propriedades e considerando-se a distância Euclidiana entre os subespaços,  $d^2 = \mathbf{m}^\dagger(\theta)\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^\dagger\mathbf{m}(\theta)$ , conforme equação (3.8), pode-se plotar a função  $1/d^2$  para todos os vetores  $\mathbf{m}(\theta)$  em  $\wp$ . Ou seja,

$$P_{MU}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{m}^\dagger(\theta)\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^\dagger\mathbf{m}(\theta)} \quad (3.9)$$

Em ambientes sem ruído o resultado desta métrica é infinito para elementos de  $\varphi$  pertencentes a  $\mathbf{V}_S$ . Contudo, em ambientes reais, isto é, com ruído, não trabalharemos com  $\mathbf{V}_S$ , mas com sua estimativa,  $\hat{\mathbf{V}}_S$ .

Além, disso, normamente não dispomos da matriz  $\mathbf{R}$ , mas de sua estimativa,

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger \quad (3.10)$$

Assim, em presença de ruído, a métrica  $P_{MU}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{m}^\dagger(\theta) \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{m}(\theta)}$  produz picos nos pontos em que  $\hat{S}_Y$  está próximo de  $\varphi$  e portanto, ortogonal a  $\hat{S}_N$ .

O algoritmo *MUSIC* aplicado à estimativa de parâmetros, pode, portanto, ser resumido nos seguintes passos:

1. Coletar dados e estimar  $\mathbf{R}$ ;
2. Resolver a equação,  $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{V}$ , isto é, decompor  $\mathbf{R}$  em autovalores e autovetores;
3. Estimar o número de sinais  $K$ ;
4. Encontrar  $S_Y$  e  $S_N$ ;
5. Avaliar  $P_{MU}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{m}^\dagger(\theta) \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{m}(\theta)}$ ;
6. A estimativa de parâmetros correspondem aos  $K$  maiores picos obtidos no item anterior.

### 3.3 O Algoritmo ESPRIT

O algoritmo *ESPRIT*, assim como o *MUSIC*, explora a ortogonalidade entre os subespaços de sinal e ruído para a obtenção de estimativas de parâmetros. No entanto, com a finalidade de redução da complexidade computacional, o *ESPRIT* impõe uma restrição adicional à construção dos vetores de observação.

Para simplificar a descrição das idéias básicas do *ESPRIT*, assim como no artigo de R. Roy [20], pautaremos a discussão do algoritmo na resolução do problema de estimativa DOA, concentrando-nos apenas na estimação de azimute. Contudo, o algoritmo pode ser aplicado a uma grande variedade de problemas de estimativas em que a restrição de deslocamento, que será apresentada adiante, é encontrada ou pode ser construída.

### 3.3.1 Geometria dos Sensores e Modelamento

Nas aplicações DOA, dados de um conjunto de sensores (*antenna array*) são coletados e o objetivo é localizar a direção das fontes que estão radiando energia. Assume-se aqui, obviamente, que a energia radiada pode ser detectada pelos sensores.

Para esta aplicação algumas premissas devem ser assumidas a fim de que o problema possa ser tratado analiticamente:

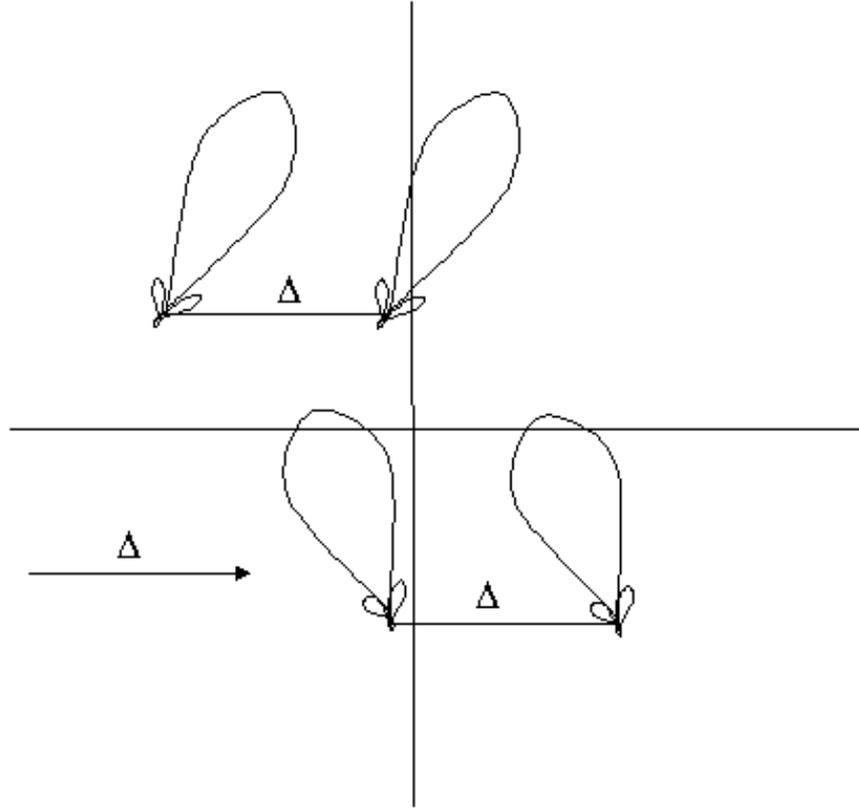
- O meio de transmissão é assumido isotrópico e não dispendioso, de forma que a propagação se dá em linhas retas;
- As fontes devem estar no campo distante das antenas, para que se possa considerar as frentes de onda que atingem os sensores como planas;
- Os sinais emitidos pelas fontes são de banda estreita, ou seja, a banda do sinal é estreita em relação à frequência de portadora e portanto, a resposta do sensor não é função da frequência em toda a banda do sinal.

Como os sinais são banda estreita, com frequência central  $\omega_0$ , o  $i$ -ésimo sinal pode ser escrito como  $s_i(t) = c_i(t)\cos(\omega_0 t + v_i(t))$ , onde  $c_i(t)$  e  $v_i(t)$  são funções que variam lentamente com o tempo e definem amplitude e fase de  $s_i(t)$  respectivamente.

Utilizando a notação  $s_i(t) = \text{Re} \{s(t)\}$ , onde  $s(t) = c(t)e^{j(\omega_0 t + v(t))}$ , se tivermos  $c(t) \approx c(t - \tau)$  e  $v(t) \approx v(t - \tau)$  para um pequeno atraso de propagação  $\tau$ , o efeito do atraso na forma de onda recebida é simplesmente um deslocamento de fase, isto é,  $s(t - \tau) \approx s(t)e^{-j\omega_0 \tau}$ .

A restrição imposta pelo algoritmo *ESPRIT* à estrutura do aparato de antenas é que este seja composto de  $N$  duplas de sensores, vide figura 3.2. Os elementos de cada dupla têm características idênticas e são separados por um vetor de deslocamento, conhecido e constante,  $\Delta$ . Com exceção da restrição elementar de que todos os sensores devem ter sensibilidade não nula em todas as direções de interesse, nenhuma outra restrição é imposta.

Assumindo-se que existem  $K$  fontes centradas na frequência  $\omega_0$  atendendo às premissas apresentadas, radiando um sinal aleatório estacionário de média zero ou um sinal determinístico. Assumindo-se também que estará presente nos  $2N$  sensores ruído aditivo de média zero e variância  $\sigma^2$ , pode-se descrever matemati-



**Figura 3.2:** Geometria dos sensores para aplicação *DOA* utilizando *ESPRIT*

camente o efeito da invariância à translação do sistema de antenas na forma que se segue.

Vamos dividir o aparato de antenas em dois,  $Z_X$  e  $Z_Y$ , idênticos em todos os aspectos, embora dispostos fisicamente com deslocamento  $\Delta$ . O sinal recebido na  $i$ -ésima dupla pode ser expresso por

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) m_i(\theta_k) + \eta_{x_i}(t) \quad (3.11)$$

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) e^{j\omega_0 \Delta \sin \theta_k / c} m_i(\theta_k) + \eta_{y_i}(t) \quad (3.12)$$

onde  $\theta_k$  é a direção do sinal recebido da  $k$ -ésima fonte, relativa à direção do vetor de deslocamento  $\Delta$  e  $c$  a velocidade de propagação da onda plana.

Uma vez que ganho e fase dos sensores são arbitrários e como o *ESPRIT* não requer nenhum conhecimento sobre a sensibilidade destes sensores, então o vetor  $\Delta$  estabelece uma escala e, como já foi dito, uma referência de direção. Decorrente disso, advém a necessidade de um vetor  $\Delta$  para cada parâmetro que

se deseja estimar.

Combinando as saídas de cada um dos sensores em dois aparatos, os vetores de dados pode ser escritos conforme segue,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \eta_x(t) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\Phi\mathbf{s}(t) + \eta_y(t) \quad (3.14)$$

onde o vetor  $\mathbf{s}(t)$  tem dimensão  $K \times 1$ , formado por  $K$  frentes de onda, conforme observado no sensor de referência,  $Z_X$ . Os sinais podem apresentar alguma correlação, ou seja,  $E\{s_i(t)s_j^\dagger(t)\} \neq 0$  para  $i \neq j$ , embora o caso de fontes completamente correlacionadas não seja considerado aqui.

A matriz  $\Phi$  é diagonal de dimensão  $K$  e é formada pelos atrasos de fase entre as duplas de sensores,

$$\Phi = \text{diag}\{e^{j\gamma^1}, \dots, e^{j\gamma^K}\} \quad (3.15)$$

onde  $\gamma_k = \omega_o \Delta \text{sen} \theta_k / c$ ,  $c$  é a velocidade de propagação da onda plana. O operador  $\Phi$  é uma matriz unitária que relaciona as medidas de  $Z_X$  com aquelas de  $Z_Y$ . Por apresentar a mesma forma de um operador de rotação em duas dimensões, a matriz  $\Phi$  recebeu o nome de *operador rotação*, origem do termo *rotational* no acrônimo *ESPRIT*.

A natureza unitária de  $\Phi$  é uma consequência da premissa de onda plana de banda estreita.

Definindo-se  $\mathbf{z}(t)$ ,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_z(t) \quad (3.16)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x(t) \\ \mathbf{n}_y(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A estrutura de  $\bar{\mathbf{A}}$  é utilizada para obtenção de estimativa dos elementos de  $\Phi$  sem conhecimento de  $\mathbf{A}$ .

O algoritmo *ESPRIT* tem como idéia básica explorar a invariância rotacional do subespaço de sinal induzida pela invariância à translação do aparato de sensores.

O subespaço de sinal é aquele que contém medidas do conjunto de duplas de sensores,  $Z_X$  e  $Z_Y$ . A amostragem simultânea conduz a dois conjuntos de vetores,  $\mathbf{V}_X$  e  $\mathbf{V}_Y$ , que são, idealmente, geradores do mesmo subespaço.

Na ausência de ruído, o subespaço de sinal pode ser obtido coletando-se um número suficiente de medidas e procurando-se dentro destas medidas qualquer conjunto linearmente independente de  $K$  vetores, os quais, como  $\bar{\mathbf{A}}$ , geram um subespaço de dimensão  $K$  em  $\mathfrak{C}^N$ .

Assim como no algoritmo *MUSIC*, o subespaço de sinal pode ser obtido do conhecimento da matriz de covariância das medidas,  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_S\bar{\mathbf{A}}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}$ . Conforme discussão da seção 3.2.1, com  $K \leq N$ , os  $(2N - K)$  menores autovalores de  $\mathbf{R}$  são iguais a  $\sigma^2$ . Os autovetores  $\mathbf{V}_S$  relacionados aos  $K$  maiores autovalores são utilizados para obter o subespaço de sinal.

Como o subespaço gerado por  $\mathbf{V}_S$  é igual ao subespaço gerado pelos vetores de  $\bar{\mathbf{A}}$ , deve existir um operador não singular  $\mathbf{T}$  tal que

$$\mathbf{V}_S = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} \quad (3.18)$$

ainda, a estrutura do aparato de antenas implica em  $\mathbf{V}_S$  poder ser decomposta em  $\mathbf{V}_X \in \mathfrak{C}^{(N \times K)}$  e  $\mathbf{V}_Y \in \mathfrak{C}^{(N \times K)}$  tal que,

$$\mathbf{V}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_X \\ \mathbf{V}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

de onde observa-se facilmente que o subespaço gerado por  $\mathbf{V}_X$  é igual ao subespaço gerado por  $\mathbf{V}_Y$ , e ambos são iguais ao subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ .

Como as colunas de  $\mathbf{V}_X$  e  $\mathbf{V}_Y$  geram o mesmo subespaço, então o posto da matriz

$$\mathbf{V}_{XY} \triangleq [\mathbf{V}_X \quad \mathbf{V}_Y] \quad (3.20)$$

é  $K$ , e portanto, existe uma matriz  $\mathbf{F}$ , de posto  $K$ ,  $\mathbf{F} \in \mathfrak{C}^{2K \times K}$  tal que:

$$[\mathbf{V}_X \ \mathbf{V}_Y] \mathbf{F} = \mathbf{V}_X \mathbf{F}_X + \mathbf{V}_Y \mathbf{F}_Y = 0$$

Considerando-se (3.19), segue que

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{F}_X + \mathbf{A} \Phi \mathbf{T} \mathbf{F}_Y = 0 \quad (3.21)$$

ou seja,  $\mathbf{F}$  gera o espaço nulo de  $\mathbf{V}_{XY}$ . Definindo

$$\Psi \triangleq -\mathbf{F}_X [\mathbf{F}_Y]^{-1} \quad (3.22)$$

a equação (3.21) pode ser rearranjada chegando a

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \Psi = \mathbf{A} \Phi \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A} \Phi \quad (3.23)$$

Assumindo-se que  $\mathbf{A}$  tem posto máximo, então

$$\mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \Phi \quad (3.24)$$

portanto, os autovalores de  $\Psi$  são iguais aos elementos da diagonal principal de  $\Phi$  e as colunas de  $\mathbf{T}$  são os autovetores de  $\Phi$ .

A equação (3.24) é a principal relação no desenvolvimento do algoritmo *ESPRIT* e suas propriedades.

Comparando-se as equações (3.19) e (3.24) é fácil notar que o operador  $\Phi$  mapeia o conjunto de vetores  $\mathbf{V}_X$  no conjunto  $\mathbf{V}_Y$ , ou seja,  $\mathbf{V}_Y = \mathbf{V}_X \Phi$ .

### 3.3.2 Estimando o Operador de Rotação de Subespaço

Em situações práticas teremos um número finito de medidas "contaminadas" por ruído, logo, estimando-se  $\mathbf{V}_S$  à partir da matriz de covariância das medidas,  $\hat{\mathbf{R}}$ , não teremos o subespaço de sinal, mas apenas uma estimativa. Adicionalmente, o subespaço gerado por  $\mathbf{V}_X$  será diferente do subespaço gerado por  $\mathbf{V}_Y$  e desta forma, é impossível encontrar o operador  $\Phi$  tal que  $\mathbf{V}_Y = \mathbf{V}_X \Phi$ .

É necessário formular um critério para encontrar-se uma estimativa de  $\Psi$ . Regularmente emprega-se o critério dos mínimos quadrados (*least-squares, ou LS*). Contudo, aplicado ao modelo  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$  quando  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são "contaminados"

por ruído, o método dos mínimos quadrados conduz a estimativas viciadas, e já que  $\mathbf{V}_X$  e  $\mathbf{V}_Y$  possuem uma parcela de ruído, o método dos mínimos quadrados é impróprio.

Um critério que assume presença de ruído em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é o *Total Least-Squares* (TLS)[39], sendo portanto, mais indicado neste caso.

### 3.3.3 Sumário do Algoritmo ESPRIT

Utilizando-se a matriz de covariância e o método *TLS* para estimativa de  $\Phi$ , o algoritmo *ESPRIT* aplicado à estimativa *DOA* pode ser sumarizado conforme segue:

1. Obter uma estimativa de  $\mathbf{R}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}$ , a partir das medidas  $\mathbf{Z}$ ;
2. Decompor  $\hat{\mathbf{R}}$  em autovalores e autovetores, ou seja, encontrar  $\bar{\mathbf{V}}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  tal que

$$\hat{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}\mathbf{\Lambda}$$

onde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}\}$ , com  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{2N}$ , e  $\bar{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2N}]$ ;

3. Estimar o número de fontes  $\hat{K}$ ;
4. Estimar o subespaço de sinal e decompô-lo para obtenção de  $\mathbf{V}_X$  e  $\mathbf{V}_Y$ , ou seja:

$$\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_{S1}, \dots, \mathbf{v}_{S2N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_X \\ \mathbf{V}_Y \end{bmatrix}$$

5. Computar a decomposição

$$\mathbf{V}_{XY}^\dagger \mathbf{V}_{XY} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}_X^\dagger \\ \mathbf{V}_Y^\dagger \end{bmatrix} [\mathbf{V}_X \ \mathbf{V}_Y] = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\dagger$$

e a partição de  $\mathbf{V}$  em blocos de dimensão  $\hat{K} \times \hat{K}$ ,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}$$

6. Calcular os autovalores de  $\mathbf{\Psi} = -\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}$ ,

$$\hat{\phi}_k = \lambda_k \left( -\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1} \right), \quad \forall k = 1, \dots, \hat{K}.$$

7. Estimar  $\theta = f^{-1}(\hat{\phi}_k)$ . Para a aplicação *DOA*,

$$\hat{\theta}_k = \text{sen}^{-1} \left\{ c \arg \left( \hat{\phi}_k \right) / (\omega_0 \Delta) \right\} \quad (3.25)$$

## 4 Estimativa de Parâmetros em Sistemas DS-CDMA

Em sistemas de comunicação digitais, a saída do demodulador deve ser amostrada periodicamente, no mínimo, uma vez a cada símbolo a fim de recuperar-se a informação transmitida.

Uma vez que o atraso de propagação entre transmissor e receptor geralmente não é conhecido, este atraso deve ser estimado de alguma maneira, para que se possa amostrar sincronamente a saída do demodulador.

O atraso de propagação também resulta em uma diferença de fase entre a portadora do sinal e o oscilador local do receptor, a qual também deve ser estimada.

A fase de portadora, a princípio, está relacionada ao atraso de propagação, ou seja, chamando de  $\tau$  o atraso, a fase de portadora seria  $\Phi = -2\pi f_c \tau$ , porém, não basta estimar o atraso para se calcular a fase de portadora já que normalmente o oscilador do receptor não está sincronizado com o oscilador do transmissor. Além disso, estes osciladores podem apresentar pequenos desvios de frequência com o tempo e a necessidade de precisão nas estimativas também são diferentes, já que a frequência de portadora é geralmente muito maior do que a taxa de símbolos. Desta forma, pode-se afirmar que a fase de portadora não é apenas função do atraso de propagação, portanto, deve ser estimada.

Este capítulo apresenta uma rápida discussão sobre a necessidade de estimação destes parâmetros em DS-CDMA, considera as dificuldades para estimação inerentes ao meio de propagação (*fading*) e comenta as técnicas mais utilizadas para estas estimativas.

O problema de estimação de fase de portadora não faz parte do escopo deste trabalho. Existem diversas referências que tratam deste assunto, vide [40] por exemplo, seja através de da inserção de um piloto e uso do *Phase-Locked Loop* (PLL), seja através da estimação diretamente do sinal modulado. Nesta

dissertação nos concentraremos na estimação do atraso de propagação e amplitude de sinal.

## 4.1 A necessidade de Estimativa de Parâmetros em DS-CDMA

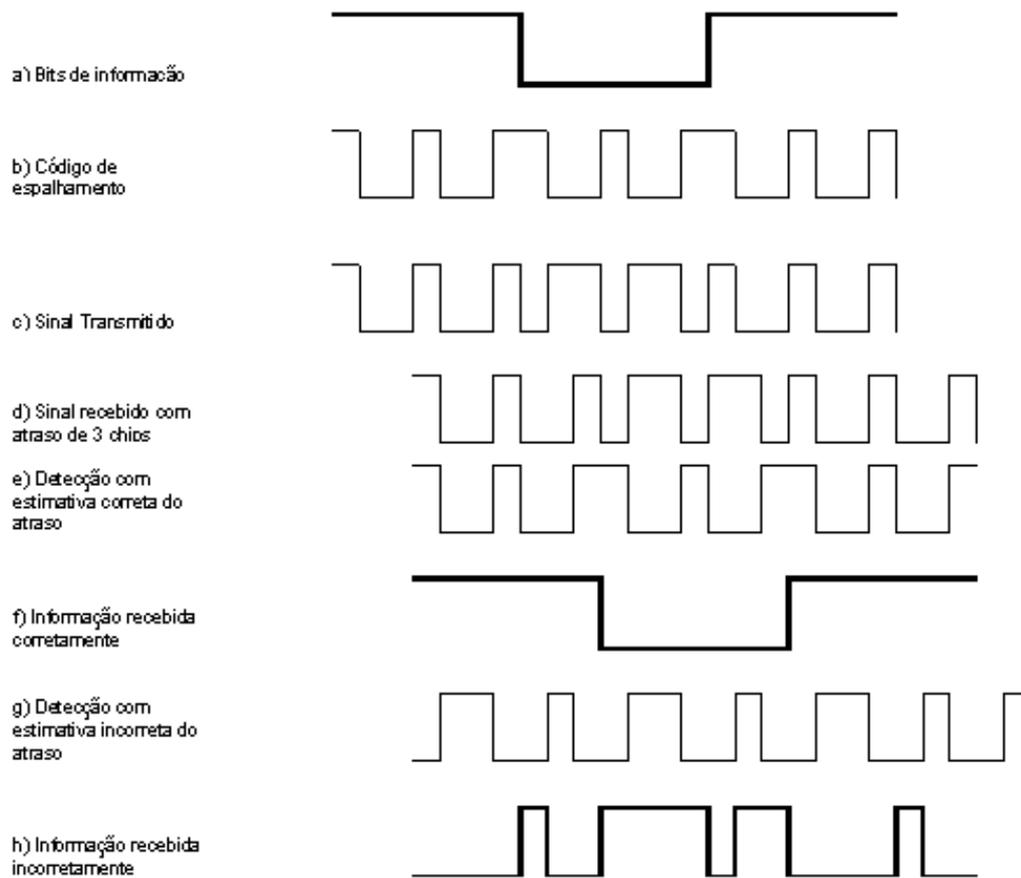
Nos sistemas DS-CDMA, a detecção da informação envolve a correlação do sinal recebido com uma cópia do código de espalhamento. Para que esta correlação obtenha o resultado desejado é necessário que a cópia do código do usuário utilizada no receptor esteja perfeitamente alinhada com o código recebido. Porém, os sistemas DS-CDMA são inerentemente assíncronos na transmissão móvel-ERB, logo, é necessário que os receptores possuam um sistema de estimativa preciso para os atrasos. Um erro nesta estimativa compromete a detecção da informação, como pode ser verificado na figura 4.1. Na figura, em "e" a estimativa precisa resultou em detecção correta da informação em "f". Em "g", a estimativa incorreta, adiantada em três chips, causou falha na detecção da informação.

Quando se trata de detetores multiusuários (MuD), a necessidade de estimativa de parâmetros fica ainda mais complexa pois além de atrasos, é necessário estimar-se corretamente a amplitude do sinal recebido. No decodificador sucessivo [8] da figura 4.2, o "usuário 1" é decodificado de forma convencional, tratando todos os demais usuários como ruído. A informação novamente codificada é subtraída do sinal recebido  $s(t)$ . O processo é repetido até que as informações de todos os usuários tenham sido decodificadas.

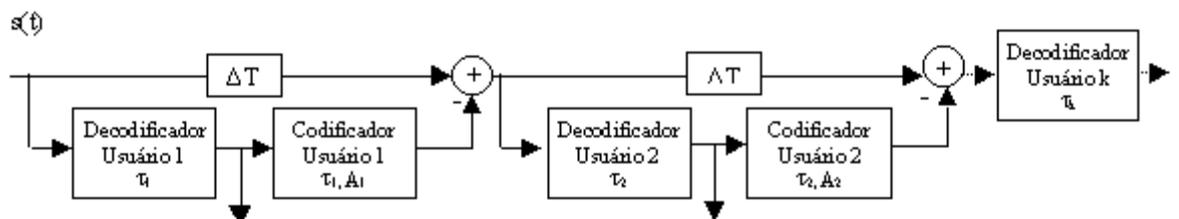
O exemplo de decodificador sucessivo apresentado deixa claro que para o correto funcionamento é necessário que os parâmetros de atraso e amplitude do sinal de cada usuário ( $\tau_k$  e  $A_k$ ) tenham sido corretamente estimados, além dos próprios bits de informação, caso contrário, o resultado obtido no primeiro decodificador pode piorar o desempenho dos demais.

## 4.2 Problemas que Dificultam as Estimativas

A transmissão de sinais sem fio é dificultada por problemas inerentes ao meio de propagação, como alta atenuação e desvanecimento, e ao acesso compartilhado, como interferência. A seguir são resumidamente descritos os principais tipos de desvanecimento e interferência de múltiplo acesso.



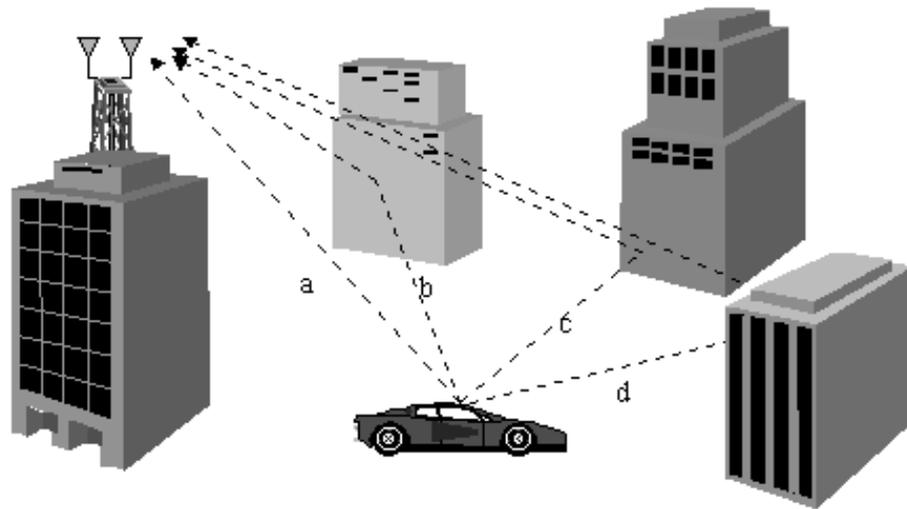
**Figura 4.1:** A correta estimativa do atraso de um usuário é fundamental na detecção da informação



**Figura 4.2:** Decodificador sucessivo

### 4.2.1 Multipercurso

O sinal transmitido é refletido por vários obstáculos, fixos ou móveis, e portanto, é recebido através de caminhos diferentes, gerando múltiplas cópias do mesmo sinal. A figura 4.3 ilustra a geração de multipercursos. Nesta figura, a estação rádio-base recebe múltiplas cópias do mesmo sinal, através de um caminho direto (a) e por reflexão em obstáculos (b, c e d).



**Figura 4.3:** Multipercurso

Estas múltiplas cópias possuem atrasos, fases e atenuações diferentes e dependendo destes fatores podem somar-se de forma construtiva ou destrutiva, sendo um dos principais fatores geradores do que é chamado de *short-term* ou *small-scale fading*.

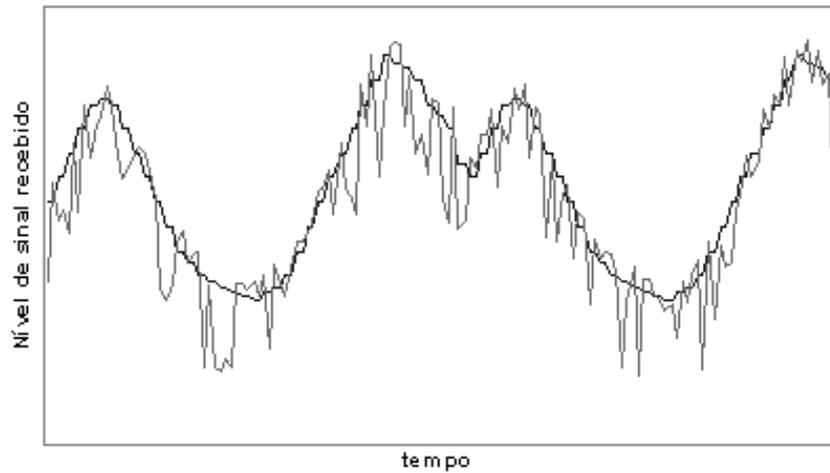
Enquanto o desvanecimento *short-term* apresenta variações rápidas e muito fortes, o desvanecimento *long-term* ou *large-scale fading*, que é relacionado às alterações de relevo, gera variações lentas no nível de sinal. A figura 4.4 mostra a sobreposição destes dois tipos de desvanecimentos presentes nas comunicações sem fio.

#### 4.2.1.1 Classificações do *Short-Term Fading*

##### Quanto à resposta em frequência do canal

##### Desvanecimento *flat*

O desvanecimento é denominado *flat* quando se puder considerar que o ganho é constante e a resposta em fase linear na banda do canal, quando esta é maior do que a banda do sinal transmitido. Neste caso, toda a característica do espectro



**Figura 4.4:** Sobreposição de desvanecimentos

do sinal transmitido é preservada.

Desvanecimento seletivo em frequência

Já no desvanecimento seletivo em frequência o espectro do sinal transmitido é distorcido. Embora o desvanecimento *flat* seja um modelo muito utilizado, na maioria das aplicações móveis sem fio prevalece o desvanecimento seletivo em frequência.

**Quanto à variação do canal**

Desvanecimento lento

O desvanecimento *short-term* pode também ser classificado em rápido ou lento, dependendo da variação da resposta ao impulso do canal. Quando o canal puder ser considerado estático durante alguns símbolos, recebe a classificação de canal com desvanecimento lento.

Desvanecimento rápido

Quando a resposta ao impulso do canal varia dentro do intervalo de um símbolo, então o canal é considerado de desvanecimento rápido.

A ocorrência de desvanecimentos, principalmente os desvanecimentos rápidos são um desafio ao problema da estimativa de parâmetros do canal.

Neste trabalho o canal será considerado de desvanecimento lento, ou seja, estático durante o intervalo de um símbolo.

### 4.2.2 Interferência de Múltiplo Acesso e o Efeito *Near-Far*

Em DS-CDMA o sinal recebido é composto pela superposição dos sinais transmitidos por diferentes usuários de forma assíncrona no sentido móvel-ERB. O efeito *near-far* aparece quando os sinais destes usuários chegam no receptor com diferentes níveis de potência. Desta forma, um usuário em baixa potência pode não ser detectado devido à presença de outros usuários com maior nível de sinal.

Sistemas CDMA convencionais, que tratam o problema de estimativa de atrasos utilizando o *sliding correlator*, vide seção 4.4, apresentam estimativa susceptível à presença de interferência gerada por outros usuários. Este trabalho apresenta uma proposta de estimativa resistente ao efeito *near-far*.

## 4.3 O Contexto de Estimativas de Parâmetros de Canal

A forma mais antiga, porém, ainda usual para estimativa de atrasos é o *sliding correlator* [10]. É um método de baixa complexidade para apenas um usuário. Apesar de não ser resistente ao efeito *near-far*, o desempenho é razoável em ambiente multiusuários se as potências recebidas forem similares (utilização de controle de potência). A seção 4.4 detalha um pouco mais o circuito.

Na segunda metade da década de 80, com o crescente interesse pela teoria dos receptores multiusuários após a publicação do trabalho de Verdú, começou a crescer também o interesse pela estimativa de parâmetros, já que grande número de trabalhos que se seguiram necessitavam de estimativas precisas de amplitudes, fases e atrasos.

Em 1988, Poor [11] propôs a detecção e estimativa conjunta de parâmetros para todos os usuários. Este método considera como métrica uma função de máxima verossimilhança dependente dos parâmetros de canal e da seqüência de bits transmitidos. A detecção é realizada através de uma busca exaustiva sobre uma árvore de decisão que cresce exponencialmente com o número de usuários e com o número de bits transmitidos. Apesar do ótimo desempenho, devido a complexidade computacional, não constitui uma solução prática para o problema. É importante notar que a complexidade deste algoritmo pode ser reduzida através da transmissão periódica de uma seqüência de treinamento, o que seria equivalente a fixar o caminho na árvore de busca. Porém, esta alternativa deve considerar

o canal invariante entre os intervalos de envio das seqüências de treinamento e, adicionalmente, considerar conhecido o atraso de cada usuário, uma vez que a seqüência de bits analisada na árvore de decisão é uma seqüência composta, ou seja, a soma das seqüências de  $K$  usuários. Esta técnica é apresentada na seção 4.5.

Outros trabalhos de semelhante complexidade podem ser relatados, vide [12].

Dois trabalhos publicados em 1993 apresentaram algoritmos subótimos para o problema de detecção e estimativa conjunta de parâmetros [13] e [14]. Em [13] os autores propõem uma forma de redução da árvore de busca citada anteriormente. Basicamente, sugerem que quando a árvore atingir um número pré-fixado de  $L$  nós, a próxima iteração gera  $2L$  nós e então, ao invés de deixar a árvore crescer exponencialmente, utiliza-se a métrica baseada na função de verossimilhança para identificar dentre os  $2L$  nós, quais os  $L$  nós com maior probabilidade de conter a seqüência. Maiores detalhes são apresentados na seção 4.6.

Entre os primeiros trabalhos que fugiram da tendência de detecção e estimativa conjunta de todos os usuários pode-se citar Bensley e Aazhang [15], e Ström, Parkvall, Miller e Ottersten [18]. Estes artigos propõem uma adaptação de algoritmos inicialmente utilizados na estimativa de ângulos nas aplicações *DOA*. O método baseado nos algoritmos expostos no capítulo 3, utiliza a partição do espaço de observação em um subespaço de sinal e outro de ruído, sem conhecimento *a priori* dos vetores de sinal, utilizando-se da decomposição da matriz de correlação em autovalores e autovetores. A técnica, a partir desta época, ficou conhecida como "*Subspace-based channel estimation*". Algoritmos como o *MUSIC* (*Multiple Signal Classification*) [19] e *ESPRIT* (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques*) [20] são utilizados dentro desta técnica. Posteriormente o conceito foi estendido para canais com multipercorso e atrasos variantes com o tempo [9].

Em 1998, Bensley e Aazhang [16] sugerem uma estimativa baseada em máxima verossimilhança. Neste trabalho, o problema de otimização multidimensional, apresentado anteriormente com a técnica de detecção e estimativa conjunta, foi reduzido a uma dimensão. A motivação é que em várias aplicações se está interessado em apenas um usuário, ou pelo menos, se forem vários usuários, pode-se reduzir a complexidade do problema tratando-se cada um seqüencialmente. O artigo modela a MAI como ruído colorido não Gaussiano. Apresenta excelente desempenho, mas a desvantagem do método está na necessidade do uso de seqüências de treinamento. Em 2001 o trabalho foi estendido para a inclusão de

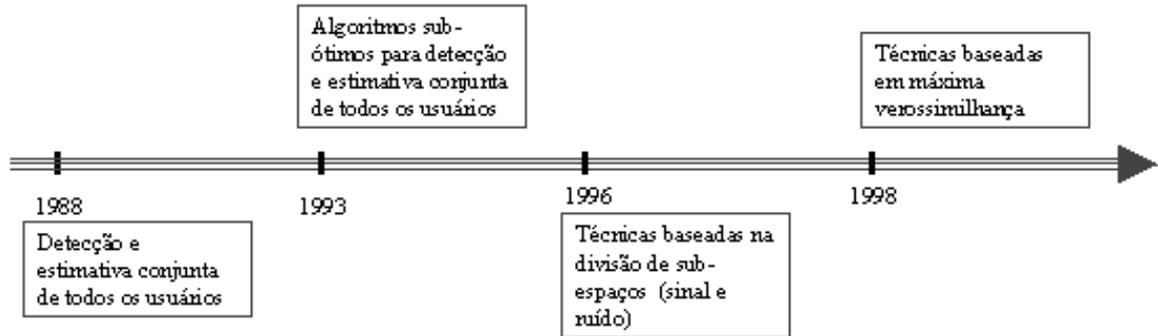


Figura 4.5: Resumo histórico

múltiplos sensores (*antenna array*) na estação rádio-base [17] e lança a idéia de se usar a resposta ao impulso do canal diretamente no processo de detecção da informação.

A figura 4.5, apresenta um resumo histórico.

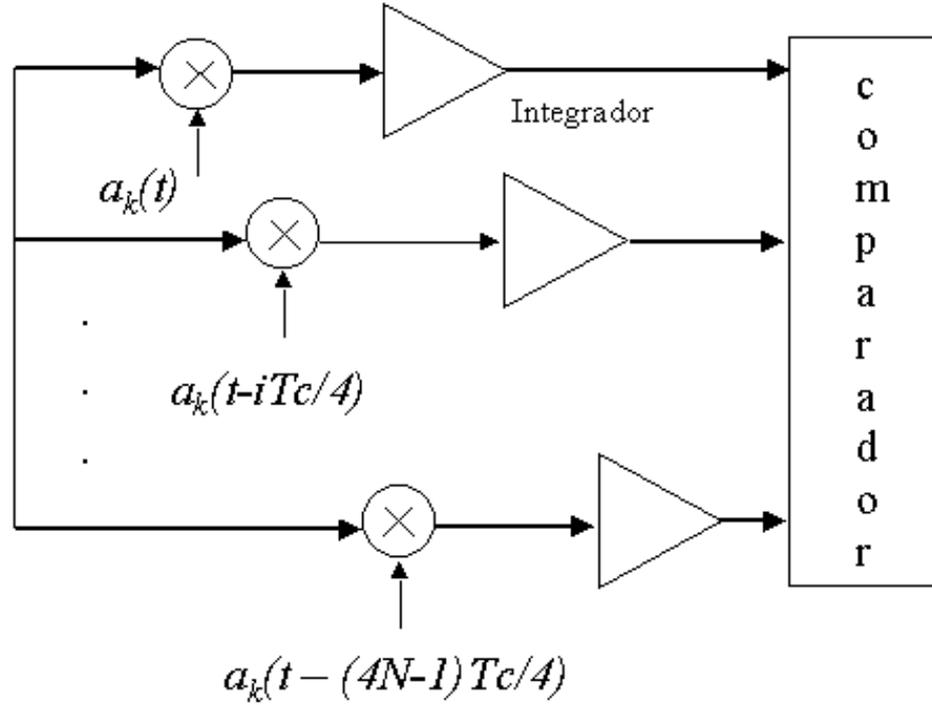
## 4.4 Correlator de Escorregamento ou *Sliding Correlator*

No *sliding correlator* o sinal recebido é multiplicado por cópias do código de espalhamento geradas localmente. Estas cópias são equiespaçadas de um chip ou uma fração menor (no simulador desenvolvido para este trabalho foi utilizado um quarto de chip), o atraso correspondente à maior correlação na saída é o atraso estimado. A figura 4.6 ilustra o processo com deslocamento de um quarto de chip.

Como os códigos de usuários são normalmente bastante longos, o circuito da figura não é viável para implementação prática, portanto, normalmente utiliza-se, ao invés de vários correladores em paralelo, um único correlator que assume uma deslocamento da seqüência durante um número fixo de chips, armazena o resultado da correlação, desloca a seqüência e repete o processo. Após armazenar os resultados de todas as correlações possíveis, compara os valores e decide pelo maior, conforme figura 4.7. Desta forma, o circuito reduz o número de elementos, porém, exige um tempo maior para encontrar o melhor deslocamento.

Na figura 4.7 o deslocamento também é de um quarto de chip.

A precisão de estimação do atraso no *sliding correlator* depende da fração de chip do deslocamento, assim, se o deslocamento for de  $\frac{T_c}{2}$  o erro estará no intervalo  $0 \leq |\hat{\tau} - \tau| \leq \frac{T_c}{4}$  e, admitindo-se uma distribuição uniforme entre estes



**Figura 4.6:** *Sliding correlator* (paralelo) [ $N$ =comprimento da seqüência de espalhamento]

valores, o erro médio será  $\frac{T_c}{8}$ .

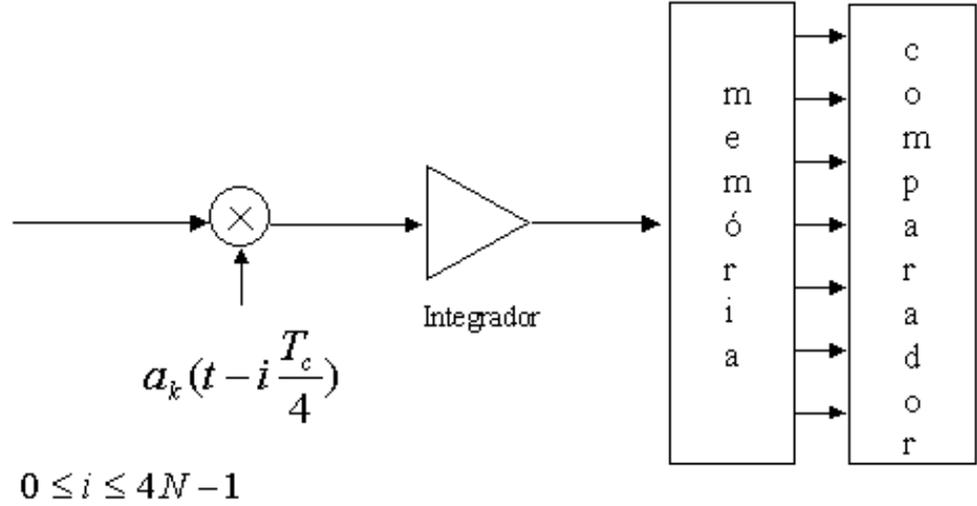
## 4.5 Detecção e Estimativa Conjunta

O problema de detecção e estimativa conjunta tratado por Poor [11], Miller e Schwartz [31] e outros, pode ser descrito com a formulação apresentada adiante. Estes trabalhos trataram apenas da estimação de amplitudes e detecção da informação, assumindo-se conhecidos os demais parâmetros.

O sinal recebido de  $K$  usuários ativos pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
 r(t) &= s(t, \mathbf{d}) + \eta_t = \sum_{k=1}^K s_k(t) + \eta_t \\
 &= \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \sqrt{2P_k} e^{j\phi_k} d_k(i) a_k(t - iT - \tau_k) + \eta_t \\
 &= \sum_{m=1}^{(M+1) \times K} A_k d_{k(m)} a_{k(m)}(t - \nu(m)T - \tau_k) + \eta_t
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $s(t, \mathbf{d})$  é a soma dos sinais recebidos de cada usuário,  $\eta_t$  é ruído adi-



**Figura 4.7:** *Sliding Correlator* (seqüencial) [ $N$ =comprimento da seqüência de espalhamento]

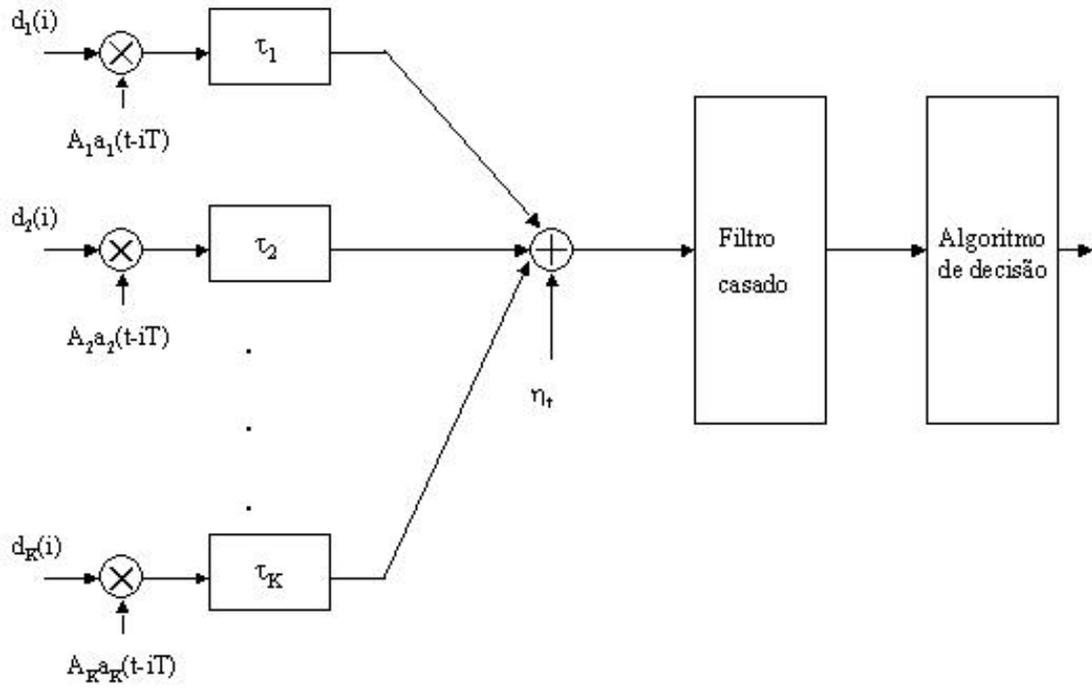
tivo gaussiano com densidade espectral de potência  $N_0/2$ ,  $k(m)$  é igual a  $m \bmod K$ ,  $\nu(m)$  é a parte inteira de  $m/K$ ,  $M+1$  é o número de bits transmitidos a cada usuário,  $a_k$  e  $\tau_k$  são, respectivamente, os códigos de espalhamento e os atrasos. A composição das seqüências de dados dos  $K$  usuários,  $\mathbf{d} = [d_{k(m)}(\nu(m))]_{m=1}^{(M+1)K}$ , é estimada através do sinal recebido  $r(t)$ . A amplitude de sinal do  $k$ -ésimo usuário é  $A_k = \sqrt{2P_k}e^{j\phi_k}$ , onde  $\phi_k$  é a fase da portadora e  $P_k$ , a potência. As amplitudes  $A_k$  constituem os parâmetros que se deseja estimar e assume-se que as variações destas amplitudes no tempo são lentas em comparação com o período de adaptação do estimador. Frequência, fase da portadora, atrasos  $\tau_k$  e os códigos de espalhamento  $a_k$  são assumidos conhecidos. Sem perda de generalidade, assume-se também que os atrasos podem ser ordenados na forma  $0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_K < T$ , onde  $T$  é o tempo de um bit.

O algoritmo de detecção e estimação conjunta determina a seqüência de bits  $\mathbf{d}$  e as amplitudes  $A_k$  que maximizam a função de verosimilhança

$$L(r(t) | \mathbf{d}, A) = C \exp \left[ \frac{\Omega(\mathbf{d}, A)}{N_0} \right] \quad (4.2)$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $\mathbf{d}$  e  $A_k$ ,

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{d}, A) &= 2 \operatorname{Re} \{ \langle s(t, \mathbf{d}), r(t) \rangle \} - \|s(t, \mathbf{d})\|^2 \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{(M+1)K} d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)}^* \left[ 2y_{k(i)}(\nu(i)) - d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$



**Figura 4.8:** Modelo DS-CDMA

$$-2 \left. \sum_{m=1}^{K-1} d_{k(i-m)}(\nu(i-m)) A_k(i-m) H_{k(i),k(i-m)}(\nu(i) - \nu(i-m)) \right] \}. \quad (4.4)$$

A saída do filtro casado  $y_{k(i)}(\nu(i))$  é

$$y_{k(i)}(\nu(i)) = \int r(t) a_{k(i)}(t - \nu(i)T - \tau_{k(i)}) dt \quad (4.5)$$

e  $H_{k(i),k(l)}(m)$  é a matriz de correlação cruzada entre os  $K$  códigos de espalhamento:

$$H_{k(i),k(l)}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} a_{k(i)}(t - \tau_{k(i)}) a_{k(l)}(t + mT - \tau_{k(l)}) dt$$

para  $k(i), k(l)=1,2,\dots,K$ .

Um modelo de DS-CDMA é mostrado na figura 4.8. O receptor de máxima verossimilhança para detecção conjunta consiste de um banco de filtros casados seguidos por um algoritmo que determina a seqüência de bits  $\mathbf{d}$  e as amplitudes  $A_k$  que levam ao maior valor da métrica definida em (4.4).

O problema, desta forma definido, requer uma busca exaustiva sobre uma árvore que cresce exponencialmente com o número de bits analisados e com o

número de usuários, em conjunto com a resolução de um problema de otimização referente ao estimador de amplitudes de sinal.

Cada caminho da árvore está associado a uma possível seqüência composta de bits transmitidos. Em cada ramo estaremos fixando a seqüência de bits e poderemos, portanto, estimar as amplitudes e calcular as métricas necessárias para definir qual a seqüência mais provável. Assim, a um determinado tempo ( $n = \nu(n)K + k(n) - 1$ ) haverá  $2^n$  diferentes ramos na árvore.

Para estender a análise de  $n$  para  $n+1$ , supõe-se a entrada em  $n+1$  igual a  $+1$  e faz-se a atualização da estimativa de amplitude e cálculo da métrica, em seguida, repete-se o processo supondo-se que o bit  $n+1$  seja igual a  $-1$ . A decisão (detecção) só é tomada após receber os  $(M+1)K$  bits.

## 4.6 Algoritmos Sub-Ótimos para Detecção e Estimativa Conjunta

A complexidade computacional do algoritmo ótimo para estimação e detecção conjunta de amplitudes e informação, apresentado na seção anterior, gerou motivação para a busca de algoritmos menos complexos, ainda que com desempenho inferior. O algoritmo discutido nesta seção, introduzido em [13] é baseado naquele apresentado na seção 4.5. Utiliza-se uma simplificação na árvore de busca, apresentada na seção 4.6.1 e o algoritmo RLS para estimação de amplitudes, vide seção 4.6.2.

### 4.6.1 Uma Árvore de Busca Prática

Assumindo-se que, ao tempo  $t=n$ , tenhamos armazenado  $L$  nós na árvore de busca apresentada na seção 4.5, associado a cada nó teremos uma seqüência de bits de comprimento  $n$  e um conjunto de amplitudes, que são estimadas assumindo-se cada uma das possíveis seqüências de dados como verdadeira. A seguir apresenta-se os passos necessários para passarmos da iteração  $n$  para a iteração  $n+1$ .

1. Para cada um dos  $L$  nós ( $t=n$ ), assumir que o bit recebido em  $n+1$  pode ser  $+1$  ou  $-1$ , resultando em  $2L$  nós.
2. Para cada um dos  $2L$  nós, atualizar as estimativas de amplitude e métricas, baseado na seqüência associada com aquele nó. As métricas serão apresen-

tadas adiante, nesta seção. A estimação de amplitude é discutida na seção 4.6.2.

3. Selecionar dentre os  $2L$  nós, os  $L$  nós que apresentarem as maiores métricas.

A busca termina quando  $n = (M + 1)K$ . Deve-se então escolher o nó com maior métrica.

Na prática, este procedimento incorpora ao algoritmo discutido na seção 4.5 uma janela de truncamento, desprezando-se  $L$  seqüências. Vide referência [21] para maiores detalhes.

Como existe um período de transição até que o estimador de amplitudes converja, o algoritmo deve atuar diferentemente na aquisição e *tracking* dos parâmetros. Durante o período de aquisição, o valor da métrica para um dado nó é recalculado cada vez que as amplitudes são atualizadas; já no período de *tracking*, a métrica é atualizada de forma incremental, reduzindo-se o número de operações. Assim, durante um período de aquisição de  $M_{acq}$  bits será utilizado

$$Métrica[n] = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^n d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)}^\dagger[n] \left[ 2y_{k(i)}(\nu(i)) - d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)}[n] \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sum_{m=1}^{K-1} d_{k(i-m)}(\nu(i-m)) A_{k(i-m)}[n] H_{k(i),k(i-m)}(\nu(i) - \nu(i-m)) \right] \right\} \quad (4.6)$$

onde  $A_k[n]$  é a estimativa de amplitude do  $k$ -ésimo usuário no tempo  $n$ .

Já no período de *tracking* será utilizada a métrica a seguir, que reduz a necessidade computacional para o cálculo.

$$Métrica[n] = Métrica[n-1] + \text{Re} \left\{ d_{k(n)}(\nu(n)) A_{k(n)}^\dagger[n] \right.$$

$$\left. \left[ 2y_{k(n)}(\nu(n)) - d_{k(n)}(\nu(n)) A_{k(n)}[n] \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 \sum_{m=1}^{K-1} d_{k(n-m)}(\nu(n-m)) A_{k(n-m)}[n] H_{k(n),k(n-m)}(\nu(n) - \nu(n-m)) \right] \right\} \quad (4.7)$$

A complexidade do algoritmo depende do número de nós selecionados para análise. Em regime, o número de operações necessárias para escolha de  $L$  ramos

é proporcional a  $LK$ , logo, a escolha de  $L$  é um compromisso entre complexidade e desempenho.

### 4.6.2 Uso do RLS para Estimação de Amplitude

A árvore de busca citada na seção 4.6.1 necessita da estimação de amplitude, a qual é feita, para cada seqüência hipotética de bits, utilizando-se o algoritmo RLS. A função custo utilizada no algoritmo RLS está relacionada com a equação de verosimilhança definida em (4.4), introduzindo-se um "fator de esquecimento" que concede uma certa adaptabilidade ao estimador em ambientes que causam variações na amplitude do sinal, por exemplo, o ambiente das comunicações móveis.

A função custo no tempo  $n$ , onde  $n = \nu(n)K + k(n)$ , é definida como em [21]:

$$\begin{aligned} \varsigma[n] = & \sum_{i=1}^n \lambda_{n-i} \cdot \text{Re} \left\{ d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)}^\dagger \left[ 2y_{k(i)}(\nu(i)) - d_{k(i)}(\nu(i)) A_{k(i)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \sum_{m=1}^{K-1} d_{k(i-m)}(\nu(i-m)) A_{k(i-m)} H_{k(i),k(i-m)}(\nu(i) - \nu(i-m)) \right] \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

onde cada termo da somatória é o produto do termo correspondente na relação (4.4) pelo fator  $\lambda^{n-i}$ ,  $\beta \leq 1$  (fator exponencial ou "fator de esquecimento").

Após um desenvolvimento direto, mas trabalhoso, a função custo  $\nu[n]$  em (4.8) pode ser escrita em função de um vetor de amplitudes,  $\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_K]^T$ :

$$\varsigma[n] = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{A}^\dagger \mathbf{c}[n] \right\} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{\Psi}[n] \mathbf{A} \quad (4.9)$$

o vetor  $\mathbf{c}[n]$  ( $K \times 1$ ) e a matriz  $\mathbf{\Psi}[n]$  ( $K \times K$ ) são:

$$\mathbf{c}[n] = \sum_{i=0}^{\nu(n)-1} \lambda^{k(n)+(\nu(n)-i)K} \mathbf{\Lambda} \mathbf{D}(i) \mathbf{y}(i) + \mathbf{\Lambda}_{k(n)}^p \mathbf{D}_{k(n)}(\nu(n)) \mathbf{y}_{k(n)}^p(\nu(n)) \quad (4.10)$$

e

$$\mathbf{\Psi}[n] = \sum_{i=0}^{\nu(n)-1} \lambda^{k(n)+(\nu(n)-i)K} \mathbf{\Lambda} \left\{ \mathbf{D}(i) \mathbf{H}(0) \mathbf{D}(i) + 2\mathbf{D}(i) \mathbf{H}(1) \mathbf{D}(i-1) \right\}$$

$$+\Lambda_{k(n)}^p \left\{ \mathbf{D}_{k(n)}^p(\nu(n))\mathbf{H}(0)\mathbf{D}_{k(n)}^p(\nu(n)) + 2\mathbf{D}_{k(n)}^p(\nu(n))\mathbf{H}(1)\mathbf{D}(\nu(n) - 1) \right\} \quad (4.11)$$

As matrizes de dimensão  $K \times K$ ,  $\mathbf{D}(i)$ ,  $\mathbf{D}_{k(n)}^p(\nu(n))$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda_{k(n)}^p$ ,  $\mathbf{H}(0)$  e  $\mathbf{H}(1)$  são dadas por:

$$\mathbf{D}(i) = \text{diag} \{d_1(i), d_2(i), \dots, d_K(i)\}$$

$$\mathbf{D}_{k(n)}^p(\nu(n)) = \text{diag} \{d_1(\nu(n)), d_2(\nu(n)), \dots, d_{k(n)}(\nu(n)), 0, \dots, 0\}$$

$$\Lambda = \text{diag} \{\lambda^{K-1}, \lambda^{K-2}, \dots, 1\}$$

$$\Lambda_{k(n)}^p = \text{diag} \{\lambda^{k(n)-1}, \lambda^{k(n)-2}, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$$

$$\mathbf{H}(0) = \{H_{i,m}(0)\}$$

$$\mathbf{H}(1) = \{H_{i,m}(1)\}$$

e os vetores  $\mathbf{y}(i)$  e  $\mathbf{y}_{k(n)}^p(\nu(n))$  são definidos como:

$$\mathbf{y}(i) = [y_1(i), y_2(i), \dots, y_K(i)]^T$$

$$\mathbf{y}_{k(n)}^p(\nu(n)) = [y_1(\nu(n)), y_2(\nu(n)), \dots, y_{k(n)}(\nu(n)), 0, \dots, 0]^T$$

nas definições acima o índice  $p$  indica quantidades que são conhecidas parcialmente.

Utilizando as expressões (4.10) e (4.11), pode-se expressar  $\mathbf{c}[n]$  e  $\Psi[n]$  de forma recursiva

$$\mathbf{c}[n] = \lambda\mathbf{c}[n-1] + y_{k(n)}(\nu(n))\mathbf{u}[n] \quad (4.12)$$

e

$$\psi[n] = \lambda\psi[n-1] + \mathbf{u}[n]\mathbf{v}[n]^T \quad (4.13)$$

Os vetores  $\mathbf{u}[n]$  e  $\mathbf{v}[n]$  são relacionados com a seqüências de bits e as matrizes de correlação cruzada através das expressões

$$\mathbf{u}[n] = [0, \dots, 0, d_{k(n)}(\nu(n)), 0, \dots, 0]^T$$

e

$$\mathbf{v}[n] = \left\{ \lambda d_{k(n-m)}(\nu(n-m)) \cdot H_{k(n), k(n-m)}(\nu(n) - \nu(n-m)) \right\}^T$$

Os elementos em  $\mathbf{v}(n)$  são ordenados pelo inteiro  $k(n-m)$  para  $m = 0, 1, \dots, K-1$ .

O vetor  $\mathbf{A}[n]$  é o vetor de amplitudes para  $t=n$  para o qual o mínimo valor da função custo ( $\varsigma[n]$ ) é obtido. Segue da expressão (4.9):

$$\Psi[n]\mathbf{A}[n] = c[n]$$

Assumindo que  $\Psi[n]$  é inversível para todo  $n$ , segue, do lema de inversão de matrizes [22] e da expressão (4.13), uma expressão recursiva para a inversa de  $\Psi[n]$

$$\Psi[n]^{-1} = \lambda\Psi[n-1]^{-1} - \frac{\lambda^{-1}\Psi[n-1]^{-1}\mathbf{u}[n]\mathbf{v}[n]^T\Psi[n-1]^{-1}}{1 + \mathbf{v}[n]^T\lambda^{-1}\Psi[n-1]^{-1}\mathbf{u}[n]} \quad (4.14)$$

Ainda, seguindo o desenvolvimento utilizado em [21] para derivar o filtro RLS padrão, obtém-se as seguintes relações:

$$\mathbf{g}[n] = \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[n-1]\mathbf{u}[n]}{1 + \mathbf{v}[n]^T\lambda^{-1}\mathbf{P}[n-1]^{-1}\mathbf{u}[n]} \quad (4.15)$$

$$\alpha[n] = y_{k(n)}(\nu(n) - \mathbf{v}[n]^T\mathbf{A}[n-1])$$

$$\mathbf{A}[n] = \mathbf{A}[n-1] + \alpha[n]g[n]$$

e

$$\mathbf{P}[n] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[n-1] - \lambda^{-1}\mathbf{g}[n]\mathbf{v}[n]^T\mathbf{P}[n-1]$$

para  $n = 1, 2, \dots, (M+1)K$ , onde  $\mathbf{P}[n] = \Psi[n]^{-1}$ ,  $\alpha[n]$  é o erro de estimação e  $\mathbf{g}[n]$  é o vetor ganho.

As equações (4.15) a (4.18) constituem o estimador RLS.

## 4.7 Métodos Baseados na Decomposição em Subespaços

A visão geral sobre a teoria que envolve estimativas de parâmetros utilizando-se decomposição em subespaços é apresentada no capítulo 3. O capítulo 5 se presta ao detalhamento de um dos algoritmos utilizados dentro dessa técnica, o qual é a base deste trabalho e o 6 tece alguns comentários sobre o comportamento do algoritmo sob o ponto de vista analítico, visando colaborar na interpretação dos resultados das simulações. Portanto, nesta seção nos limitaremos a referenciar alguns trabalhos nesta área, aplicados às estimativas de parâmetros em DS-CDMA, apresentando semelhanças e diferenças entre os algoritmos.

### 4.7.1 Características

O método de decomposição em subespaços é uma alternativa interessante para solução do problema de estimativa de parâmetros de canal em DS-CDMA, pois apresenta características relevantes:

- Decompõe um problema de muitas dimensões, como apresentado em (4.5) em vários problemas de uma dimensão;
- Não requer seqüências de treinamento;
- Não necessitam do conhecimento do código de espalhamento dos usuários interferentes;
- Resistente ao efeito *near-far*;

- Efetivo no tratamento de multipercursos;
- Baixa complexidade.

Em contrapartida, o desempenho depende da velocidade e precisão na estimativa dos subespaços, especialmente se o canal é variável no tempo, como pode ser observado no capítulo 7.

### 4.7.2 Subespaços em DS-CDMA

A literatura apresenta diferentes formas de uso da técnica de divisão em subespaços para estimativa de parâmetros em DS-CDMA, nesta seção discutiremos o que há de comum entre elas e, na próxima seção serão ressaltadas algumas diferenças.

Em geral, teremos  $K$  usuários assíncronos utilizando modulação PSK sobre um canal AWGN. Cada usuário utiliza um código de espalhamento único, com largura de bit  $T$  sendo que cada bit consiste de  $N$  chips com duração  $T_c = T/N$  com  $N$  inteiro, relação conhecida como código curto. O sinal recebido é a soma, adicionada a ruído, da contribuição de cada usuário

$$r(t) = \sum_{k=1}^K r_k(t) + \eta$$

sendo que, como o sistema é assíncrono, cada usuário tem um atraso de propagação igual a  $\tau_k \in [0, T)$ , dependente da distância entre transmissor e receptor e dependente também das reflexões que o sinal transmitido sofre até atingir o receptor.

Após conversão para banda base o sinal passa por um filtro integrador, com período de integração igual a  $T_i = T_c/Q$ , onde  $Q$  é um número inteiro que representa o número de amostras por chip. Portanto, para cada bit  $QN$  amostras são armazenadas em um vetor  $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$ , que é chamado de "vetor de observação". Note que a amostragem é feita de modo assíncrono e sem conhecimento dos atrasos, portanto, cada vetor de observação contém, normalmente, informações relativas a dois bits.

Os vetores de observação  $\mathbf{y}$  são a fonte de informação para qualquer algoritmo de decomposição em subespaços, que passam, normalmente, por três etapas:

1. Identificação do conjunto de vetores de observação possíveis

Estaremos sempre interessados em identificar um parâmetro, ou vetor de parâmetros desejados  $\theta$  a partir de um conjunto de medidas realizadas em algum tipo de sensor. Assim, a primeira etapa do método consiste em identificar quais são as medidas possíveis, livres de ruído, quando  $\theta$  varia em toda sua faixa. Este conjunto pode ser finito quanto  $\theta$  tem comportamento discreto, ou infinito, quando  $\theta$  é contínuo.

O ponto fundamental desta etapa é garantir que o mapeamento entre  $\theta$  e o vetor de observação seja de um para um, ou seja, livre de ambiguidades.

Como exemplo, no caso de estimação de atrasos em DS-CDMA, o conjunto de vetores de observação deve contemplar qualquer valor de  $\tau$ , para  $0 \leq \tau \leq T$ .

## 2. Estimação dos subespaços de sinal e ruído

Em ambientes livre de ruído, esta etapa resumiria-se em encontrar dentre as medidas recebidas, tantos vetores linearmente independentes quantos forem os parâmetros a serem estimados. Contudo, em ambiente real, isto é, com presença de ruído, este trabalho é normalmente realizado em dois passos:

a) Estimação da matriz de correlação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger]$

Nesta etapa, em canal invariante no tempo, pode-se utilizar uma simples média aritmética da matriz de correlação calculada a partir dos vetores amostra. Porém, normalmente o canal é variante no tempo, sendo mais adequada a realização de média móvel ou janela exponencial. Nestes casos, o tamanho da janela ou o valor fator  $\beta$  ("fator de esquecimento") representam um compromisso entre a precisão na estimativa de  $\mathbf{R}$  e a capacidade de acompanhar as variações do canal. A janela reduzida ou fator  $\beta$  menor, favorecem a agilidade, enquanto o oposto, favorece a precisão.

b) Decomposição da matriz de correlação em dois subespaços: sinal e ruído.

A matriz de correlação  $\mathbf{R}$  é decomposta em autovalores e autovetores ( $\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^\dagger$ ). Os autovetores relacionados aos maiores autovalores formam o subespaço de sinal. Os autovetores restantes formam o subespaço de ruído. Vide capítulo 5 para maiores detalhes e quantificação das grandezas mencionadas aqui.

Observe que existe um passo intermediário referente à identificação da dimensão do subespaço de sinal. Em algumas aplicações esta dimensão pode ser conhecida *a priori*, em outros casos, precisará ser estimada. Vide referência [32] para maiores detalhes.

Alternativamente, ao invés de trabalhar com a matriz de correlação, poderia-se utilizar *Singular Value Decomposition* (SVD) e trabalhar diretamente com as medidas.

### 3. Uso dos subespaços de sinal ou ruído para obtenção das estimativas

Uma vez estabelecida uma base para o subespaço de ruído (ou de sinal), pode-se utilizá-la para solucionar o problema de estimação de atrasos e fatores de atenuação, através da resolução de problemas de otimização não-lineares.

Nesta etapa, vários algoritmos podem ser utilizados. Neste trabalho, como em [15], foi utilizado uma variação do *MUSIC*. Neste método, os diferentes atrasos e fatores de atenuação de cada usuário são estimados independentemente. A formulação essencialmente estima a resposta impulsiva do canal, a qual é relacionada com os parâmetros que se deseja encontrar, através da minimização da projeção do sinal do usuário sobre o subespaço de ruído. Vide capítulo 5 para maiores detalhes.

## 4.7.3 Diferenças Entre os Algoritmos

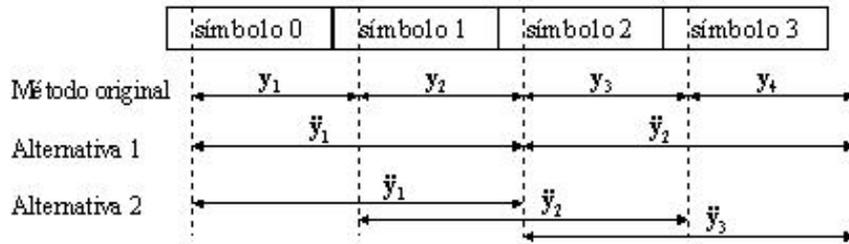
Se, de forma geral, todos os algoritmos que trabalham com decomposição em subespaços apresentam as características descritas na seção 4.7.2, nos detalhes de realização de cada passo citado aparecem algumas diferenças.

### 1. Na etapa de amostragem do sinal pode-se citar duas diferenças principais:

#### a) Quanto ao número de amostras por chip

Neste trabalho foi considerado  $N$  amostras por bit, ou seja, o número de amostras (o período de integração) é igual ao número de chips que compõem o código de usuário. Porém, uma taxa maior poderia ser considerada, resultando em  $QN$  amostras,  $Q$  inteiro. A razão para esta amostragem acima da taxa de chip está na integração, pois como é feita arbitrariamente, um determinado intervalo geralmente contém componentes de dois chips para cada usuários, o que atenua as componentes de alta frequência dos códigos de espalhamento, resultando em uma perda média de 1,76 dB na relação sinal-ruído, e de até 3 dB quando o desalinhamento é de exatamente  $\frac{1}{2}T_c$ . Esta sobretaxa de amostragem reduz a perda na relação sinal-ruído ao custo de significativo aumento na quantidade de dados a serem tratados.

#### b) Quanto ao tamanho dos vetores de observação



**Figura 4.9:** Alternativas para amostragem

Um trabalho de Ostman, Parkvall e Ottersten (publicação interna) sugere a utilização de vetores de observação de comprimento maior do que  $N$ . A motivação para esta "montagem" do vetor de observação vem do fato de que cada vetor possui informação de dois bits, portanto, considerando-se uma seqüência de bits independentes, a matriz de correlação dos vetores de observação  $\mathbf{R}(l) = E \{ \mathbf{y}_i \mathbf{y}_{i+l} \}$  também contém informação em  $\mathbf{R}(1)$  e não somente em  $\mathbf{R}(0)$ , como é normalmente utilizado.

Os autores propõem duas alternativas de definição dos vetores de observação. Vide figura 4.9.

## 2. Estimativa da matriz de correlação

Quanto à estimação da matriz de correlação (segunda etapa, na seção 4.7.2 uma variedade de médias, tamanhos de janelas e valores do fator  $\beta$  podem ser utilizados.

## 3. Quanto à estimativa dos parâmetros

Na terceira etapa citada na seção 4.7.2 é onde aparecem na literatura uma variedade de algoritmos. Adicionalmente ao já citado *MUSIC*, podemos incluir:

### a) Forma probabilística

A referência [24] mostra que projeções dos autovetores do subespaço de ruído estimado sobre o subespaço de sinal real (não o estimado) são assintoticamente gaussianas, o que leva a crer que as projeções do vetor de sinal sobre o subespaço estimado de ruído também são assintoticamente gaussianas.

Desta forma, é possível escrever uma função de verossimilhança para as projeções considerando-se uma função densidade de probabilidade gaussiana.

A maximização da função de verossimilhança é, porém, proibitivamente complexa para consideração de multipercursos.

#### b) *ESPRIT*

O algoritmo *ESPRIT* [20] explora propriedades de invariância ao deslocamento para estimativa de atrasos.

Para utilizar este algoritmo é necessário construir uma matriz de correlação que apresente uma estrutura caracterizada por um deslocamento da informação. Esta estrutura pode ser criada amostrando-se duas vezes o mesmo chip com um intervalo  $\Delta$  entre amostras. Porém, esta alternativa apresenta como desvantagem a necessidade de *hardware* mais complexo.

Uma outra forma possível seria através do uso de um sistema de antenas com múltiplos sensores (antenna array) [17].

## 4.8 Métodos Baseados em Máxima Verossimilhança

Máxima verossimilhança também é uma técnica atrativa para estimação de parâmetros de canal em DS-CDMA, pois tem-se mostrado ser computacionalmente eficiente e com capacidade para grande número de usuários. Adicionalmente, alguns trabalhos mostram que o emprego de máxima verossimilhança e múltiplos sensores melhora em muito o desempenho tanto da estimação dos parâmetros de canal quanto da detecção da informação [24][25].

O trabalho [16] inclui um filtro "branqueador" derivado da matriz de covariância que é utilizado para suprimir a MAI.

## 5 O Modelo Utilizado

Este capítulo é dedicado à apresentação do modelo utilizado nas simulações.

### 5.1 Modelamento

Em um sistema CDMA todos os usuários transmitem simultaneamente através de um canal comum. Desta forma, o sinal recebido pode ser modelado como a superposição de  $K$  usuários ativos e ruído aditivo gaussiano:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K r_k(t) + \eta \quad (5.1)$$

$$-\infty < t < \infty$$

onde  $\eta$  é um ruído branco gaussiano de média zero e densidade espectral de potência  $N_0/2$ .

O sinal transmitido por um usuário é dado por

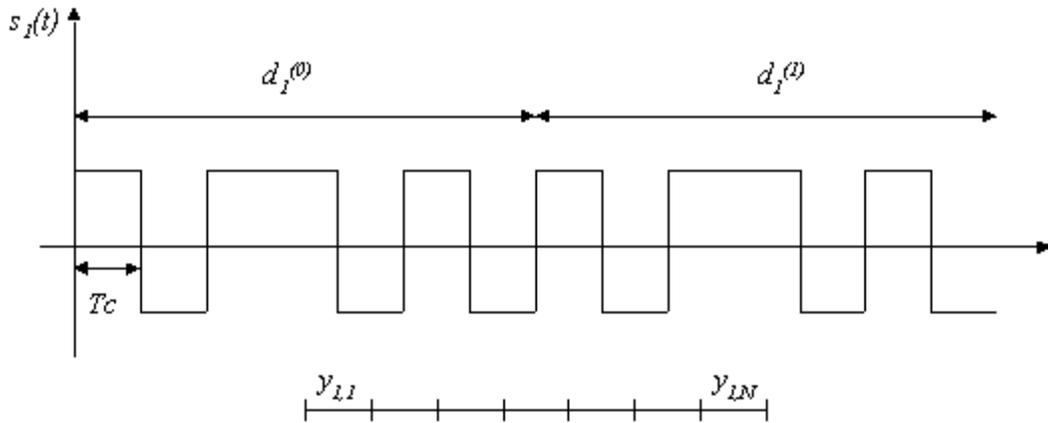
$$s_k(t) = \sqrt{2P_k} e^{j\phi_k} \sum_i e^{j\pi d_k^i} a_k(t - iT) \quad (5.2)$$

onde  $P_k$  é a potência transmitida,  $\phi_k$  a diferença de fase entre o sinal recebido e o oscilador local do receptor,  $a_k(t)$  é o código do usuário,  $T$  a duração de um símbolo e  $d_k^i \in \{+1, -1\}$  os bits a serem transmitidos, assumindo-se esquema de modulação BPSK.

A sequência  $a_k$  é pseudoaleatória, de pulsos retangulares, formada por  $N$  chips de duração  $T_c$ . Neste trabalho será considerado  $T_c = T/N$ , isto é, os códigos considerados são curtos.

Em um canal de transmissão linear, o sinal recebido de um usuário pode ser expresso por

$$r_k(t) = h_k(t, \tau) * s_k(t) \quad (5.3)$$



**Figura 5.1:** Vetor observação, contém o final de um bit e o início do próximo bit

onde  $h_k(t, \tau)$  é a resposta ao impulso do canal de transmissão, que para a aplicação deste trabalho é variante no tempo.

Em sistemas celulares e outros sistemas sem fio, o canal reverso, ou seja, transmissão do terminal móvel para a estação rádio-base, é assíncrono. Adicionalmente, cada usuário móvel transmite de posições diferentes, logo existirá um  $h_k(t, \tau)$  para cada usuário.

O sinal recebido será amostrado na saída de um filtro casado. Após a amostragem, o sinal de tempo discreto pode ser assim representado:

$$r[n] = \frac{1}{T_c} \int_{nT_c}^{(n+1)T_c} r(t) dt \quad (5.4)$$

O sinal  $r[n]$  é ciclo-estacionário, ou seja, sua média e autocorrelação são invariantes a um deslocamento de  $N$  argumentos, e portanto, pode ser convertido em um sinal estacionário no sentido amplo agrupando-se em um único vetor  $N$  amostras de  $r[n]$ . Definindo-se o vetor de observação

$$\mathbf{y}_i = [r[iN], r[1 + iN], \dots, r[N - 1 + iN]]^T \quad (5.5)$$

$$\mathbf{y}_i \in \mathbf{C}^N,$$

apesar do vetor de observação corresponder ao período de um símbolo, a amostragem é feita sem o conhecimento do real atraso do usuário e, portanto, contém componentes de dois símbolos consecutivos. Vide figura 5.1.

Desta forma, com  $K$  usuários ativos, cada vetor de observação pode ser visto

como uma combinação linear de  $2K$  componentes e ruído.

Agrupando-se fase, potência e símbolos em um único coeficiente  $c_k^{(i)}$  o vetor de observação pode ser escrito como:

$$\mathbf{y}_i = \sum_{k=1}^K \left[ c_k(i-1) \mathbf{u}_k^r + c_k(i) \mathbf{u}_k^l \right] + \eta_i = \mathbf{A} \mathbf{c}_i + \eta_i \quad (5.6)$$

Onde  $\eta_i = [\eta_{i,0} \cdots \eta_{i,N-1}]^T \in \mathbf{C}^N$  é um vetor aleatório gaussiano, cujos elementos apresentam média zero e variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_c}$ .

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{u}_1^r \ \mathbf{u}_1^l \ \cdots \ \mathbf{u}_K^r \ \mathbf{u}_K^l \right] \in \mathbf{C}^{N \times 2K} \quad (5.7)$$

e

$$\mathbf{c}_i = \left[ c_1^{(i-1)} \ c_1^i \ \cdots \ c_K^{(i-1)} \ c_K^i \right]^T \in \mathbf{C}^{2K} \quad (5.8)$$

Os vetores  $\mathbf{u}_k^r$  e  $\mathbf{u}_k^l$  são dependentes apenas da seqüência de espalhamento de cada usuário e da resposta ao impulso do canal.

Se definirmos  $\nu \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  e  $\gamma \in [0, 1)$ , tal que  $\tau_k/T_c \bmod N = \nu + \gamma$  e, como a amostragem é feita utilizando apenas um integrador, ou seja, é linear, pode-se escrever

$$\mathbf{u}_k^r = (1 - \gamma) \mathbf{a}_k^r(\nu) + \gamma \mathbf{a}_k^r(\nu + 1)$$

$$\mathbf{u}_k^l = (1 - \gamma) \mathbf{a}_k^l(\nu) + \gamma \mathbf{a}_k^l(\nu + 1) \quad (5.9)$$

onde os vetores  $\mathbf{a}_k^r$  e  $\mathbf{a}_k^l$  são iguais aos vetores  $\mathbf{u}_k^r$  e  $\mathbf{u}_k^l$ , respectivamente, quando o sinal recebido está perfeitamente alinhado com a amostragem no receptor, ou seja:

$$\gamma = 0;$$

$$\mathbf{a}_k^l(\nu) = \mathbf{u}_k^l \equiv \left[ 0 \ \cdots \ 0 \ a_k^{(0)} \ \cdots \ a_k^{(N-\nu-1)} \right]^T$$

$$\mathbf{a}_k^r(\nu) = \mathbf{u}_k^r \equiv \left[ a_k^{(N-\nu)} \ \cdots \ a_k^{(N-1)} \ 0 \ \cdots \ 0 \right]^T.$$

Agora, considerando-se um canal com  $L$  caminhos de propagação distintos, ou seja:

$$h_k(t, \tau) = \sum_{p=1}^L \alpha_{k,p} \delta(t - \tau_{k,p}) \quad (5.10)$$

onde  $\delta(t)$  é um delta de Dirac e  $\alpha_{k,p}$  a atenuação de cada percurso, pode-se escrever:

$$\mathbf{u}_k^r = \sum_{p=1}^L \alpha_{k,p} [(1 - \gamma_{k,p}) \mathbf{a}_k^r(\nu_{k,p}) + \gamma_{k,p} \mathbf{a}_k^r(\nu_{k,p} + 1)] \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u}_k^l = \sum_{p=1}^L \alpha_{k,p} [(1 - \gamma_{k,p}) \mathbf{a}_k^l(\nu_{k,p}) + \gamma_{k,p} \mathbf{a}_k^l(\nu_{k,p} + 1)]. \quad (5.12)$$

Dependendo dos atrasos  $\tau_{k,p}$ ,  $\mathbf{u}_k^r$  e  $\mathbf{u}_k^l$  poderiam conter componentes de mais de dois símbolos, porém, neste estudo consideraremos  $T_m$ , máxima diferença entre os atrasos de propagação dos  $L$  percursos menor do que meio período de símbolo,  $T_m < T/2$  (na prática, pode-se utilizar taxas de transmissão coerentes com esta restrição, por exemplo, o espalhamento *indoor* com  $T_m = 0,3\mu\text{s}$  é coerente com taxas de até 1,5 Mbps).

## 5.2 Estimando Subespaços e Canal

O algoritmo baseado em decomposição em subespaços com propósito de estimação de parâmetros pode ser dividido em três etapas: estimativa da matriz de correlação, decomposição do sinal e utilização da ortogonalidade entre os subespaços de sinal e ruído para extração das estimativas de parâmetros.

i) Estimativa da matriz de correlação

Neste trabalho, dois métodos para a estimativa da matriz de correlação são propostos:

a) Média móvel ou janela retangular

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=i-J+1}^i \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^\dagger \quad (5.13)$$

b) Janela exponencial

$$\hat{\mathbf{R}}_i = [\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger + \beta \mathbf{R}_{i-1}] \cdot \left( \frac{1 - \beta}{1 - \beta^i} \right) \quad (5.14)$$

onde  $\beta < 1$  é o “fator de esquecimento”.

A escolha do esquema de janelas depende da taxa de variação dos subespaços de sinal e ruído, e também do atraso permitido, característica da aplicação. No capítulo 7 são feitas várias simulações com diferentes tipos e tamanhos de janelas.

### ii) Decomposição do sinal

A matriz de correlação  $\mathbf{R}$  pode ser expressa através de sua decomposição em autovalores e autovetores, assim:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^\dagger$$

onde as colunas de  $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^N$  são os autovetores de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{D}$  é a matriz diagonal correspondente aos autovalores  $(\lambda_n)$ .

Assumindo-se  $2K < N$ , os  $2K$  autovetores correspondentes aos maiores autovalores de  $\mathbf{R}$  formam uma base para o subespaço de sinal, enquanto os  $N-2K$  autovetores restantes formam a base para o subespaço de ruído.

Portanto, o subespaço  $\mathbf{V}$  pode ser particionado em:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_S \ \mathbf{V}_N] \quad (5.15)$$

$$\mathbf{V}_S \in \mathbf{C}^{N \times 2K} \text{ e } \mathbf{V}_N \in \mathbf{C}^{N \times N-2K}.$$

Como não temos a verdadeira matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , utiliza-se sua estimativa,  $\hat{\mathbf{R}}$  na decomposição.

Neste ponto é importante notar que, se fixarmos o valor de  $N$ , a base do subespaço de ruído,  $\mathbf{V}_N$ , terá sua dimensão reduzida à medida que se acrescenta usuários no sistema (aumento do valor de  $K$ ). Contudo, quando  $K \gg 1$  pode-se reduzir esta restrição e com isso, conseguir-se algum aumento de capacidade, mostrado no capítulo 7, seção 7.4.2.

### iii) Estimativa do canal

Idealmente, a projeção de  $\mathbf{u}_k$  sobre o subespaço de ruído deveria resultar em zero.

Porém, o subespaço de ruído encontrado é uma estimativa e portanto, não se espera que o vetor de sinal esteja no espaço nulo da estimativa de  $\mathbf{V}_N$ . Contudo,

é razoável que quanto melhor a estimativa, menor a projeção do vetor de sinal sobre o subespaço de ruído.

Desta forma, a estimativa de canal é a solução de:

$$\hat{\mathbf{h}}_k = \arg \min_{\mathbf{h}_k \in H} \left\| \mathbf{u}_k^{r\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \right\|^2 + \left\| \mathbf{u}_k^{l\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \right\|^2 \quad (5.16)$$

onde  $H$  é o conjunto das respostas ao impulso possíveis.  $H$  pode ser reduzido se tivermos alguma informação *a priori* sobre o canal, caso contrário  $H = \mathbb{C}^N$ .

Se definirmos:

$$\mathbf{U}_k^l = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k^l(0) & \dots & \mathbf{a}_k^l(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{U}_k^r = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k^r(0) & \dots & \mathbf{a}_k^r(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (5.18)$$

com  $\mathbf{a}_k^r$  e  $\mathbf{a}_k^l$  conforme (5.9), com  $\gamma = 0$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^l &= \mathbf{U}_k^l \mathbf{h}_k \\ \mathbf{u}_k^r &= \mathbf{U}_k^r \mathbf{h}_k \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ou seja, o vetor de sinal pode ser expresso como uma combinação linear das colunas destas matrizes. O vetor  $\mathbf{h}_k$  é a resposta ao impulso composta do canal e receptor. Um exemplo da montagem das matrizes  $\mathbf{U}_k^r$  e  $\mathbf{U}_k^l$  pode ser encontrado na seção A.2.

Substituindo-se (5.19) em (5.16):

$$\hat{\mathbf{h}}_k = \arg \min_{\mathbf{h}_k \in H} \mathbf{h}_k^\dagger \left[ \mathbf{U}_k^{l\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{U}_k^l + \mathbf{U}_k^{r\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{U}_k^r \right] \mathbf{h}_k \quad (5.20)$$

Definindo-se  $\mathbf{M} = \left[ \mathbf{U}_k^{l\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{U}_k^l + \mathbf{U}_k^{r\dagger} \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^\dagger \mathbf{U}_k^r \right]$ , pode-se escrever:

$$\hat{\mathbf{h}}_k = \arg \min_{\mathbf{h}_k \in H} \mathbf{h}_k^\dagger \mathbf{M} \mathbf{h}_k. \quad (5.21)$$

Na presença de ruído, a matriz  $\mathbf{M}$  apresenta posto máximo e assim, a solução de (5.20) é simplesmente o autovetor correspondente ao menor autovalor da matriz.

Esta forma de tratar o problema de estimativa de canal é semelhante ao algoritmo *MUSIC*, apresentado no capítulo 3. A diferença é que, enquanto no *MUSIC* cada coluna de  $\mathbf{A}$  em (5.6) é função de um parâmetro distinto, aqui  $\mathbf{u}_k^r$  e

$\mathbf{u}_k^l$ , vetores que compõem a matriz  $\mathbf{A}$ , conforme (5.7), são funções de um mesmo  $\tau_k$ , o qual é independente de  $\tau_j$ , para  $j \neq k$ .

Dentro da técnica de divisão em subespaços esta não é a única forma de resolver o problema, porém, é uma forma simples, que não exige nenhum conhecimento *a priori* das estatísticas do canal e ainda dispensa uso de seqüências de treinamento.

Outra vantagem é que por ser simples pode ser utilizada com modelos de canais mais elaborados, considerando-se multipercurso por exemplo, e ainda assim o problema será tratável.

## 5.3 Estimando Parâmetros do Canal

A partir do vetor resposta ao impulso  $\mathbf{h}$  obtido através da minimização de (5.21) poderemos estimar os parâmetros de canal desejados: atraso ( $\tau$ ) e amplitude do sinal recebido.

O desenvolvimento apresentado adiante assume que, quando o canal é afetado por multipercurso, sua resposta ao impulso pode ser modelada como a soma de um número finito de propagações por caminhos distintos. Apesar desta restrição não ser satisfeita no sentido estrito, é fato que normalmente são observadas concentrações da energia do sinal que podem ser consideradas como "caminhos mais fortes", sendo que um número finito destes "caminhos" agrega quase toda a energia do sinal. Outras técnicas para combate de desvanecimento por multipercurso também assumem este modelo, como por exemplo o receptor RAKE.

### 5.3.1 Estimando Atrasos

A seção 5.3.1.1 apresenta a solução normalmente encontrada em literatura, por exemplo, em [15]. A seção 5.3.1.2 discute os pontos fracos do desenvolvimento apresentado em 5.3.1.1 e apresenta alternativas às técnicas propostas.

#### 5.3.1.1 Solução Utilizando Métodos de Otimização

Os métodos normalmente observados em literatura propõem uma solução de otimização (por exemplo, "least-squares") à partir do vetor  $\mathbf{h}$ . Assim, os parâmetros de canal que procuramos, podem ser encontrados da seguinte forma:

$$[\alpha_\nu, \gamma_\nu] = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{C}, \gamma \in [0,1]} \left| \hat{h}_{k,\nu} - (1 - \gamma) \alpha \right|^2 + \left| \hat{h}_{k,\nu+1} - \gamma \alpha \right|^2 \quad (5.22)$$

onde  $\hat{h}_{k,\nu}$  é o  $\nu$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{\mathbf{h}}$ , Lembrando que um único caminho manifesta-se em dois valores adjacentes desse vetor.

A solução de (5.22) é dada por

$$\gamma_\nu = \frac{1}{2} + \rho \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\alpha_\nu = \frac{(1 - \gamma_\nu) \hat{h}_{k,\nu} + \gamma_\nu \hat{h}_{k,\nu+1}}{(1 - \gamma_\nu)^2 + \gamma_\nu^2} \quad (5.23)$$

onde

$$\rho = \frac{\operatorname{Re} \{ \hat{h}_{k,\nu} \hat{h}_{k,\nu+1} \}}{\left| \hat{h}_{k,\nu} \right|^2 - \left| \hat{h}_{k,\nu+1} \right|^2}. \quad (5.24)$$

Agora, é preciso procurar o "caminho" mais forte, ou seja,

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \{0,1,\dots,N-1\}} |\alpha_\nu| \quad (5.25)$$

e então, calcular os parâmetros de canal

$$\hat{\tau} = (\hat{\nu} + \gamma_{\hat{\nu}}) T_c$$

e

$$\hat{\alpha} = \alpha_{\hat{\nu}} \quad (5.26)$$

O "caminho" estimado é então subtraído de  $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}$  e o processo é repetido para encontrar o próximo "caminho". O algoritmo é finalizado quando atinge-se o número de caminhos especificados ou  $|\hat{\alpha}|$  cai abaixo de um valor pré-definido.

### 5.3.1.2 Discussão sobre o Método Convencional

Nesta seção serão apresentados dois pontos do método que podem ser melhorados. Primeiramente, trataremos da capacidade de discriminação de percursos

e depois será apresentado uma proposta alternativa ao problema de otimização apresentado na seção 5.3.1.1.

Como visto na seção 5.2, o vetor  $\mathbf{h}$  carrega informação de atrasos,  $\tau$ , e atenuação do percurso,  $\alpha$ . Assim, por exemplo, para um usuário  $k$  com seqüência de espalhamento de comprimento  $N = 7$  cuja amostragem do sinal no receptor está exatamente quatro chips atrasada em relação ao sinal recebido, teremos o seguinte vetor:

$$\mathbf{h} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Normalmente a amostragem não estará exatamente alinhada com o sinal recebido, e assim, um único caminho de propagação se manifestará em dois valores adjacentes do vetor  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{h} = [0 \ 0 \ 0,5537 \ 0,8327 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Por enquanto, nos vetores apresentados ainda não consideramos que existem vários caminhos de propagação, conforme discutido no capítulo 4.

Consideremos portanto, um caso mais próximo do real, quando teremos então mais de um caminho de propagação atingindo o receptor e a presença de ruído, que se manifesta através de valores próximos a zero nas posições em que não se percebe uma concentração de sinal

$$\mathbf{h} = [0,0020 \ 0,4919 \ 0,4913 \ 0,0024 \ 0,3978 \ 0,5987 \ 0,0021].$$

No vetor apresentado nota-se dois percursos, na segunda e terceira posições e outro na quinta e sexta posições.

Posto isso, podemos discutir uma restrição do método apresentado na seção 5.3.1.1.

Primeiramente, é importante notar que, pela própria natureza do vetor  $\mathbf{h}$  é impossível dentro deste método discriminar percursos com atrasos relativos maiores que zero mas que se manifestam nas mesmas posições do vetor  $\mathbf{h}$ . Uma condição necessária, mas não suficiente para que isto ocorra é que este atraso relativo seja menor do que um chip.

Assim, considerando-se dois caminhos de propagação distintos que atingem o receptor com atrasos relativos que se manifestem em elementos consecutivos do

vetor  $\mathbf{h}$ , como por exemplo:

$$\mathbf{h} = [0,0071 \ 0,4205 \ 0,7532 \ 0,5057 \ 0,0082 \ 0,0004 \ 0,0049].$$

no qual o primeiro percurso de propagação manifestou-se na segunda e terceira posições, enquanto o segundo percurso manifestou-se na terceira e quarta posições.

No exemplo dado, o valor de  $h_{k,2}$  é composto de duas parcelas, cada uma referente a um percurso de propagação.

O método apresentado na sessão 5.3.1.1 é incapaz de resolver esse problema pois assume que o valor de  $h_3$  do exemplo é resultado de um único percurso de propagação.

Assim, a capacidade de discriminação normalmente proposta para este método é que percursos diferentes se manifestem em diferentes elementos do vetor  $h$ .

Esta restrição é bastante razoável uma vez que pode-se utilizar códigos de espalhamento com  $N \gg 1$ .

Contudo, é possível aumentar a complexidade do problema de otimização e desta forma melhorar a capacidade de discriminação dos percursos. Assim, um vetor  $\mathbf{h}$  do tipo

$$\mathbf{h} = [\sigma^2 \ \sigma^2 \ h_{k,2} \ h_{k,3} \ h_{k,4} \ \sigma^2 \ \sigma^2]$$

para o qual expressão 5.22 forneceria um resultado errado já que consideraria  $h_{k,3}$  como resultado de um único percurso, pode ser resolvido através de

$$\begin{aligned} [\alpha_\nu, \gamma_\nu, \mu, \alpha_{\nu+1}, \gamma_{\nu+1}] = \arg \min & \left| \hat{h}_{k,\nu} - (1 - \gamma_\nu) \alpha_\nu \right|^2 + \left| \mu \hat{h}_{k,\nu+1} - \gamma_\nu \alpha_\nu \right|^2 + \\ & + \left| (1 - \mu) \hat{h}_{k,\nu+1} - (1 - \gamma_{\nu+1}) \alpha_{\nu+1} \right|^2 + \left| \hat{h}_{k,\nu+2} - \gamma_{\nu+1} \alpha_{\nu+1} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde  $\mu < 1$  representa a parcela de  $\hat{h}_{k,\nu+1}$  devida ao primeiro percurso.

A equação (5.27) melhora a discriminação dos percursos para os casos mencionados, contudo, é importante lembrar que este é um problema de otimização não linear e portanto, sujeito a mínimos locais.

Para aplicações que não necessitam da capacidade de discriminação dada por (5.27), sugerimos adiante uma solução mais simples do que aquela apresentada em (5.22).

Retomando as expressões (5.11), (5.12) e (5.19):

$$\mathbf{u}_k^r = \sum_{p=1}^L \alpha_{k,p} [(1 - \gamma_{k,p}) \mathbf{a}_k^r(\nu_{k,p}) + \gamma_{k,p} \mathbf{a}_k^r(\nu_{k,p} + 1)]$$

$$\mathbf{u}_k^l = \sum_{p=1}^L \alpha_{k,p} [(1 - \gamma_{k,p}) \mathbf{a}_k^l(\nu_{k,p}) + \gamma_{k,p} \mathbf{a}_k^l(\nu_{k,p} + 1)].$$

$$\mathbf{u}_k^l = \mathbf{U}_k^l \mathbf{h}_k$$

$$\mathbf{u}_k^r = \mathbf{U}_k^r \mathbf{h}_k$$

Destas equações, para um determinado percurso  $p$  e um usuário  $k$ , pode-se escrever

$$\alpha_{k,p} (1 - \gamma_{k,p}) = h_{k,\nu} \quad (5.28)$$

$$\alpha_{k,p} \gamma_{k,p} = h_{k,\nu+1} \quad (5.29)$$

logo,  $h_{k,\nu} + h_{k,\nu+1} = \alpha_{k,p} = \alpha_\nu$  e portanto, de 5.29:

$$\gamma_{k,p} = \gamma_\nu = \frac{h_{k,\nu+1}}{\alpha_{k,p}} = \frac{h_{k,\nu+1}}{h_{k,\nu} + h_{k,\nu+1}}. \quad (5.30)$$

Desta forma, podemos utilizar as equações (5.25) e (5.26) para estimar o atraso:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \{0,1,\dots,N-1\}} |\alpha_\nu|$$

$$\hat{\tau} = (\hat{\nu} + \gamma_{\hat{\nu}}) T_c.$$

A partir da forma algébrica de resolução do problema pode-se derivar também uma simplificação do método para discriminação de percursos próximos, descrito

em 5.27.

Desta forma, seja  $\alpha^i$  o valor de  $\alpha$  calculado na iteração  $i$ . Se considerarmos como estimativa de  $\alpha$ ,

$$\hat{\alpha}^i = \alpha^{i-1} \quad (5.31)$$

poderemos então calcular a relação entre os coeficientes dos dois percursos vizinhos. Chamando o percurso que ocorre primeiro de  $p = 1$  e o segundo de  $p = 2$ , teremos:

$$\xi = \frac{\alpha_{k,p=1}}{\alpha_{k,p=2}} \quad (5.32)$$

logo,

$$\xi = \frac{h_{k,\nu} + h'_{k,\nu+1}}{(h_{k,\nu+1} - h'_{k,\nu+1}) + h_{k,\nu+2}} \quad (5.33)$$

e portanto,

$$h'_{k,\nu+1} = \frac{\xi (h_{k,\nu+1} + h_{k,\nu+2}) - h_{k,\nu}}{1 + \xi} \quad (5.34)$$

onde  $h'_{k,\nu+1}$  é a parcela de  $h_{k,\nu+1}$  referente ao primeiro percurso ( $p=1$ ).

Com (5.34) em mãos, procede-se da mesma forma que em 5.30 para estimar-se  $\gamma$  e o atraso  $\tau$ .

O novo valor de  $\xi$  calculado em 5.33 será utilizado na próxima iteração.

### 5.3.2 Estimando Amplitudes

No modelo apresentado, fase e potência foram agrupadas em um único coeficiente  $\mathbf{c}_i$ , vide (5.6). Como trabalhamos com estatísticas de segunda ordem, ou seja, matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , não poderemos recuperar informações de fase e portanto, esta informação deverá ser recuperada através de métodos tradicionais como uso de PLL, por exemplo.

Contudo, o módulo da amplitude ainda pode ser recuperado da forma apresentada a seguir.

Como assumimos modulação PSK, e em particular a BPSK, para qualquer

informação e códigos de espalhamentos, o módulo do sinal é constante para cada usuário, ou seja:  $|c_k^{(i)}|$  é constante. Evidentemente, estamos assumindo que a variação desta atenuação é lenta o suficiente para manter-se constante durante o intervalo de alguns símbolos, ou seja,  $|c_k^{(i)}| = |c_k|$ .

Assim, estimar a amplitude do sinal é equivalente a estimar  $|c_k|$ .

Lembrando que a matriz de correlação pode ser escrita na forma

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}_S + \sigma^2 \mathbf{I}$$

Então, podemos extrair a matriz de correlação do sinal,  $\hat{\mathbf{R}}_S$ , da matriz de correlação total  $\mathbf{R}$

$$[\hat{\mathbf{R}}_S \hat{\sigma}^2] = \arg \min_{\mathbf{R}_S, \sigma^2} \|\mathbf{R} - \mathbf{R}_S - \sigma^2 \mathbf{I}\|_2 \quad (5.35)$$

sendo que  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  e  $\mathbf{R}_S \in \mathbb{C}^N$  é uma matriz positiva semi-definida, de posto  $2K$ .

A solução de (5.35) é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (\lambda_{2K+1} + \lambda_N)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_S = \hat{\mathbf{V}}_S \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{V}}_S^\dagger \quad (5.36)$$

onde  $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(\lambda_1 - \hat{\sigma}_2, \dots, \lambda_{2K} - \hat{\sigma}_2)$ .

Como, nesta etapa, já teremos estimado os parâmetros de canal, de fato, teremos uma estimativa para os vetores de sinal  $\mathbf{u}_k^r$  e  $\mathbf{u}_k^l$ . Assim, definindo a matriz de sinal para um único usuário

$$\mathbf{A}_k \triangleq [\hat{\mathbf{u}}_k^r \ \hat{\mathbf{u}}_k^l] \in \mathbb{C}^{N \times 2}, \quad (5.37)$$

gostaríamos de encontrar  $|\hat{c}_k|$  tal que  $\hat{\mathbf{R}}_S - |\hat{c}_k|^2 \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^\dagger$  tenha posto  $2(K-1)$ , ou de forma equivalente:

$$\mathbf{I} - |\hat{c}_k|^2 \mathbf{A}_k^\dagger \hat{\mathbf{R}}_S^{-1} \mathbf{A}_k = 0. \quad (5.38)$$

Obviamente, devido aos erros na estimação da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , sat-

isfazer a equação (5.38) será impossível. Logo, é necessário buscar o melhor resultado de alguma forma, e novamente, pode-se utilizar a minimização da norma vetorial. Assim,

$$|\hat{c}_k| = \arg \min_{c_k} \left\| \mathbf{I} - |\hat{c}_k|^2 \mathbf{A}_k^\dagger \hat{\mathbf{R}}_S^{-1} \mathbf{A}_k \right\|_2 \quad (5.39)$$

que tem solução dada por

$$|\hat{c}_k| = \left( \frac{\mathbf{u}_k^{r\dagger} \hat{\mathbf{R}}_S^{-1} \mathbf{u}_k^r + \mathbf{u}_k^{l\dagger} \hat{\mathbf{R}}_S^{-1} \mathbf{u}_k^l}{2} \right)^{-1/2} \quad (5.40)$$

Este método para estimativa da amplitude, assim como qualquer método de estimativa de parâmetros baseado na decomposição em subespaços da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , apresenta a restrição de considerar o parâmetro constante durante o período de estimativa de  $\mathbf{R}$ . No capítulo 7 veremos que este período deve ser equivalente a pelo menos vinte símbolos.

## 6 Aspectos Analíticos

Neste capítulo são ressaltados alguns aspectos analíticos que serão úteis na análise dos resultados de simulações apresentadas no capítulo 7. Estes resultados podem ser encontrados em [26]-[30].

Considerando-se a expressão (5.6):

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i + \eta_i \quad (6.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, J.$$

com o vetor de observação  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,  $J$  o número de amostras,  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{C}^{2K \times 1}$  é vetor de amplitude de sinal, que agrega informações de potência, fase e símbolos transmitidos,  $\eta_i \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  um vetor ruído e a matriz  $\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1^r \ \mathbf{u}_1^l \ \dots \ \mathbf{u}_K^r \ \mathbf{u}_K^l] \in \mathbb{C}^{N \times 2K}$ , onde  $K$  é o número de usuários.

Neste estudo estamos centrados na estimativa de parâmetros de canal para um sistema DS-CDMA, assim, os vetores que compõem a matriz  $\mathbf{A}$  dependem do código de espalhamento e dos atrasos destes códigos com relação à amostragem no receptor,  $\tau_i$ .

Contudo, os resultados apresentados a seguir são absolutamente genéricos, aplicáveis a quaisquer parâmetros que se deseje estimar em diferentes aplicações. Para enfatizar este fato, consideraremos uma matriz  $\mathbf{A}(\theta)$ , tal que:

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{m}(\theta_1) \ \dots \ \mathbf{m}(\theta_{2K})] \quad (6.2)$$

Onde  $\{\theta_i\}$  é um parâmetro real e  $\mathbf{m}(\theta_i) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é um "vetor de transferência" entre o  $i$ -ésimo sinal e o vetor de observação,  $\mathbf{y}$ , e  $\theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_{2K}]^T$ . Exemplificando, no caso particular que estamos estudando, o vetor  $\theta$  é função dos atrasos que se deseja estimar e os vetores  $\mathbf{m}(\theta_i)$  são formados pelos códigos de espalhamento de usuários, em função destes atrasos.

Existem três problemas de estimativas associados a este modelo:

a) Estimação do número de sinais,  $2K$ , que neste caso é igual a duas vezes o número de usuários no sistema e consideraremos conhecido. Existem várias abordagens para este tema documentadas em literatura [32][33].

b) Estimação das amplitudes dos sinais,  $\{\mathbf{c}_i\}$ . Uma vez tendo disponível a estimação dos parâmetros  $\theta$ , a estimação de amplitudes do sinal reduz-se normalmente a um problema de otimização.

c) Estimação do vetor de parâmetros  $\theta$ . Este é o principal objeto de estudo neste texto. Este capítulo está voltado à observação de alguns aspectos analíticos do algoritmo *MUSIC*, apresentados adiante.

## 6.1 Resultados do Limitante Inferior de Cramér-Rao

Como a CRB é o melhor resultado que se pode atingir em termos de variância de estimadores, é interessante tê-lo à mão como base para análise da eficiência destes estimadores.

Assim, o objetivo desta seção é apresentar a CRB e sua variância, para depois, na seção seguinte, compará-la ao estimador *MUSIC*.

Assumindo-se que:

- $N > 2K$  e que os vetores  $\mathbf{m}(\theta_k)$  correspondentes a diferentes valores de  $\theta_k$  são linearmente independentes;
- $E[\eta_i] = 0$  e  $E[\eta_i \eta_i^\dagger] = \sigma^2 I$ .

Sob estas condições pode-se derivar o limitante inferior de *Cramér-Rao* sobre a matriz de covariância de qualquer estimador não-viciado de  $\theta$  e  $\sigma^2$ .

Assim, dentro das premissas adotadas, a CRB para  $\theta$  e  $\sigma^2$  é dada por

$$\text{CRB}(\theta) = \text{frac} \sigma^2 2 \left\{ \sum_{i=1}^J \text{Re} \left[ \mathbf{C}_i \mathbf{D}'^\dagger \left[ I - \mathbf{A} (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right] \mathbf{D}' \mathbf{C}_i \right] \right\}^{-1} \quad (6.3)$$

e

$$\text{var}_{\text{CR}}(\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{NJ} \quad (6.4)$$

onde

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{2K} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \left[ \frac{d\mathbf{m}(\theta_1)}{d\theta} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{m}(\theta_{2K})}{d\theta} \right]$$

Outro resultado importante é que a matriz de covariância em 6.3 satisfaz as relações

$$\text{CRB}(J) \geq \text{CRB}(J + 1) \quad (6.5)$$

$$\text{CRB}(N) \geq \text{CRB}(N + 1). \quad (6.6)$$

Ou seja, a CRB decresce com  $J$  e/ou  $N$  crescentes.

Para  $J$  suficientemente grande, segue de 6.3 que a CRB será dada por:

$$\text{CRB}(N, \infty) = \frac{\sigma^2}{2J} \left\{ \text{Re} \left[ \left\{ \mathbf{D}'^\dagger \left[ I - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right] \mathbf{D}' \right\} \odot P^T \right] \right\}^{-1} \quad (6.7)$$

onde  $P = E[\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger]$  e o operador  $\odot$  denota o produto de Hadamard.

Na próxima seção veremos que o estimador *MUSIC* está próximo da CRB para  $N$  grande, assim, quanto maior o tamanho da seqüência de espalhamento, melhor o desempenho do estimador.

## 6.2 Distribuição Assintótica do MUSIC

Considerando a matriz de correlação dos vetores de observação,  $\mathbf{R} = E[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger]$ , seus autovalores,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , os subespaços de sinal e ruído conforme definidos em (5.15), e denotando os autovetores associados aos  $2K$  autovalores por:

$$\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_{S1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{S2K}] \quad (N \times 2K)$$

$$\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_{N1} \cdots \mathbf{v}_{N(N-2K)}] \quad (N \times 2K) \quad (6.8)$$

e a estimativa da matriz de correlação  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger$  podemos escrever os seguintes resultados para o algoritmo *MUSIC*:

a) Os erros das estimativas  $(\hat{\mathbf{v}}_{Si} - \mathbf{v}_{Si})$  têm distribuição assintoticamente gaussiana, para  $J$  grande, com média zero e matriz de covariância dada por:

$$\begin{aligned} & E [(\hat{\mathbf{v}}_{Si} - \mathbf{v}_{Si})(\hat{\mathbf{v}}_{Sj} - \mathbf{v}_{Sj})^\dagger] \\ &= \frac{\lambda_i}{J} \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{2K} \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)^2} \mathbf{v}_{Sk} \mathbf{v}_{Sk}^\dagger + \sum_{k=1}^{N-2K} \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \lambda_i)^2} \mathbf{v}_{Nk} \mathbf{v}_{Nk}^\dagger \right] \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} & E [(\hat{\mathbf{v}}_{Si} - \mathbf{v}_{Si})(\hat{\mathbf{v}}_{Sj} - \mathbf{v}_{Sj})^T] \\ &= \frac{\lambda_i \lambda_j}{J(\lambda_i - \lambda_j)^2} \mathbf{v}_{Sj} \mathbf{v}_{Si}^T (1 - \delta_{i,j}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

b) As projeções ortogonais de  $\hat{\mathbf{v}}_{Ni}$  sobre os vetores coluna de  $\mathbf{V}_S$  têm distribuição assintoticamente gaussiana, para  $J$  grande, com média zero e matriz de covariância dada por:

$$\begin{aligned} & E [(\mathbf{V}_S \hat{\mathbf{V}}_S^\dagger \hat{\mathbf{v}}_{Ni})(\mathbf{V}_S \hat{\mathbf{V}}_S^\dagger \hat{\mathbf{v}}_{Nj})^\dagger] \\ &= \frac{\sigma^2}{J} \left[ \sum_{k=1}^{2K} \frac{\lambda_k}{(\sigma^2 - \lambda_k)^2} \mathbf{v}_{Sk} \mathbf{v}_{Sk}^\dagger \right] \delta_{i,j} \\ &\triangleq \frac{1}{J} U \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$E [(\mathbf{V}_S \hat{\mathbf{V}}_S^\dagger \hat{\mathbf{v}}_{Ni})(\mathbf{V}_S \hat{\mathbf{V}}_S^\dagger \hat{\mathbf{v}}_{Nj})^T] = 0 \quad \text{para todo } i, j \quad (6.12)$$

c) Os erros de estimação do *MUSIC*,  $\{\hat{\theta}_i - \theta_i\}$  têm distribuição assintoticamente gaussiana, com média zero e covariância dada por:

$$\begin{aligned}
& E[(\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j)] \\
&= \frac{1}{2J} \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{d\mathbf{m}^\dagger(\theta_j)}{d\theta_j} \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^\dagger \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{m}^\dagger(\theta_i) U \mathbf{m}(\theta_j) \right\}}{\frac{d\mathbf{m}^\dagger(\theta_j)}{d\theta_j} \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^\dagger \frac{d\mathbf{m}(\theta_j)}{d\theta_j} \frac{d^\dagger \mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^\dagger \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i}}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

onde  $U$  é definido em (6.11).

A variância do erro de estimativa é obtida de (6.13)

$$\begin{aligned}
E[(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2] &= \frac{1}{2J} \frac{\mathbf{m}^\dagger(\theta_i) U \mathbf{m}(\theta_i)}{\frac{d^\dagger \mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^\dagger \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i}} \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{k=1}^{2K} \frac{\lambda_k}{(\sigma^2 - \lambda_k)^2} \left| \mathbf{m}^\dagger(\theta_i) \mathbf{v}_{Nk} \right|^2}{2J \sum_{k=1}^{N-2K} \left| \frac{d\mathbf{m}^\dagger(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{v}_{Nk} \right|^2}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Dos itens a, b e c, conclue-se que os erros de estimativa decrescem com o aumento de  $J$ .

d) Para sinais não-correlacionados, a variância do erro de estimativa decresce com o aumento de  $N$ .

Podemos escrever uma relação mais conveniente para 6.14:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{2J} \left[ \frac{\sum_{k=1}^{2K} \left( \frac{1}{\lambda_k - \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{(\lambda_k - \sigma^2)^2} \right) \left| \mathbf{m}^\dagger(\theta_i) \mathbf{v}_{Sk} \right|^2}{\sum_{k=1}^{N-2K} \left| \frac{d\mathbf{m}^\dagger(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{v}_{Nk} \right|^2} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2J} \left[ \frac{\mathbf{m}^\dagger(\theta_i) \left( \mathbf{V}_S \overset{\circ}{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}_S^\dagger + \sigma^2 \mathbf{V}_S \overset{\circ}{\Lambda}^2 \mathbf{V}_S^\dagger \right) \mathbf{m}(\theta_i)}{\frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i} \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^\dagger \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta_i}} \right]
\end{aligned} \tag{6.15}$$

onde

$$\overset{\circ}{\Lambda} \triangleq \Lambda - \sigma^2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2K} \end{bmatrix} - \sigma^2 \mathbf{I}.$$

Utilizando (3.4), pode-se escrever:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{V}_S\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_S^\dagger + \sigma^2\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^\dagger = \mathbf{V}_S\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{V}_S^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}$$

o que implica em

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}_S\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{V}_S^\dagger$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}_S\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}^2\mathbf{V}_S^\dagger$$

e portanto,

$$\left(\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{A}\right)\mathbf{R}_S\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V}_S\right) = \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$$

$$\left(\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{A}\right)\mathbf{R}_S\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\right)\mathbf{R}_S\left(\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{V}_S\right) = \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}^2 \quad (6.16)$$

Já que as colunas de  $\mathbf{A}$  geram o subespaço  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{A}$  tem posto máximo, segue que a matriz  $\mathbf{S}^\dagger\mathbf{A}$  não é singular e

$$\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^\dagger = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}. \quad (6.17)$$

A não singularidade de  $\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{A}$  e 6.16 fornecem

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V}_S\right)\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\left(\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{A}\right) = \mathbf{R}_S^{-1}$$

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{V}_S\right)\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}^{-2}\left(\mathbf{V}_S^\dagger\mathbf{A}\right) = \mathbf{R}_S^{-1}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{R}_S^{-1}. \quad (6.18)$$

Utilizando-se 6.17 e 6.18 em 6.15, chega-se a

$$\text{var}_{MU}(\hat{\theta}_i) = \frac{\sigma^2}{2J} \left\{ \frac{\left[ \mathbf{R}_S^{-1} \right]_{ij} + \sigma^2 \left[ \mathbf{R}_S^{-1} \left( \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{R}_S^{-1} \right]_{ij}}{\frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right] \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta}} \right\} \quad (6.19)$$

onde  $(\cdot)_{ij}$  denota os elementos da matriz em questão.

A relação (6.19) está em uma forma conveniente para se comparar a variância

do erro do *MUSIC* com a CRB. Para isto, retomemos a expressão (6.7),

$$\text{CRB}(\hat{\theta}_i) = \left[ \frac{\sigma^2}{2J} \left\{ \text{Re} \left[ \left\{ \mathbf{D}'^\dagger \left[ I - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \right] \mathbf{D}' \right\} \odot P^T \right] \right\}^{-1} \right]_{i,j}.$$

No caso particular em que os sinais são não-correlacionados, a matriz  $\mathbf{R}_S$  é diagonal e as expressões (6.7) e (6.19) reduzem-se a

$$\text{var}_{MU}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{2J(SNR)_i} \left[ \frac{1 + \frac{[(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1}]_{i,j}}{(SNR)_i}}{\frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta} [I - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger] \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta}} \right] \quad (6.20)$$

e

$$\text{var}_{CR}(\hat{\theta}_i) = \frac{\left( \frac{1}{2J(SNR)_i} \right)}{\frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta} [I - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger] \frac{d\mathbf{m}(\theta_i)}{d\theta}} \quad (6.21)$$

onde  $(SNR)_i = \mathbf{R}_S/\sigma^2$ .

De (6.20) e (6.21):

$$\frac{\text{var}_{MU}}{\text{var}_{CR}} = 1 + \frac{[(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1}]_{ii}}{SNR_i} \quad (6.22)$$

que expressa a relação entre as variâncias do estimador *MUSIC* e do limite inferior de Cramér-Rao.

É interessante notar que como  $[(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1}]_{ii}$  e  $\text{var}_{CR}$  (vide 6.4) decrescem monotonicamente com o aumento de  $N$ , da expressão 6.22 pode-se afirmar que isto também ocorre para  $\text{var}_{MU}$ , ou seja, existem valores de  $N$  para os quais a eficiência do estimador *MUSIC* é próxima a um.

Assim, dos resultados analíticos apresentados, pode-se observar alguns pontos que serão importantes para compreensão e validação da análise numérica que será feita no capítulo 7:

1. O estimador utilizado é não-viciado e assintoticamente consistente.
2. A variância do estimador pode assumir valores altos quando alguns autovetores  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2K}$  assumem valores próximos a  $\sigma^2$ . Isto ocorre em baixa relação sinal-ruído ou com sinais altamente correlacionados.
3. Do item anterior, pode-se concluir que o desempenho do algoritmo só fa-

variável quando os sinais não são correlacionados.

4. A variância também pode assumir valores altos quando o vetor  $\frac{d\mathbf{m}^\dagger(\theta_i)}{d\theta_i}$  é quase ortogonal a  $\{\mathbf{v}_{Nk}\}$
5. A variância do estimador decresce com o aumento de  $N$  assim como com o aumento de  $J$ .

## 7 Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados todos os resultados numéricos obtidos em simulações com o algoritmo em estudo. Os resultados são apresentados em três seções relativas a três cenários:

*Cenário 1:* único usuário, ruído aditivo gaussiano e canal invariante.

Por canal *invariante*, entenda-se que os parâmetros que se deseja estimar, atraso e amplitude, não variam no tempo. Este cenário, apesar de ser hipotético, é fundamental para entendimento de como as variáveis (tamanho de janela, relação sinal-ruído e tamanho da sequência) influenciam no desempenho do estimador. Adicionalmente, serve como base para a escolha de valores padrões para estas mesmas variáveis nos cenários mais complexos.

*Cenário 2:* multiusuários (*MAI*), na presença de ruído aditivo gaussiano e canal invariante.

Este cenário, ainda hipotético, auxilia na percepção da degradação do sistema com a inserção de outros usuários e mostra o desempenho do estimador ao efeito *near-far* quando a potência dos usuários indesejados é aumentada enquanto a potência do usuário desejado é mantida constante.

*Cenário 3:* multiusuários na presença de ruído aditivo gaussiano, canal variante e multipercursos.

Neste cenário é apresentado o desempenho do estimador em um canal próximo ao canal real, em ambientes com mobilidade do receptor ou de objetos móveis (refletores ou espalhadores) à sua volta.

Em todos os cenários buscou-se avaliar o algoritmo alterando-se separadamente cada uma das variáveis que o influenciam e quando aplicável, foi comparado ao *slide correlator*.

Após a apresentação destes três cenários discute-se duas formas de implementação do algoritmo, uma utilizada na referência [15], transcrita na seção 5.3.1.1, e outra forma proposta neste trabalho, conforme 5.3.1.2, além de dis-

cutir outros aspectos relevantes como a escolha de seqüências, carregamento e complexidade computacional.

## 7.1 Cenário 1: Único Usuário em Canal Invariante

As seções 7.1.1 e 7.1.2 tratam da estimação de atrasos e amplitudes, respectivamente, em canal fixo para estes parâmetros.

### 7.1.1 Estimativas de Atrasos

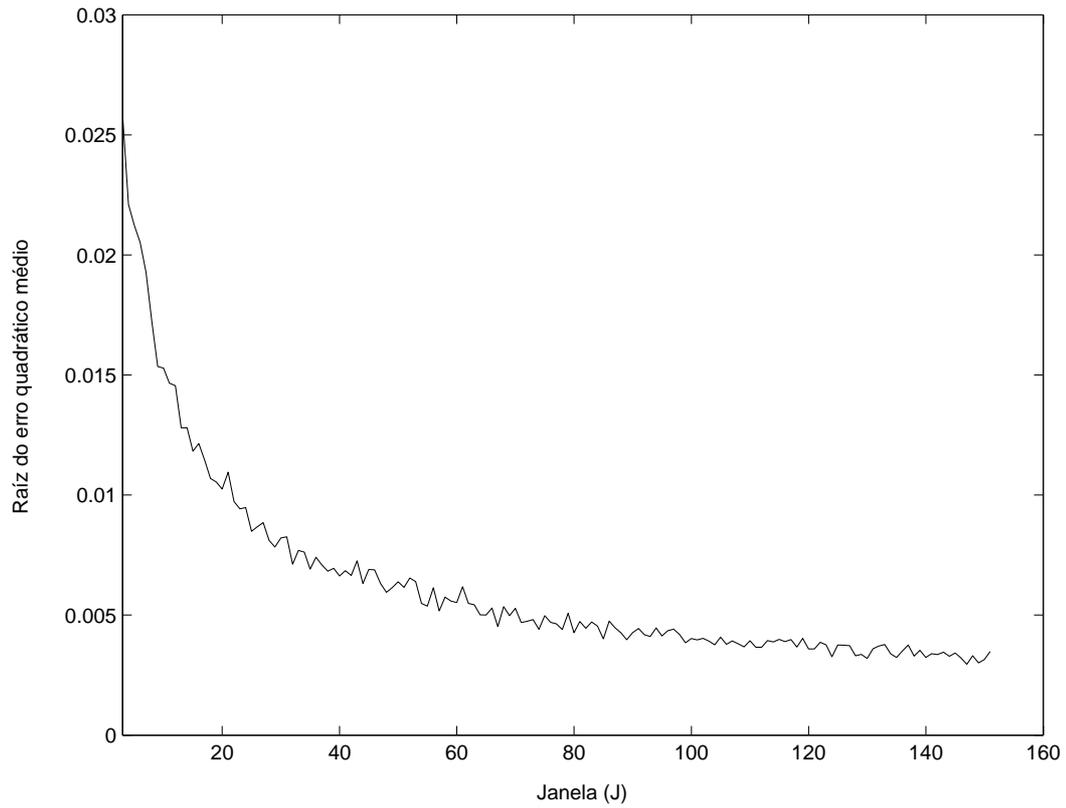
Os gráficos apresentados mostram o desempenho do algoritmo geométrico:

1. Em relação ao tamanho da janela e ao comprimento das seqüências de espalhamento (figuras 7.1 e 7.2), com a relação sinal-ruído fixa em 12 dB;
2. Em função da variação da relação sinal-ruído, comparando com o desempenho do *sliding correlator* na figura 7.3; e
3. A figura 7.4 indica, em função da janela, a probabilidade de aquisição, definida como a probabilidade de que  $|\tau_k - \hat{\tau}_k|$  seja menor do que um valor  $\delta$ . Aqui foi escolhido  $\delta = 0,0625$  pois este valor é o limite de desempenho do estimador *sliding* com passo de um quarto de chip (vide seção 4.4).

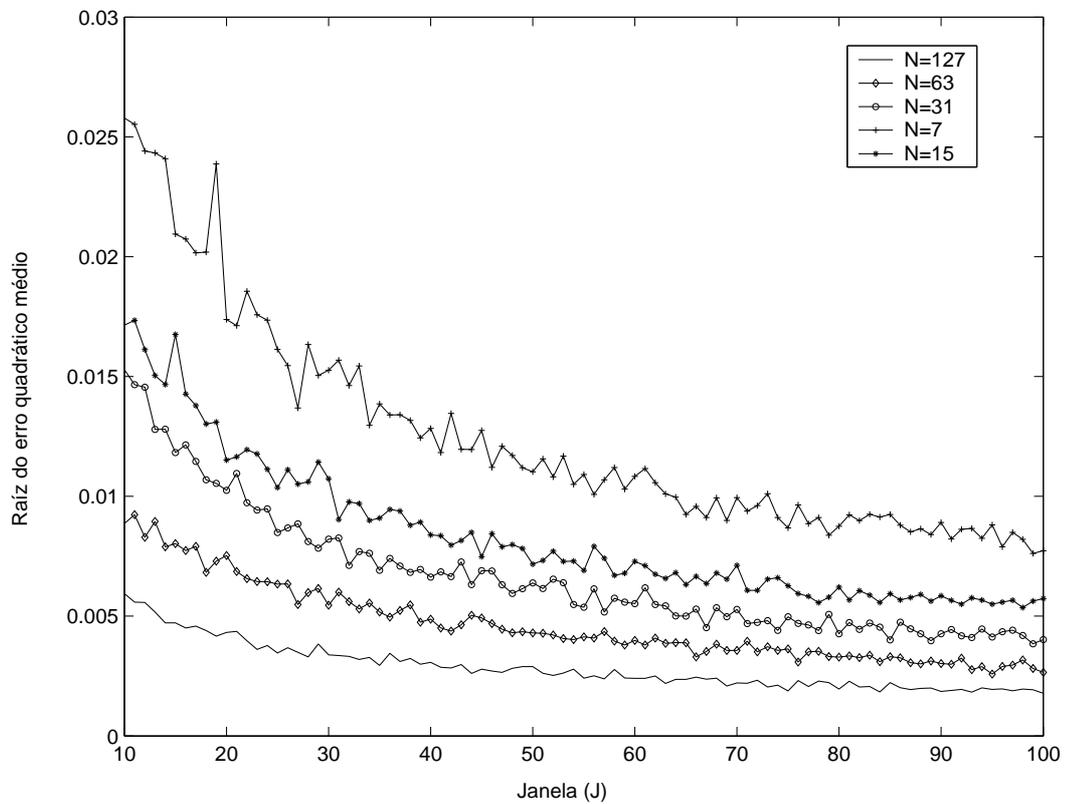
#### Comentários

A figura 7.1 mostra que a janela para estimativa da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  deve ser superior a vinte amostras pois, para números inferiores o algoritmo diverge rapidamente. Portanto, um região de trabalho interessante está entre vinte e sessenta amostras, pois números superiores a sessenta amostras implicam em um "custo" computacional alto para pequena melhoria no desempenho. Adicionalmente, um número muito grande de amostras reduz a capacidade de adaptação do algoritmo, o que é fundamental em canais variantes, como será visto na seção 7.3.

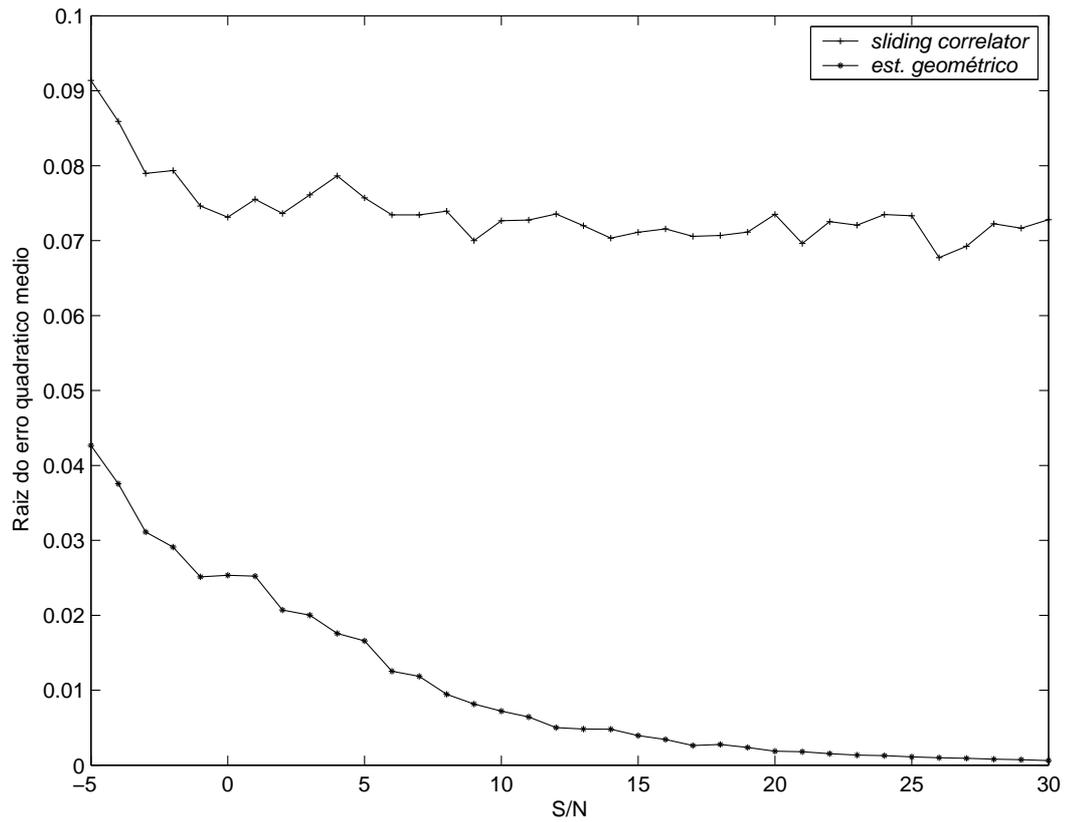
Na figura 7.2 pode-se observar aumento de desempenho significativo com o aumento do comprimento da seqüência de espalhamento. Este resultado é esperado intuitivamente, pois o tamanho da seqüência,  $N$ , é proporcional à dimensão do subespaço de ruído. O capítulo 6, seção 6.2, mostra de forma analítica a confirmação desse resultado para o algoritmo *MUSIC*. O comprimento da seqüência



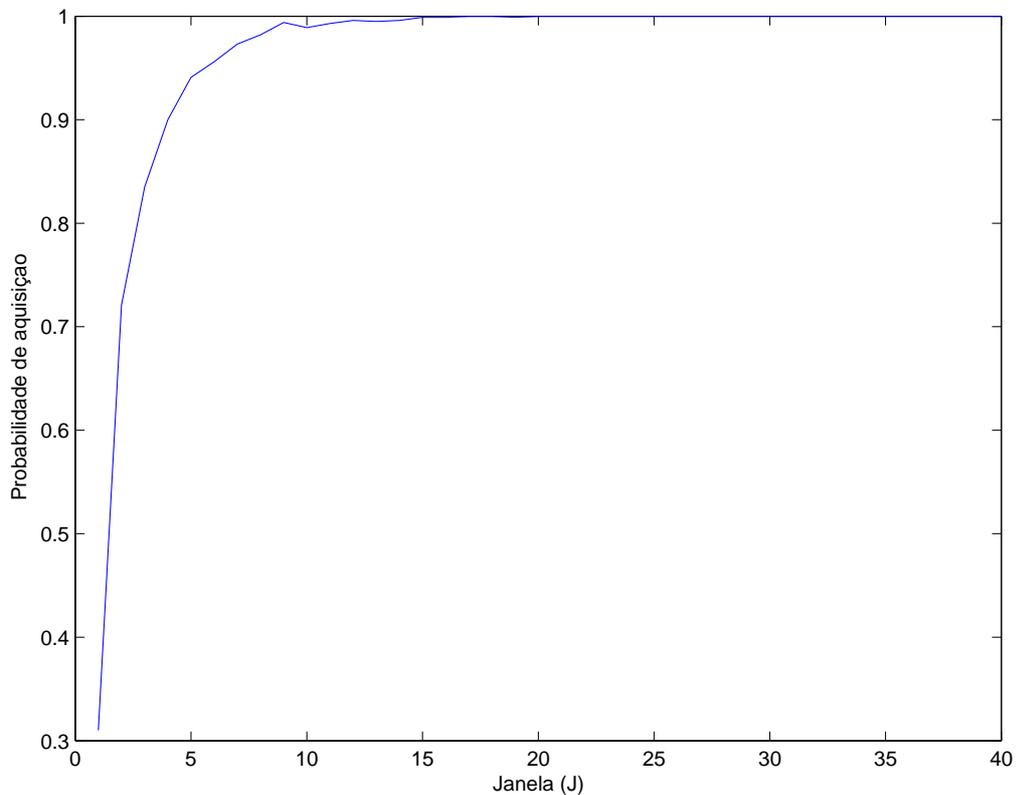
**Figura 7.1:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $K=1$ ]



**Figura 7.2:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) e do comprimento da sequência [ $S/N=12$  dB,  $K=1$ ]



**Figura 7.3:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J=60$ ,  $N=31$ ,  $K=1$ ]



**Figura 7.4:** Probabilidade de aquisição em função da janela (J) [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $K=1$ ,  $\delta = .0625$ ]

também determina a quantidade máxima de usuários, como visto no capítulo 4,  $2K < N$ , logo, o uso de seqüências longas é duplamente interessante. Em contrapartida, a complexidade computacional exigida também aumenta com  $N$ .

A figura 7.3 mostra que o desempenho do algoritmo geométrico é superior em relação ao *sliding correlator*. Deve-se notar aqui que o erro mínimo que o *sliding correlator* pode atingir depende da fração de chips que é utilizada para fazer-se o deslocamento de códigos. Desta forma, a partir de certa relação sinal-ruído ideal (no cenário em estudo aproximadamente 0 dB), o erro torna-se invariante às alterações na relação sinal-ruído.

A figura 7.4 é apenas uma forma diferente de se observar o resultado já verificado através da figura 7.1. Fica evidente por este gráfico que, em canal invariante, uma janela de vinte amostras é suficiente para garantir um desempenho satisfatório do estimador.

### 7.1.2 Estimativas de Amplitudes

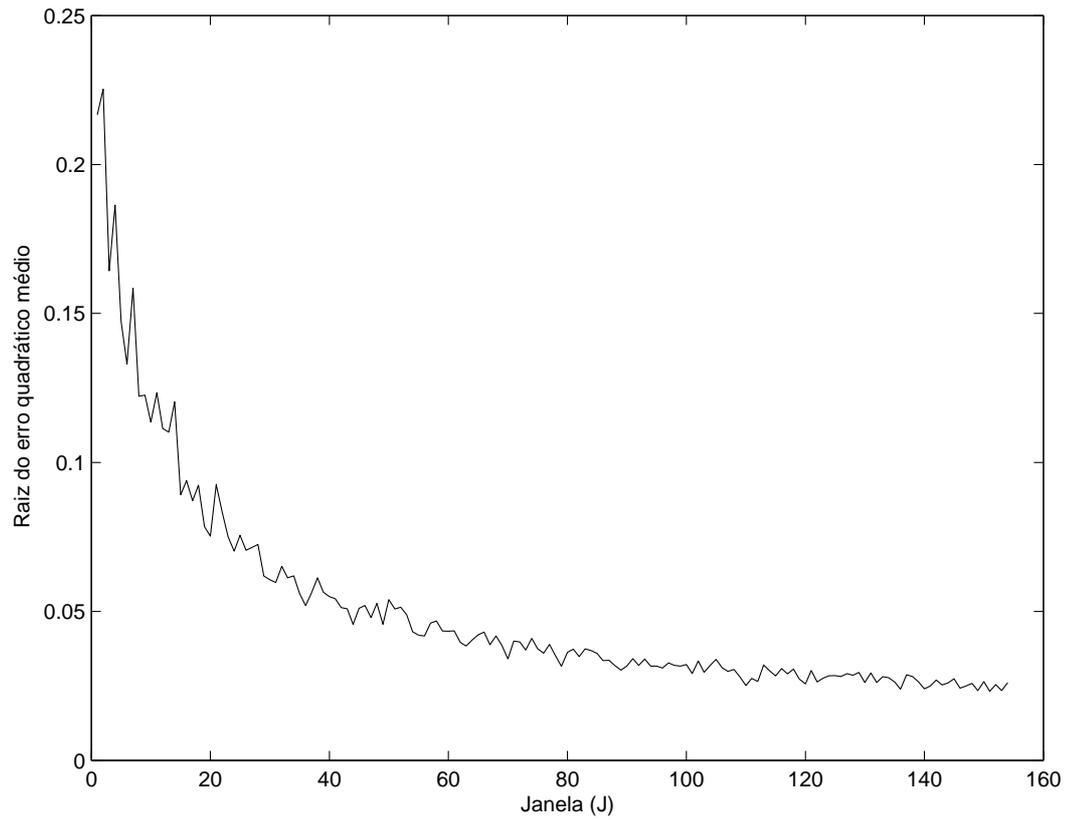
Os gráficos desta seção, analogamente à seção anterior, mostram o desempenho do algoritmo geométrico para estimação de amplitudes:

1. Em relação ao tamanho da janela e comprimento dos códigos (figuras 7.5 e 7.6), com a relação sinal-ruído fixa em 12 dB; e
2. Em função da variação da relação sinal-ruído, figura 7.7.

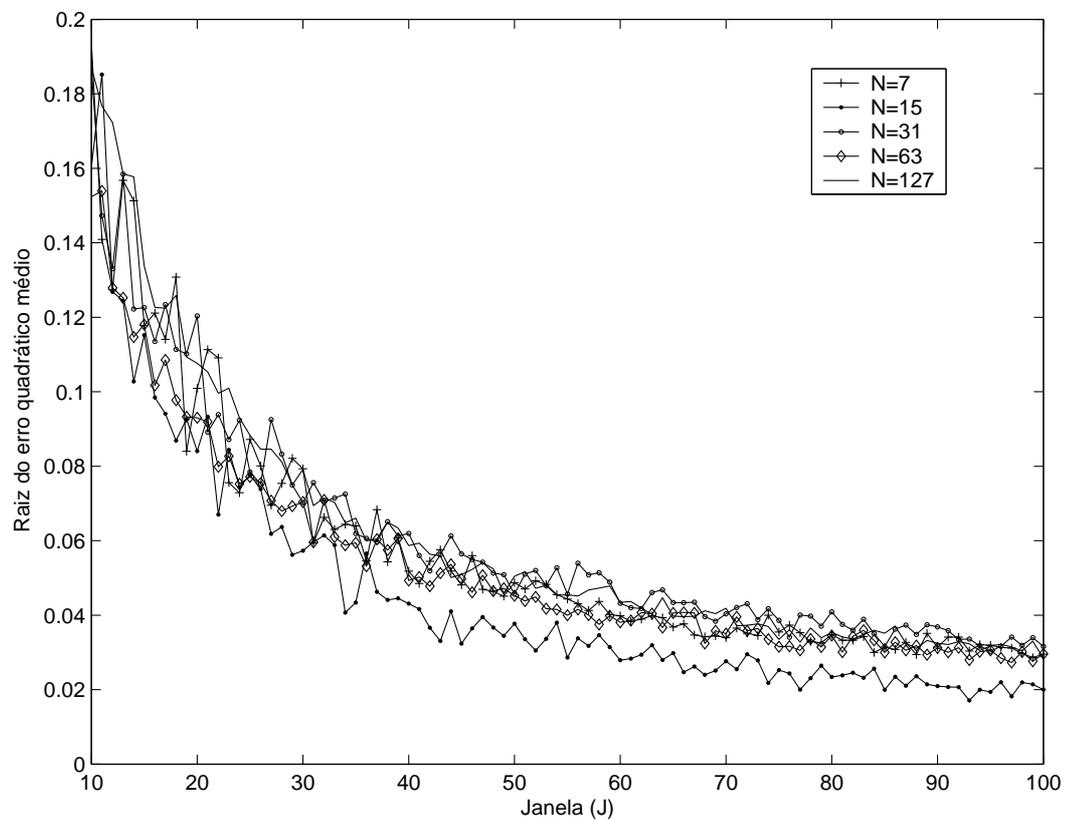
#### Comentários

Alterando-se o tamanho da janela, figura 7.5, nota-se que o comportamento do algoritmo para estimação de amplitude é muito semelhante ao comportamento para estimação de atrasos, ou seja, a curva de erro cai rapidamente até vinte amostras e estabiliza-se com número superior a cem amostras. Desta forma pode-se estabelecer como regra prática para o cálculo de  $\mathbf{R}$  o número mínimo de vinte amostras para o tamanho da janela, contudo, dependendo da aplicação, pode ser interessante reduzir o número de amostras para ganhar-se em adaptabilidade, ao custo de maior erro na estimativa.

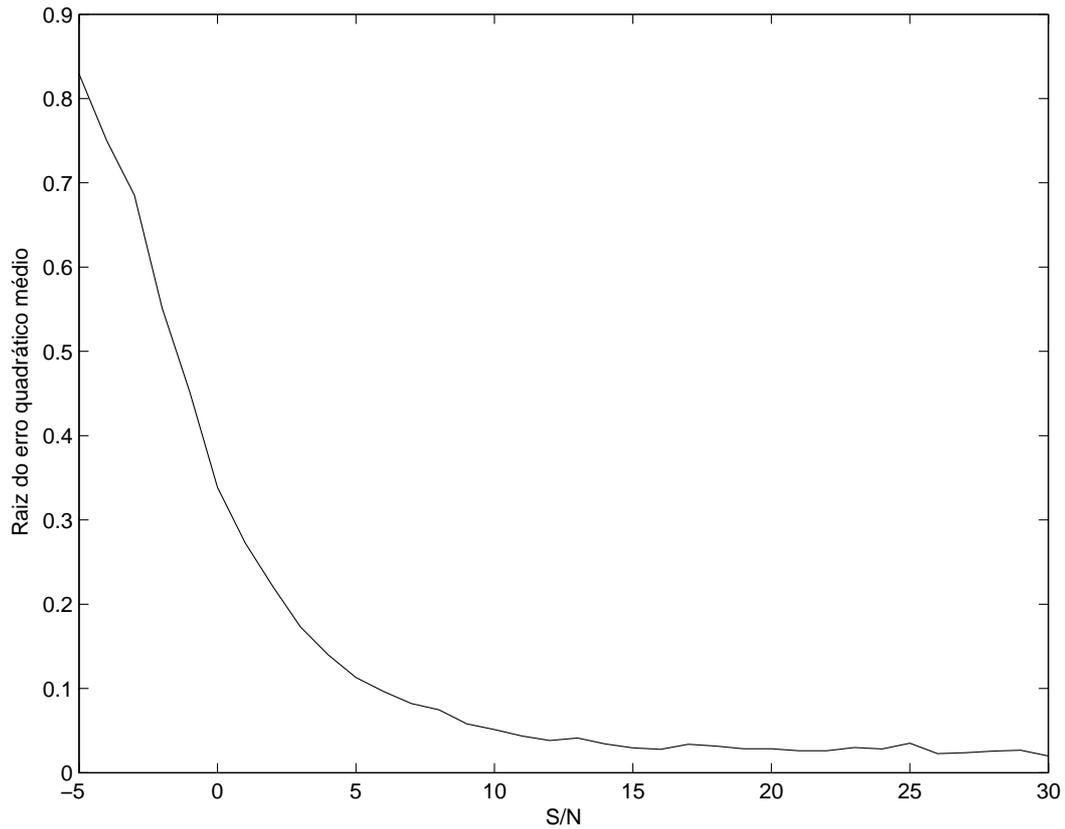
Esta semelhança de comportamento é muito favorável para aplicações já que utilizando-se janela única para a estimação de atrasos e amplitudes salva-se esforço computacional.



**Figura 7.5:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $K=1$ ]



**Figura 7.6:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela (J) e do comprimento da seqüência [ $K=1$ ,  $S/N=12$  dB]



**Figura 7.7:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J=60$ ,  $N=31$ ,  $K=1$ ]

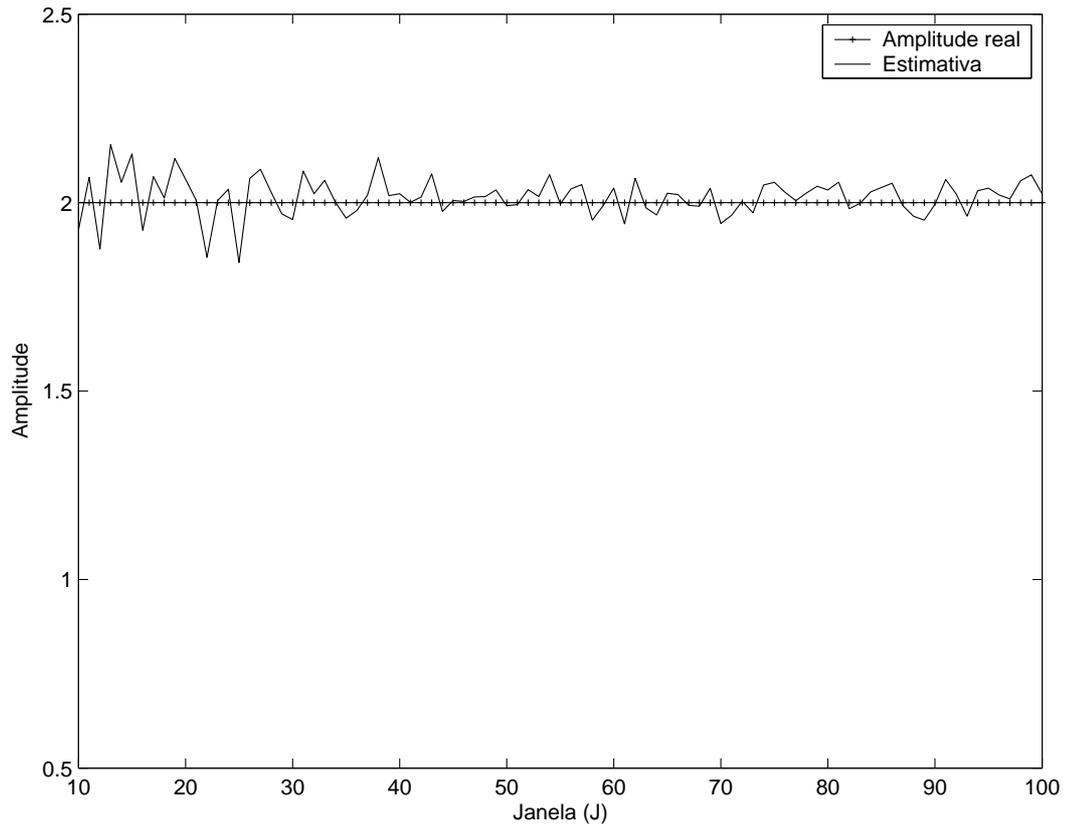
Outro ponto a ser observado na figura 7.5 é que o erro na estimação da amplitude é da ordem de dez vezes maior do que o erro na estimação de atrasos. Isto é uma característica do algoritmo e não se deve a vício de estimativas, como pode-se notar na figura 7.8.

O gráfico da figura 7.6 evidencia que para a estimativa de amplitude o comprimento da seqüência não tem influência sobre o resultado. E através da figura 7.7 fica claro o limite inferior para o erro médio quadrático na estimativa de amplitudes.

## 7.2 Cenário 2: Múltiplos Usuários em Canal Invariante

### 7.2.1 Estimativas de Atrasos

Em ambiente multiusuário pode-se verificar a resistência do algoritmo estimador geométrico ao efeito *near-far*. Este cenário ainda hipotético para as comunicações móveis, nas quais a presença de *fading* e outras variações do canal é constante, começa a ser útil para outros tipos de comunicação, como por ex-



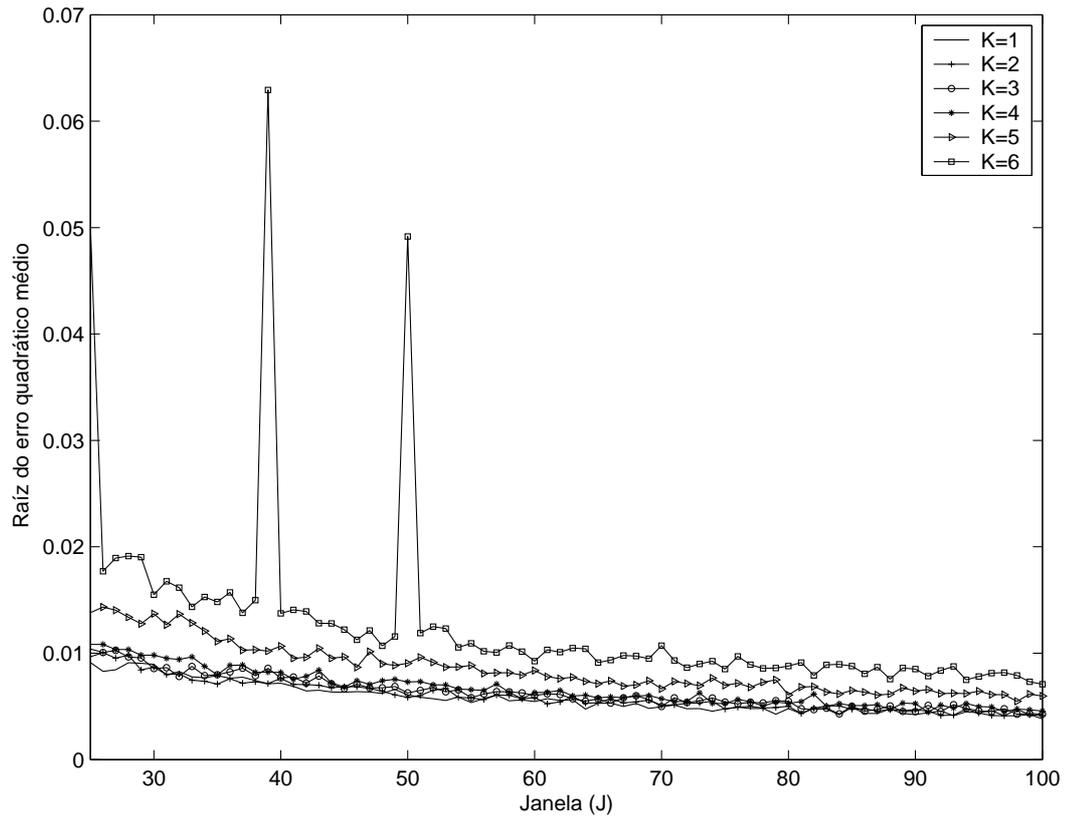
**Figura 7.8:** Amplitude estimada em função da janela (J) [ $N=31$ ,  $S/N = 12$  dB,  $K=1$ ]

emplo o rádio-enlace, já que, dentro de determinadas circunstâncias (ausência de anteparos móveis, chuvas etc), pode-se ter um canal relativamente estável. Neste cenário os seguintes casos foram estudados:

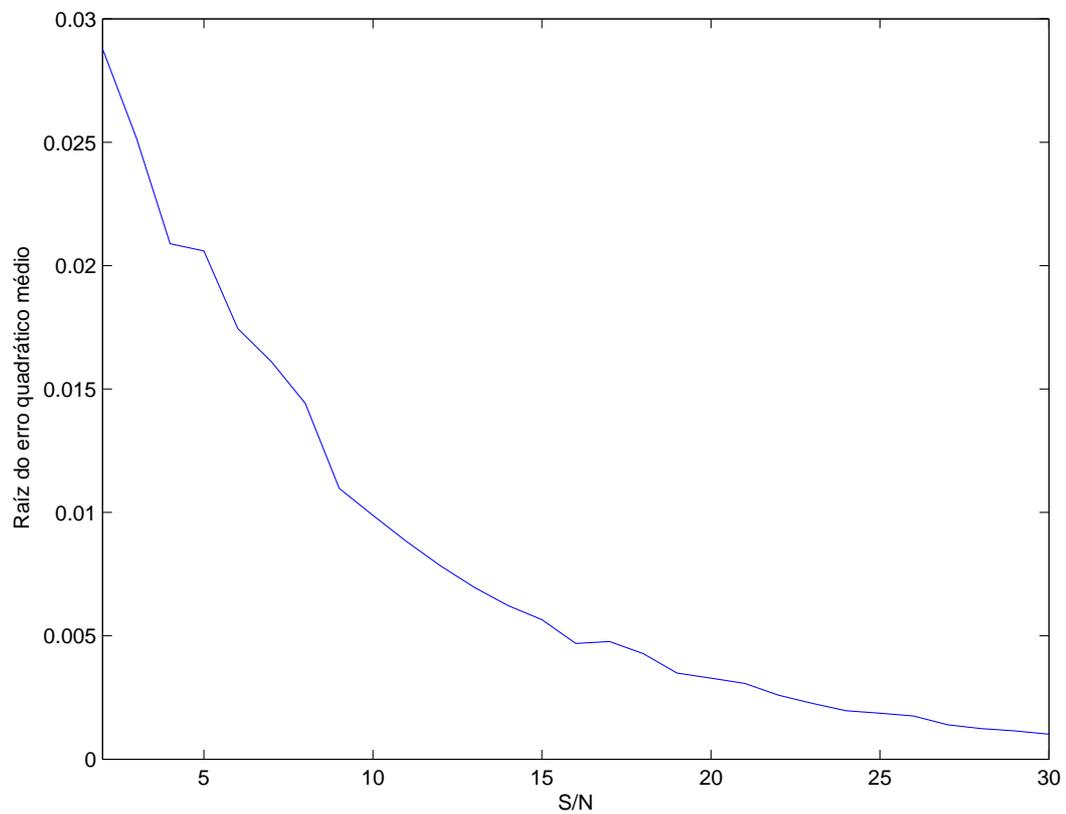
1. Na figura 7.9 é apresentado o comportamento do estimador em função do número de usuários e tamanho da janela de amostragem;
2. O desempenho em função da relação S/N com  $K = 5$  é analisado com base no gráfico da figura 7.10 e na figura 7.11, faz-se a comparação com o *sliding correlator* em  $K = 2$ , já que com o comprimento de seqüência utilizado o *sliding* não converge para  $K=5$ ;
3. A figura 7.12, comprova que a janela de trabalho identificada na seção anterior continua válida em ambiente multiusuário; e
4. A figura 7.13 mostra a característica de resistência ao efeito *near-far*.

Neste estudo, a *MAI* foi definida como a relação de potência entre cada um dos quatro usuários interferentes e o usuário desejado.

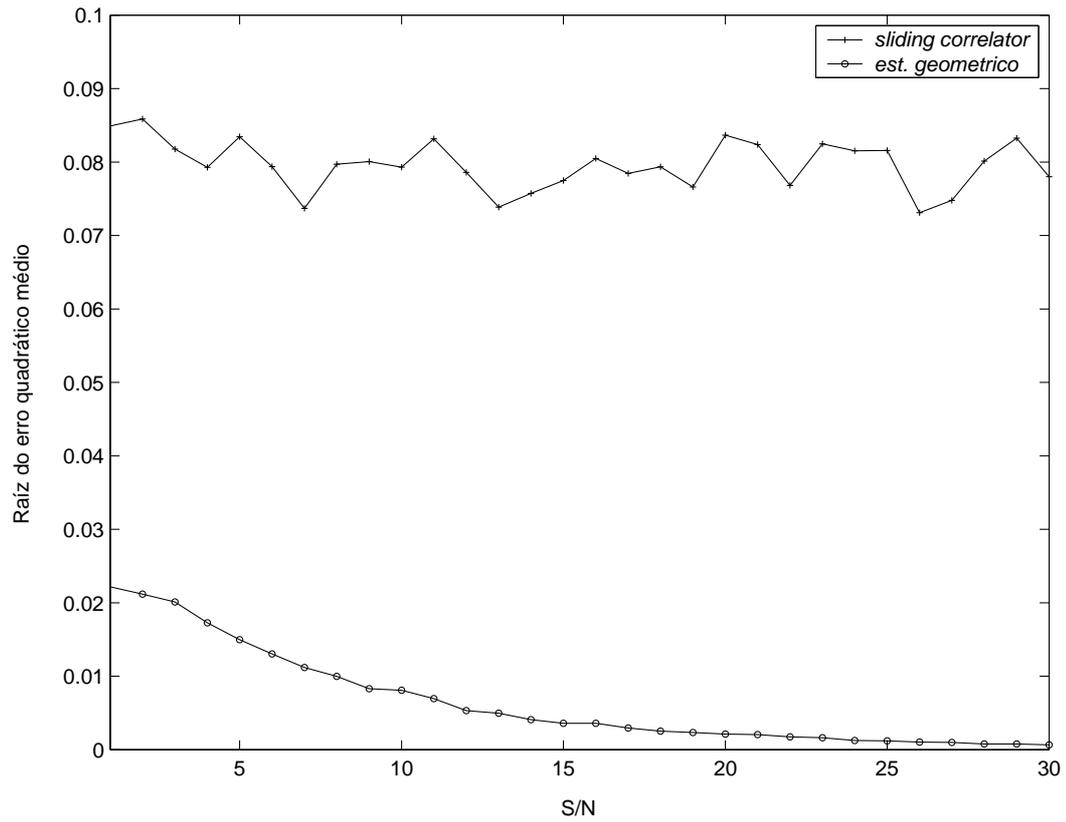
### Comentários



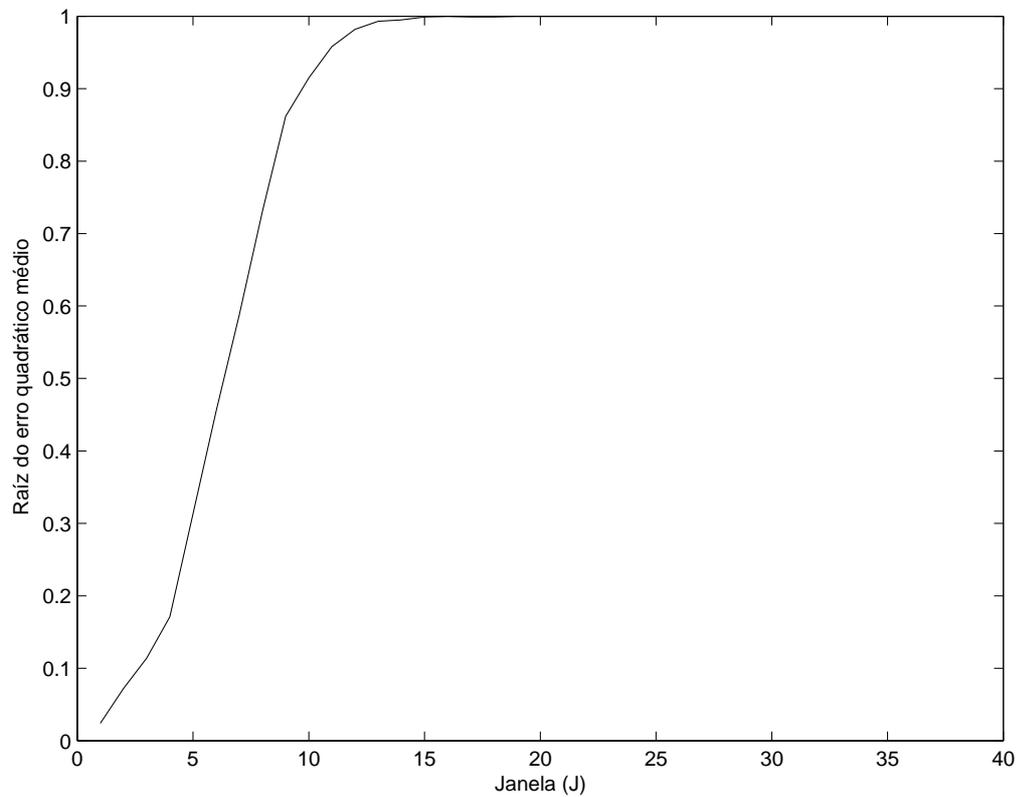
**Figura 7.9:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela ( $J$ ) e do número de usuários [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $MAI=0$  dB]



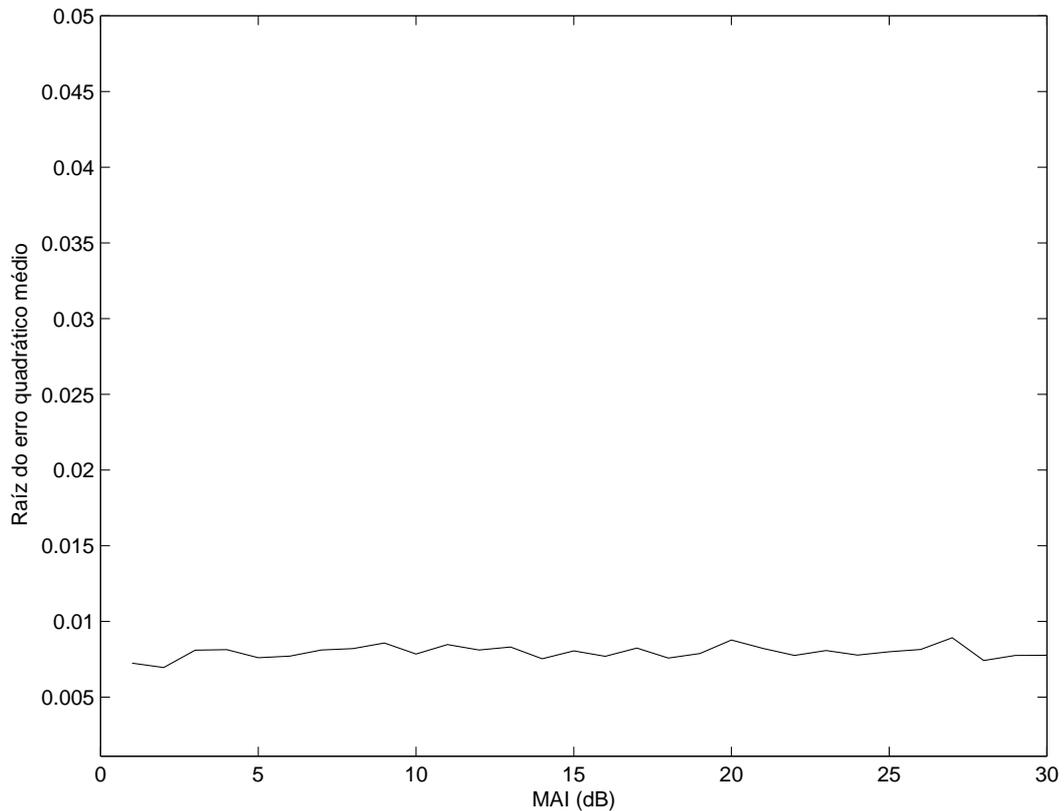
**Figura 7.10:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação  $S/N$  [ $J=60$ ,  $N=31$ ,  $K=5$ ,  $MAI=0$  dB]



**Figura 7.11:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J=60$ ,  $N=31$ ,  $K=2$ , MAI=0 dB]



**Figura 7.12:** Probabilidade de aquisição em função da janela (J) [ $N=31$ ,  $S/N=12$ dB,  $K=5$ ,  $\delta = .0625$ , MAI=0 dB]



**Figura 7.13:** Raiz do erro quadrático médio em função da MAI [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $K=5$ ]

A figura 7.9 mostra dois pontos importantes: a janela de trabalho de trabalho de vinte a sessenta amostras, sugerida na seção anterior, com único usuário, continua válida em ambiente multiusuário (a mesma conclusão é válida à partir da 7.12); e, a inclusão de usuários no sistema gerou uma degradação pequena, note na figura que não há diferença de desempenho até quatro usuários. A queda observada com  $K = 5$  e  $K = 6$  é resultante da redução do subespaço de ruído e não pelo aumento da interferência. Na figura 7.10 pode-se notar que mesmo em baixa relação S/N (próxima a 0 dB) o algoritmo apresenta bom desempenho. Comparado-se com o *sliding correlator*, 7.11, as boas características do estimador ficam evidentes<sup>1</sup>. A figura 7.13 mostra a resistência do algoritmo ao efeito *near-far*.

## 7.2.2 Estimativas de Amplitudes

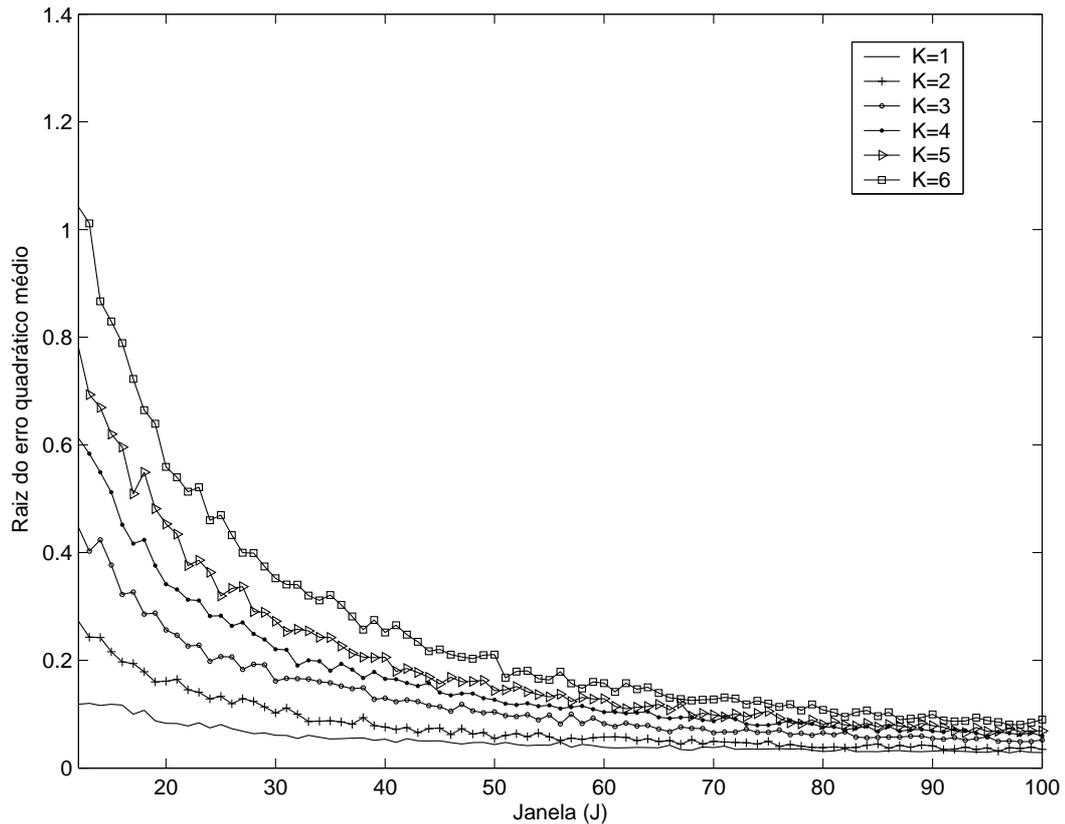
Para estimativa de amplitudes em cenário multiusuário com canal estático os seguintes estudos foram realizados:

1. Comportamento em função do tamanho da janela e quantidade de usuários,

<sup>1</sup>Foi necessário comparar os estimadores utilizando  $K = 2$  já que com mais do que dois usuários o *sliding* diverge para seqüência de comprimento  $N = 31$

figura 7.14;

2. O desempenho em função da relação S/N com  $K = 5$ , figura 7.15; e
3. A figura 7.16 mostra o comportamento do estimador quando a potência recebida dos demais usuários é diferente da potência recebida do usuário desejado.

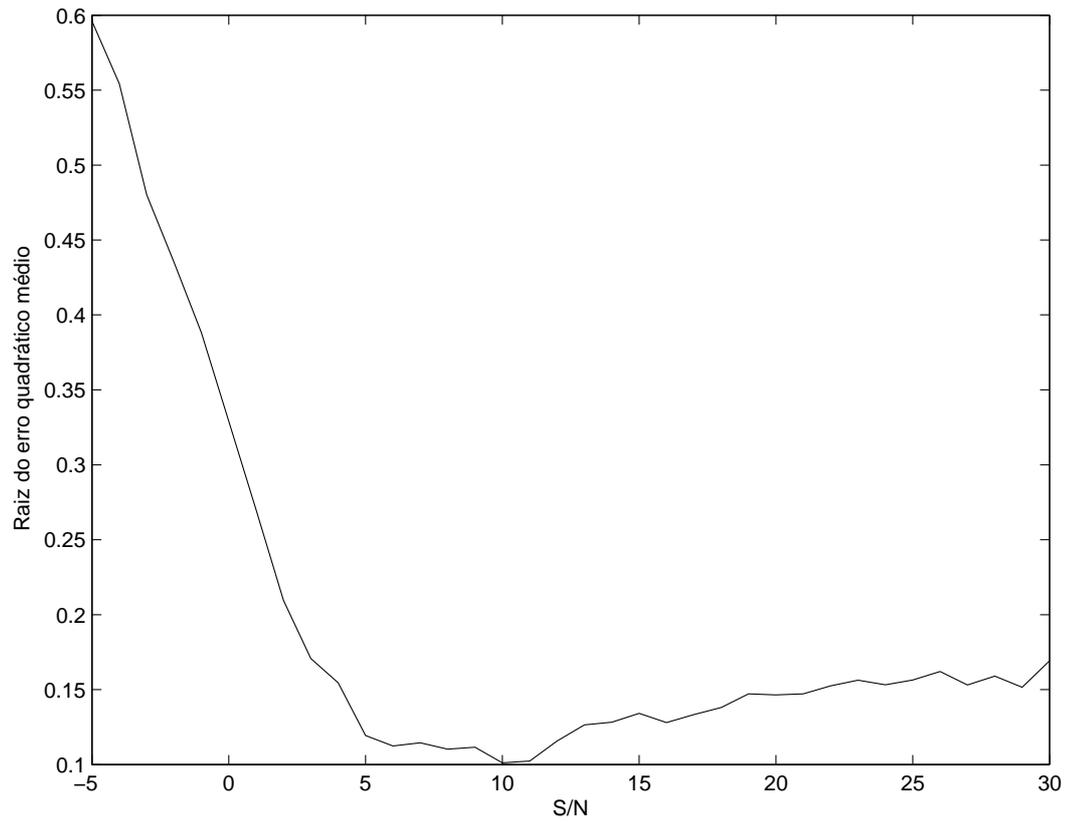


**Figura 7.14:** Raiz do erro quadrático médio em função da janela ( $J$ ) e do número de usuários [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $MAI=0$  dB]

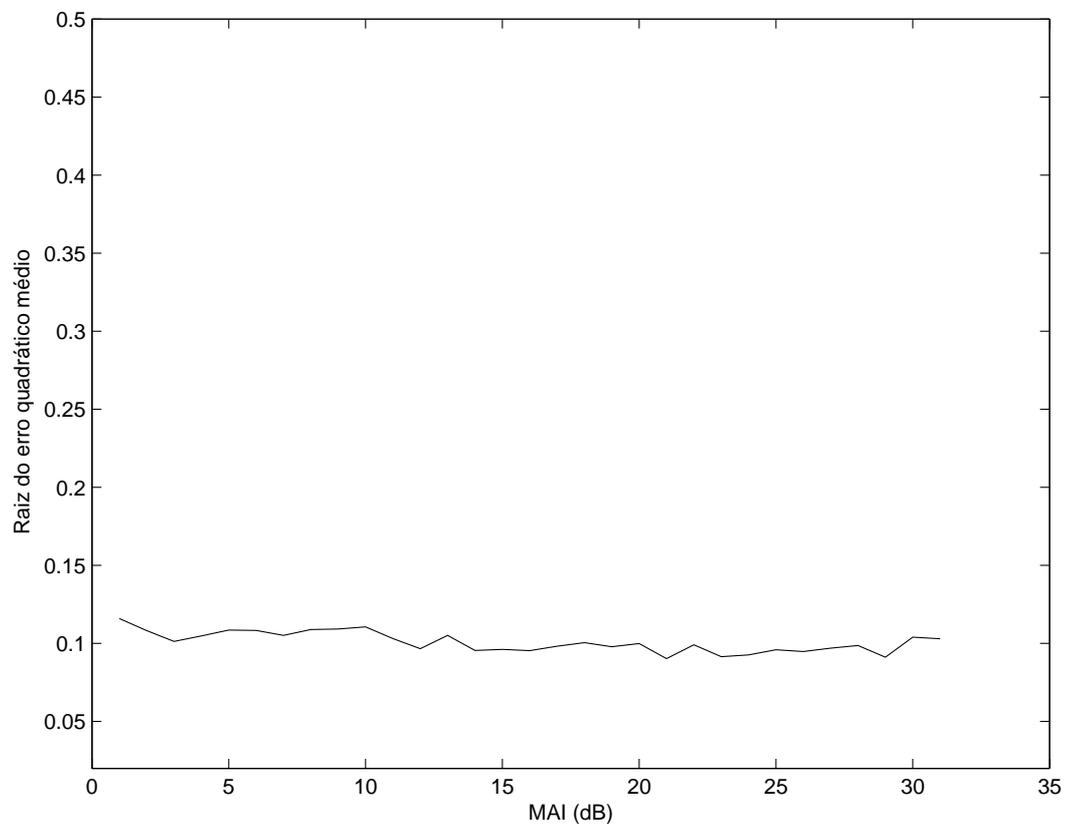
### Comentários

Em ambiente multiusuário, a interferência gerada exerce uma influência maior sobre a estimativa de amplitude do que aquela notada na estimativa de atrasos, contudo, através da figura 7.14 verifica-se que esta influência cresce inversamente ao tamanho da janela de forma que, com janelas superiores a setenta amostras a degradação inserida pela presença dos demais usuários é notória, porém, bem atenuada quando comparada com o mesmo resultado utilizando-se vinte amostras para o cálculo de  $\mathbf{R}$ .

A figura 7.15 mostra a influência da relação sinal-ruído sobre a estimativa de amplitude. Diferentemente do comportamento com apenas um usuário, observa-se uma queda do erro quadrático médio com a relação sinal-ruído quando esta



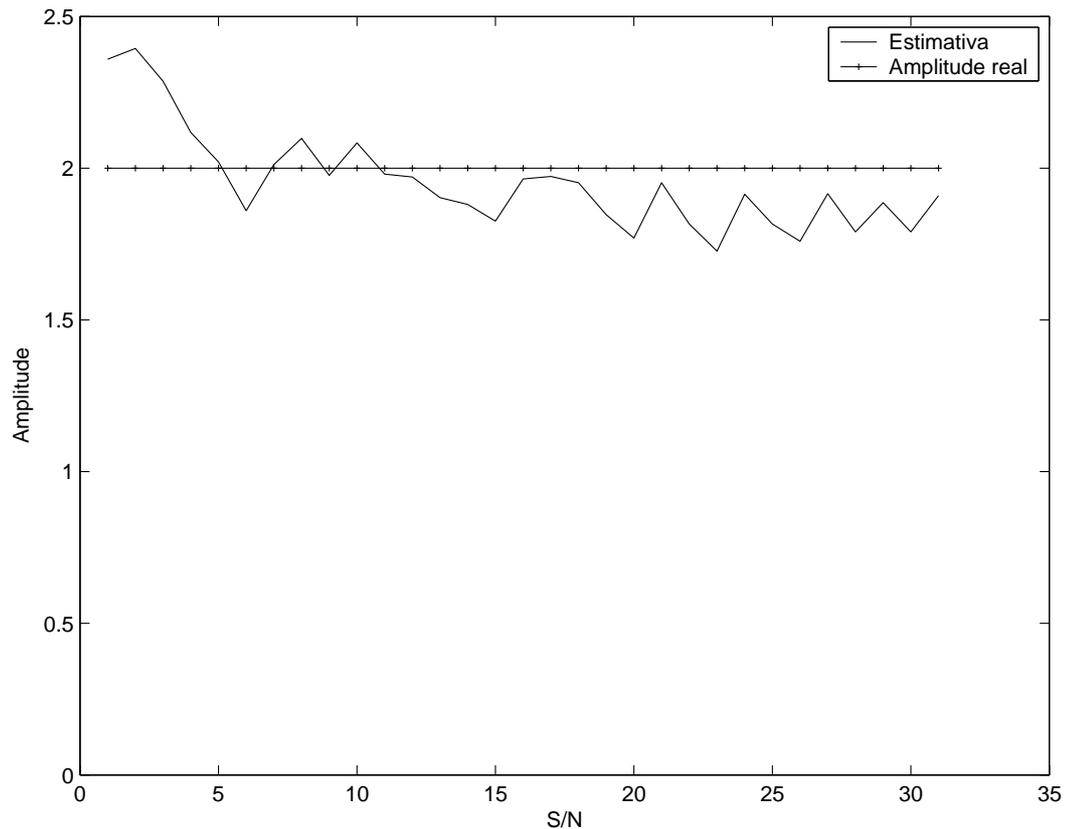
**Figura 7.15:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N [ $J=60$ ,  $N=31$ ,  $K=5$ , MAI=0 dB]



**Figura 7.16:** Raiz do erro quadrático médio em função da MAI [ $N=31$ ,  $S/N=12$  dB,  $K=5$ ]

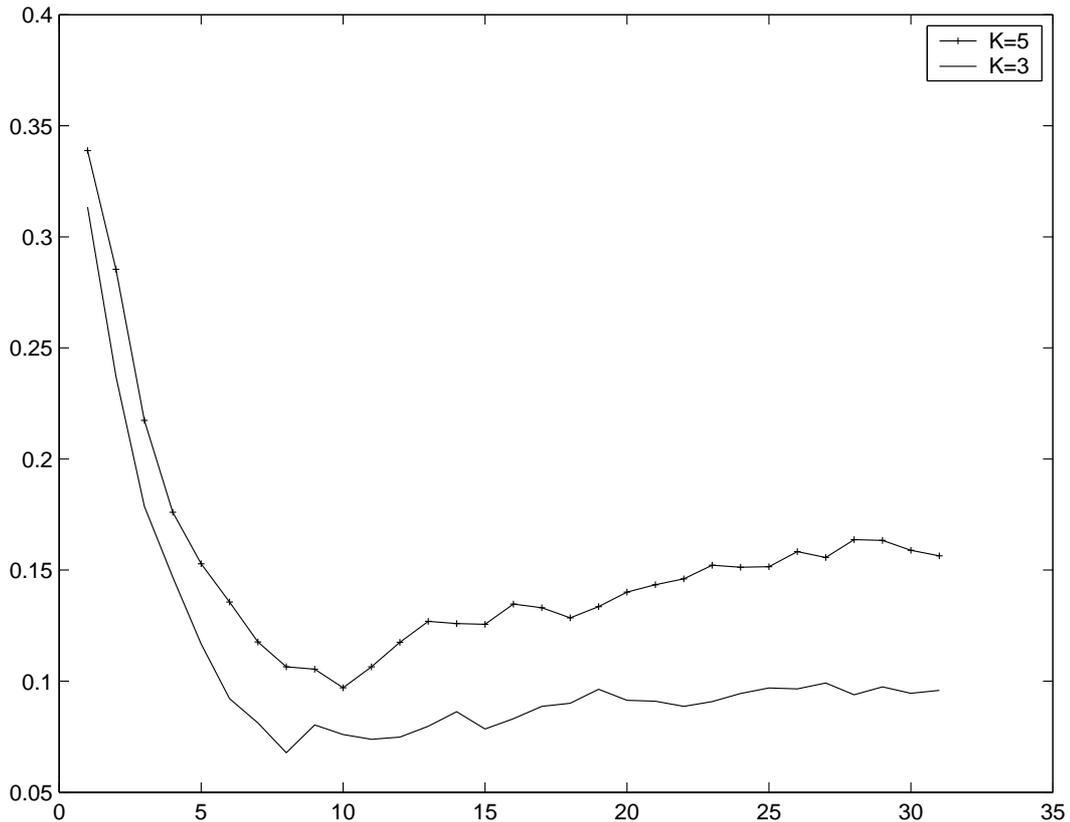
varia de 0dB a aproximadamente 10 dB e deste ponto para frente há um aumento sensível do erro. Este comportamento deve-se à estimativa de amplitude ser viciada em ambiente multiusuário, assim, enquanto a melhoria da relação-sinal ruído tem influência maior do que o *off-set* nota-se um acréscimo de desempenho, após este ponto, o erro é causado pelo vício da estimativa. O que foi dito pode ser notado através do gráfico da figura 7.17.

A tendenciosidade da estimativa cresce à medida que se insere usuários no sistema, vide figura 7.18.



**Figura 7.17:** Amplitude estimada em função de S/N [ $N=31, K=5, \text{MAI}=0 \text{ dB}$ ]

A figura 7.16 mostra que também para a estimação de amplitude o algoritmo geométrico é resistente ao efeito *near-far*. Desta forma, pode-se dizer que tanto na estimação de atrasos quanto de amplitudes a inserção de novos usuários causa degradação no desempenho do estimador, contudo, esta degradação é independente da relação entre a potência dos usuários interferentes e o usuário desejado.



**Figura 7.18:** Raiz do erro quadrático médio em função da relação S/N e número de usuários [ $J=60$ ,  $N=31$ , MAI=0 dB]

## 7.3 Cenário 3: Múltiplos Usuários em Canal Variante e com Multipercursos

Em canal dinâmico, é interessante verificar a capacidade do algoritmo em acompanhar as variações dos parâmetros. Neste cenário, os multipercursos e as variações de atrasos e amplitudes foram gerados utilizando-se um simulador de multipercursos desenvolvido pelo aluno de pós-graduação Vandelei A. Silva.

Nas simulações foram utilizados os parâmetros:

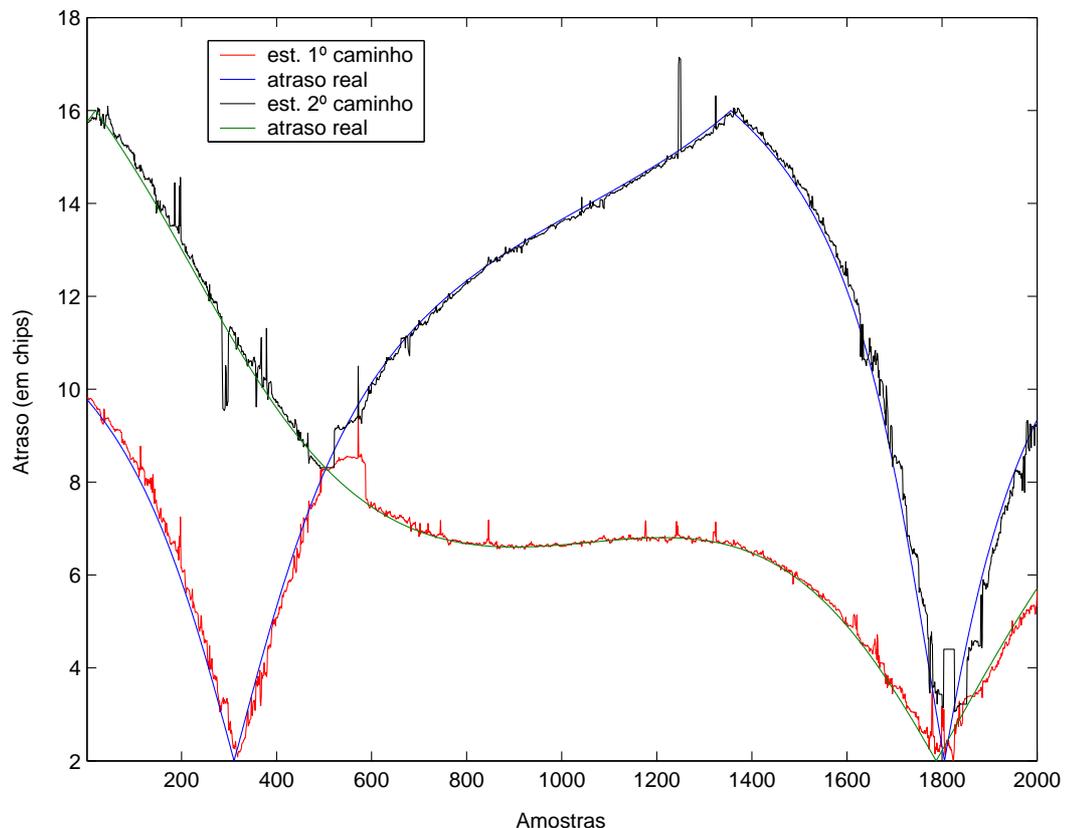
- quantidade de multipercursos: 2
- potência de cada portadora:  $0,7P$  e  $0,3P$ , onde  $P$  é a potência total recebida
- máximo deslocamento Doppler:  $f_m = 10$
- taxa de transmissão: 20 kbps, equivalente ao período de amostragem de  $5 \cdot 10^{-5}$  amostras por segundo

### 7.3.1 Estimativas de Atrasos

O algoritmo em estudo foi simulado em relação a:

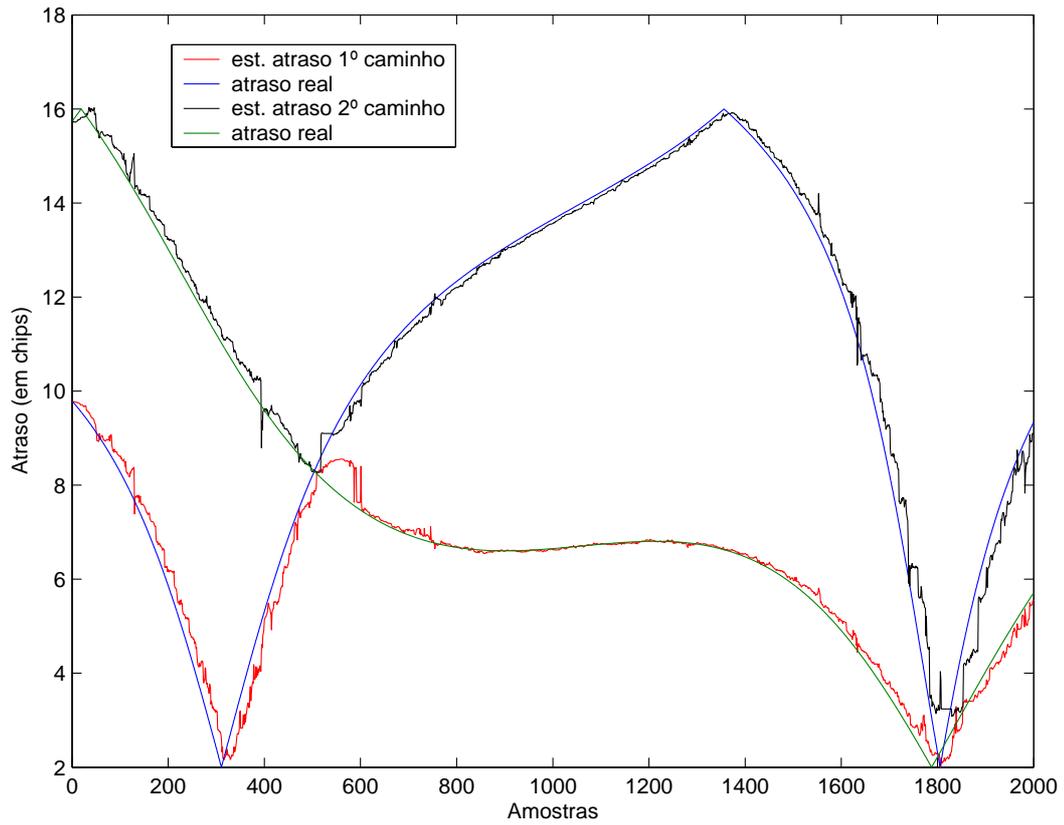
1. Desempenho do estimador geométrico quando a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  é estimada através de janelas retangulares (média móvel) de diferentes tamanhos, com seis usuários ( $K=6$ ), figuras 7.19 a 7.21;
2. As figuras 7.22 a 7.24 também apresentam o estimador geométrico, agora com a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  estimada através de janelas exponenciais, com diferentes "fatores de esquecimento";
3. O desempenho do *sliding correlator* no mesmo cenário, porém, com um único usuário é utilizado como base para comparação, vide figura 7.25. Na figura 7.26 acrescenta-se mais um usuário, portanto,  $K=2$ . O *sliding correlator* foi simulado com quantidade de usuários inferior ao estimador geométrico pois a inserção de *MAI* faz o algoritmo divergir rapidamente.

As figuras apresentadas nesta seção, apesar de não fazerem uma avaliação mensurável, mostram claramente as variações de desempenho do algoritmo estimador geométrico e do *sliding correlator*, que é sua base para comparação, quanto ao uso em canais variantes no tempo. Para uma comparação mensurável, vide tabela 7.1.

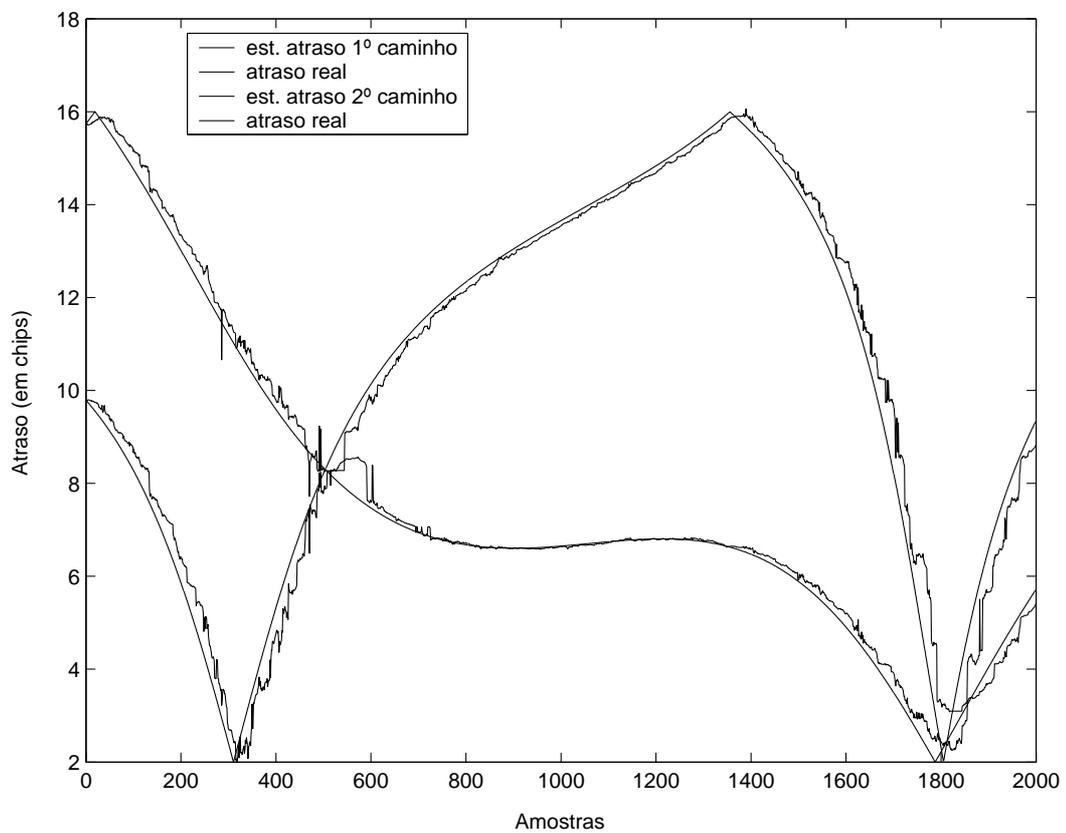


**Figura 7.19:** Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=20$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]

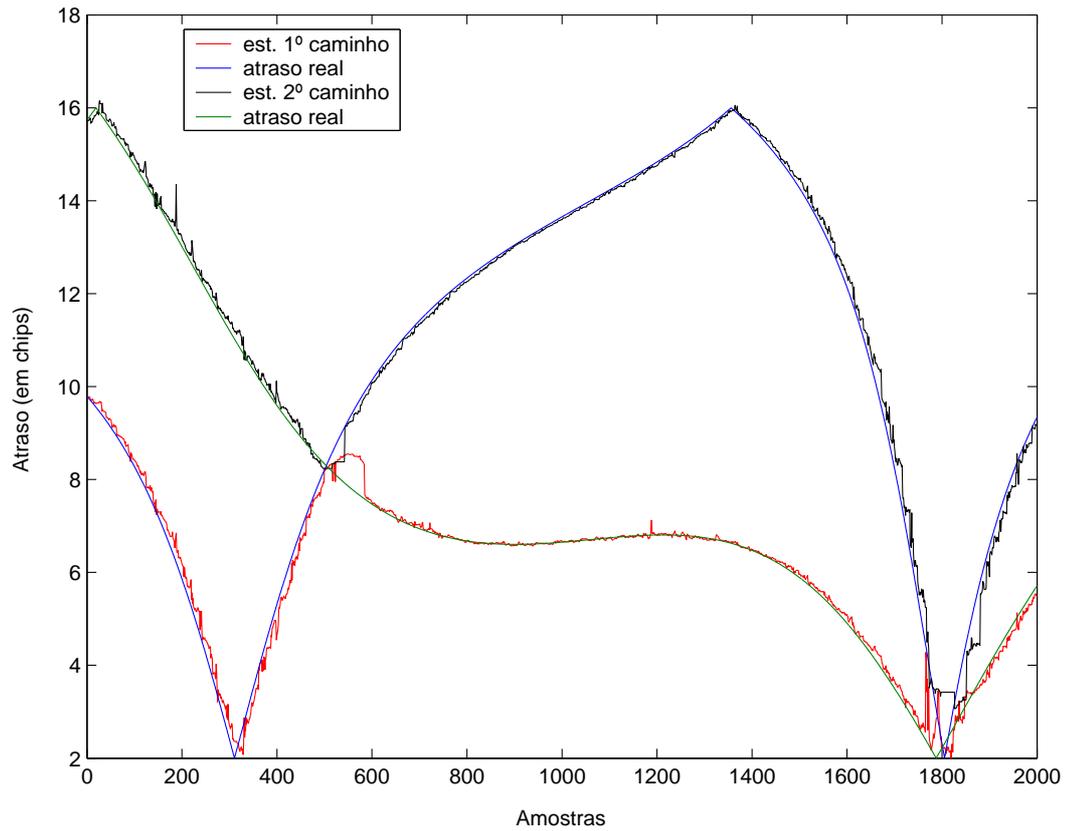
### Comentários



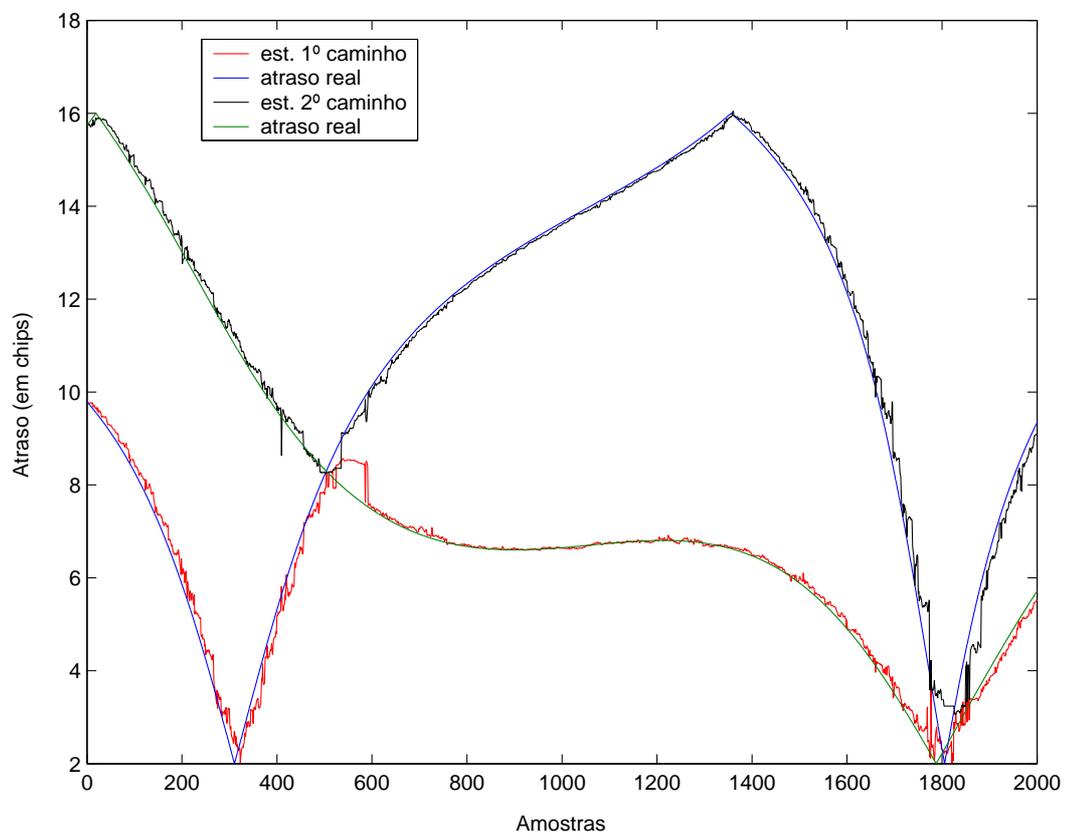
**Figura 7.20:** Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=30$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]



**Figura 7.21:** Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=40$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]



**Figura 7.22:** Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0,80$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]



**Figura 7.23:** Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0,85$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]

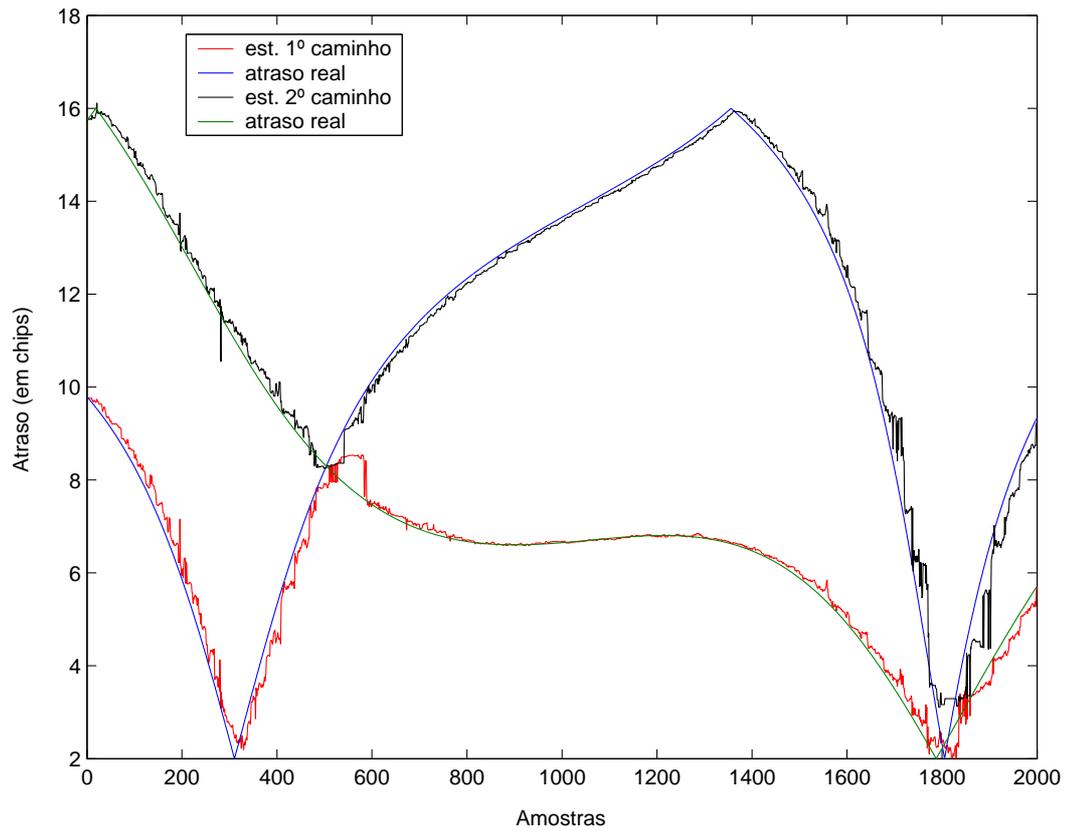


Figura 7.24: Estimador geométrico utilizando janela exponencial [ $\beta = 0, 90$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $MAI=0$  dB]

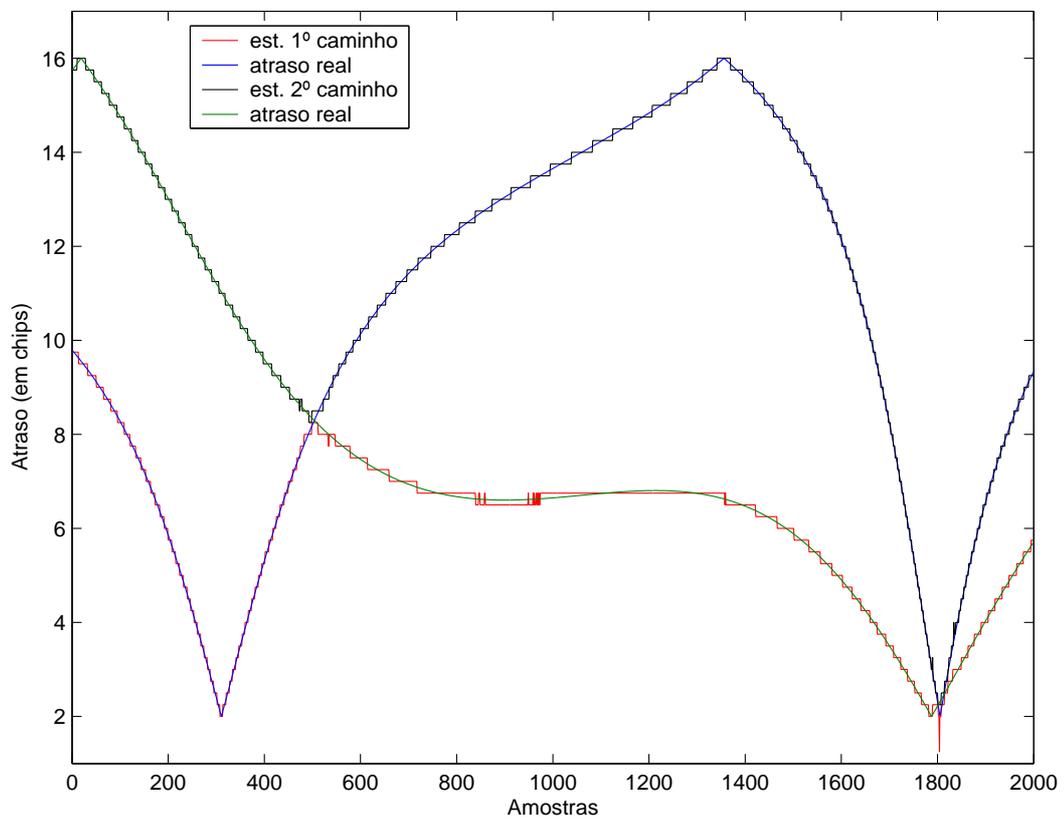
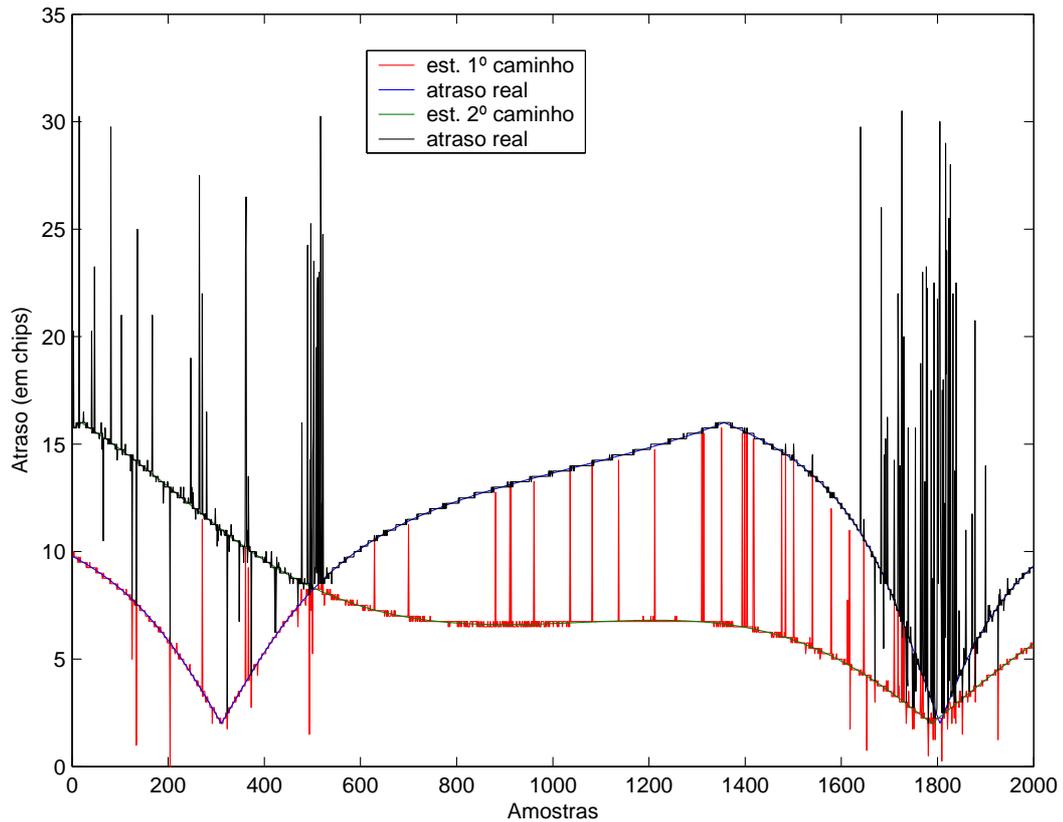


Figura 7.25: *Sliding correlator* [ $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $K=1$ ]



**Figura 7.26:** *Sliding correlator* [ $N=31$ ,  $S/N=20$  dB,  $K=2$ ,  $MAI=0$  dB]

As figuras 7.19 a 7.21 mostram que o uso de média móvel concede ao estimador geométrico capacidade de acompanhar sinais que variam lentamente. A janela de vinte amostras, apesar de conferir maior agilidade para o *tracking*, gera erros, deixando a estimativa mais “ruidosa”. A janela de quarenta amostras provê estimativas melhores quando o sinal está variando lentamente, contudo, com um maior atraso de processamento.

Uma alternativa mais apropriada para canais variantes é o uso de janelas exponenciais para a estimativa da matriz de correlação,  $\hat{\mathbf{R}}$ . A figuras 7.22 e 7.23 mostram que a utilização de “fator de esquecimento” entre 0,80 e 0,85 alia capacidade para acompanhar atrasos que variam no tempo e baixo erro de estimação.

Em qualquer tipo de janela, o desempenho do algoritmo geométrico cai bastante em duas situações, quando os percursos têm aproximadamente o mesmo atraso, isto é, duas cópias do sinal chegam juntas ao receptor e nas alterações abruptas de atrasos.

A figura 7.25 mostra que o *sliding correlator*, apesar de ter boa capacidade de *tracking*, seu desempenho é influenciado negativamente pela presença de mais usuários no sistema 7.26.

simulação	$K$	raiz do erro médio quadrático
janela retangular ( $J=30$ )	6	0.2762
janela exponencial $\beta = .8$	6	0.2103
<i>slide correlator</i>	1	0.0761
<i>slide correlator</i>	2	0.9963

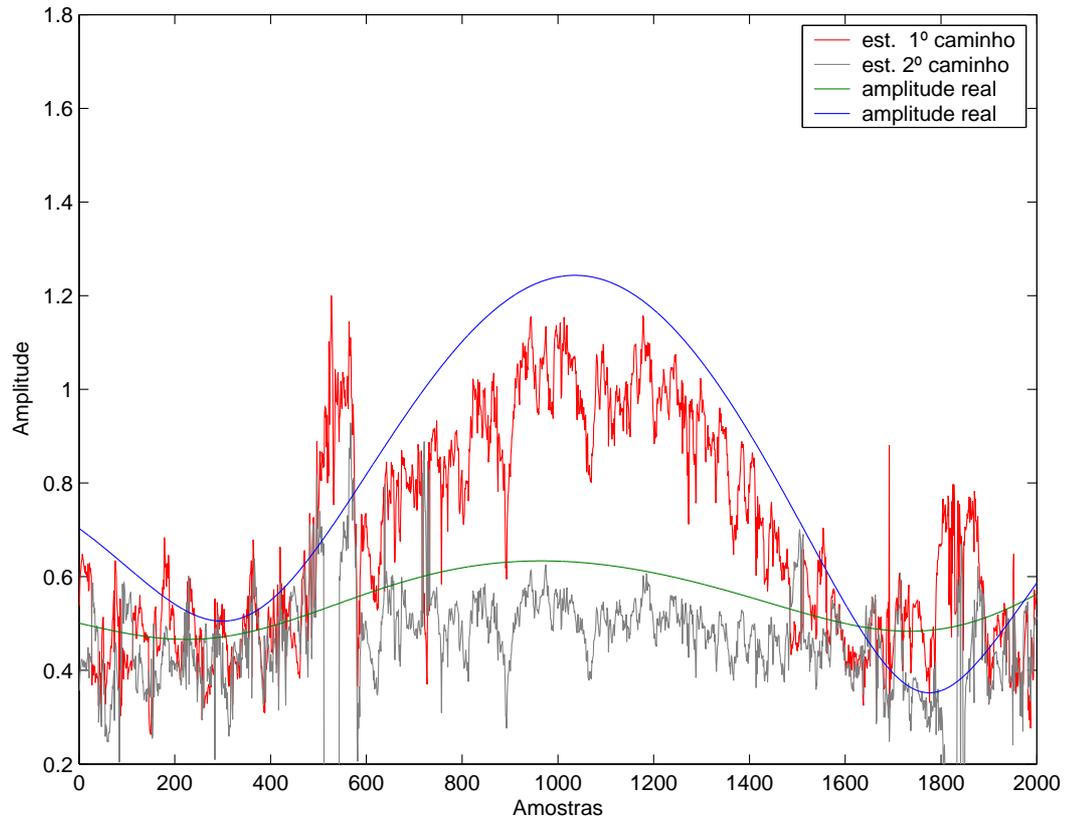
**Tabela 7.1:** Comparação de algoritmos, [S/N=20 dB, MAI=0 dB]

Apenas como forma de mensurar o que foi apresentado nas figuras, foram calculados os erros médios das estimativas de atrasos de algumas das simulações, os quais encontram-se na tabela 7.1

Da tabela pode-se concluir que, apesar do *sliding correlator* apresentar melhor desempenho em canais variantes, não é apropriado para ambientes multiusuários.

### 7.3.2 Estimativas de Amplitudes

A figura 7.27 apresenta o comportamento do estimador geométrico para estimativa de amplitudes em cenário multiusuário com canal dinâmico.



**Figura 7.27:** Estimador geométrico utilizando janela retangular [ $J=30$ ,  $K=6$ ,  $N=31$ , S/N=20 dB, MAI=0 dB]

Dois pontos são importantes serem notados na figura. Primeiramente, a dependência da estimativa de amplitudes com o vetor utilizado para estimativa

de atrasos, o que pode ser evidenciado pelos erros de estimativa em torno das amostras de número quinhentos e cinqüenta e mil oitocentos e cinqüenta, coincidentes com os erros de estimativa de atrasos, vide figura 7.20, os quais são causados pela proximidade de dois percursos.

O segundo ponto é o vício da estimativa de amplitude, comentado na seção 7.2.2, que aparece claramente na figura 7.27.

## 7.4 Discussão

Os cenários discutidos nas seções 7.1 a 7.3 deram uma visão do comportamento do algoritmo geométrico e seu desempenho em relação ao correlator usual. No entanto, alguns aspectos importantes para análise da sensibilidade e até da viabilidade do algoritmo ainda não foram comentados, como:

- Escolha dos códigos de espalhamento;
- Limite de carga;
- Comparação da solução proposta neste trabalho (seção 5.3.1.2) com a solução usual (seção 5.3.1.1);
- Sensibilidade à variação de canal;
- Complexidade computacional; e
- Comparação com resultados da literatura.

Isto será feito nas próximas seções.

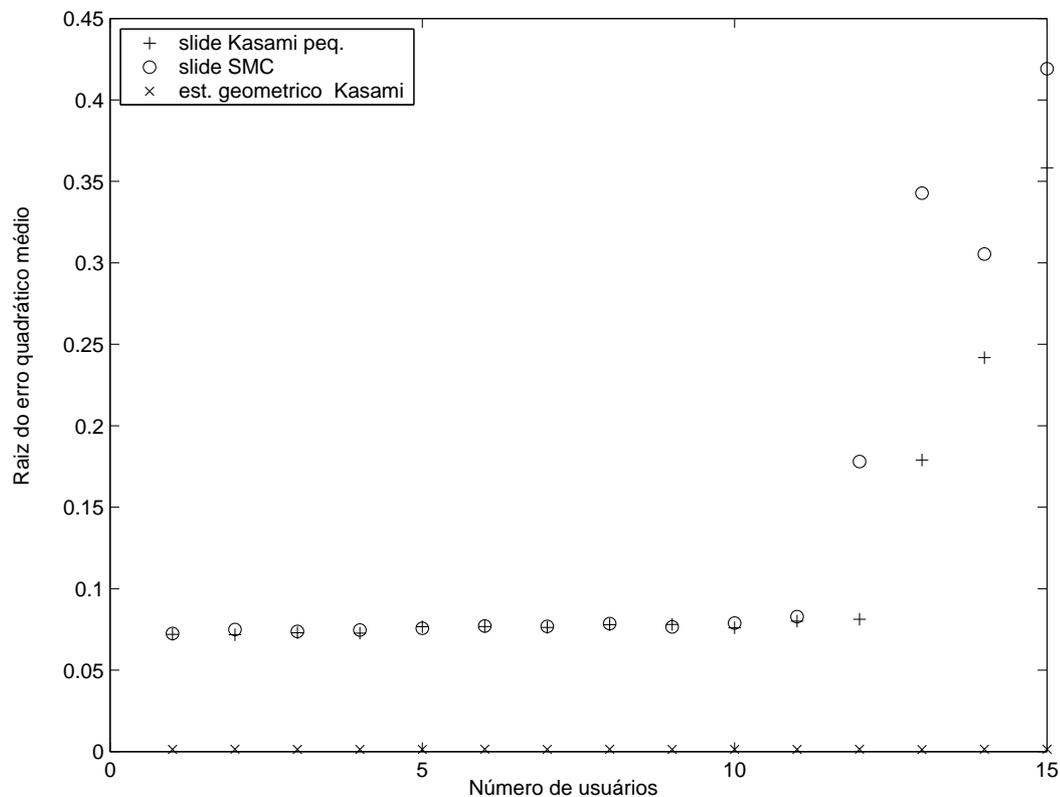
### 7.4.1 Escolha dos códigos de espalhamento

Esta seção não tem por objetivo o estudo de seqüências que melhor se adaptem ao algoritmo em questão. Para cada aplicação pode-se procurar nos códigos de espalhamento propriedades específicas que supram as necessidades da aplicação.

Assim, na utilização prática dos códigos, pode-se estar interessado em famílias com grande número de seqüências, em facilidade de sincronização ou ainda em facilidade para gerar as seqüências. Mas o ponto comum de todas as aplicações é a busca de seqüências com baixos valores de correlação pois isto reduz a *MAI*. Então, a escolha de códigos é uma solução de compromisso entre as propriedades citadas, e redução de *MAI*.

Por ser uma área extensa, com vários trabalhos publicados mas ainda com abertura a contribuições, o estudo detalhado sobre escolha de seqüências será deixado para exame posterior. São básicas para o estudo de seqüências as referências [41] e [42].

Contudo, em todas as simulações apresentadas até o momento foram utilizadas seqüências Seqüência de Máximo Comprimento (SMC) e, como o *slide correlator* foi utilizado como base para comparação de desempenho, é necessário, ao menos, mostrar que este método de estimativa de atrasos apresenta, para estas seqüências, desempenho muito próximo àquele conseguido com a utilização de seqüências da família do conjunto pequeno de Kasami, conhecida por seus baixos valores de correlação cruzada.



**Figura 7.28:** *Sliding correlator* e estimador geométrico [ $N=255$ ,  $S/N=10$  dB]

A figura 7.28 mostra o resultado de simulação com o *slide correlator* utilizando-se duas famílias de seqüências diferentes, o conjunto Kasami pequeno, o qual favorece a redução da MAI e seqüências de máximo comprimento, ambas famílias com  $N = 255$ .

A diferença de desempenho com as duas famílias de seqüências somente aparece quando aumenta-se o número de usuários. Para o *slide correlator* utilizando SMC, o erro aumenta rapidamente a partir de onze ou mais usuários, enquanto o mesmo algoritmo com o conjunto pequeno de Kasami, suporta doze

usuários antes do erro aumentar rapidamente.

A figura 7.28 mostra claramente que, os resultados do estimador geométrico é bastante superior ao *slide correlator*, mesmo quando utilizamos para o segundo uma seqüência próxima ao ótimo (limite de Welch).

### 7.4.2 Limite de carga

O limite do algoritmo geométrico à inserção de usuários é  $K < N/2$ . Esta é uma restrição imposta pela própria construção do algoritmo, uma vez que cada usuário aparece em duas colunas (vetores) da base para o subespaço de sinal e é necessário existir no mínimo uma coluna para o subespaço de ruído, assim, sendo a dimensão total do espaço analisado igual a  $N$ , segue diretamente a restrição. Vide seção 5.2.

Porém, o limite, de fato, é inferior a este número e é imposto pela *MAI*.

A figura 7.29 mostra que, quando a dimensão do subespaço de ruído é tomada na forma convencional, ou seja,  $\mathbf{V}_N \in N \times (N - 2K)$ , a carga máxima atingida foi  $K < N/4$ , já que para números superiores o erro cresce rapidamente. Note-se que este é um resultado específico para o caso analisado ( $N = 31$ ) e não pode ser generalizado.

No entanto, pôde-se notar em simulações que a queda abrupta no desempenho notada a partir de certo carregamento é mais relacionada à redução de ordem do subespaço de ruído do que propriamente à interferência devida ao usuário adicional.

Esta influência da dimensão do subespaço de ruído pode ser comprovada através da figura 7.30, que mostra a queda de desempenho do estimador com  $K = 1$  quando o subespaço de ruído utilizado é reduzido à mesma dimensão necessária para estimativas com  $K = 5$ .

Desta forma, este trabalho propõe um "relaxamento" na definição do subespaço de ruído, aumentando sua dimensão de forma artificial incluindo vetores do subespaço de sinal como base para o subespaço de ruído. Esta proposta baseia-se no fato de que, para o usuário desejado, os demais usuários podem ser considerados como ruído.

Na figura, os resultados correspondentes ao "método proposto", consideraram as dimensões para o subespaço de ruído apresentadas na tabela 7.2.

No método proposto, a escolha da base para o subespaço de ruído segue o

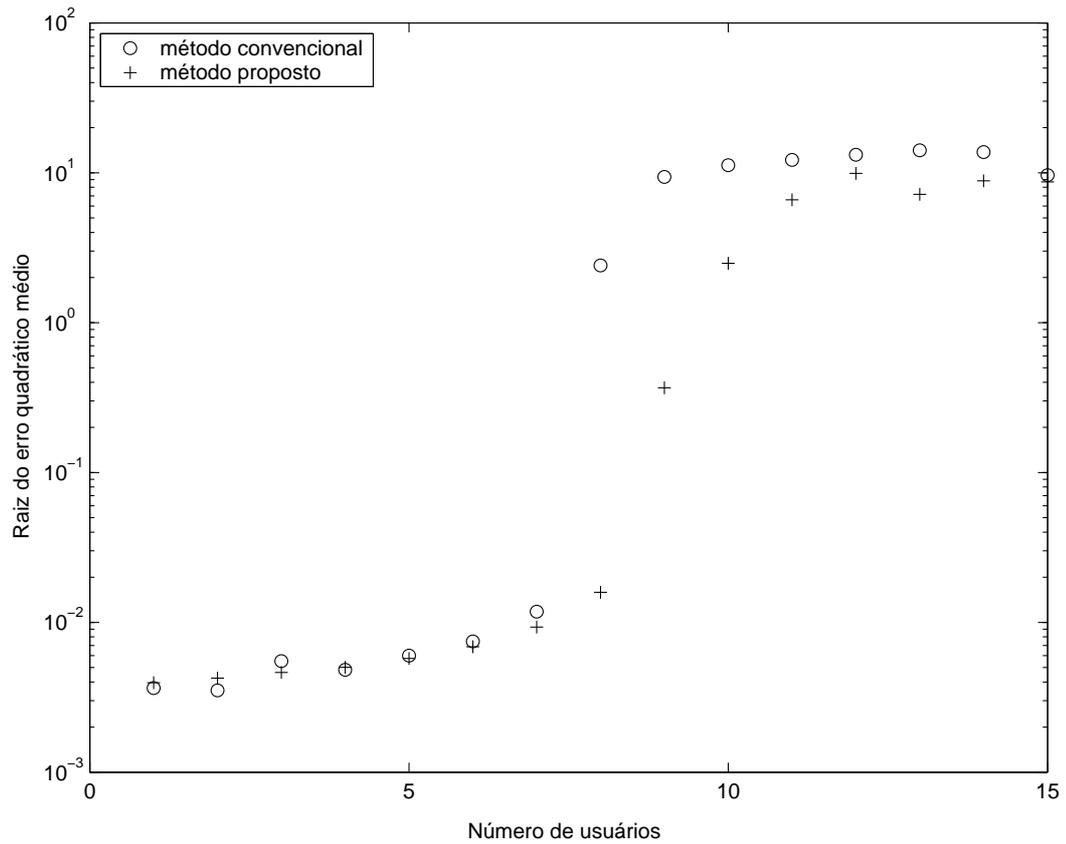


Figura 7.29: *Estimador geométrico* [Código de Gold,  $N=31$ ,  $S/N=10$ dB]

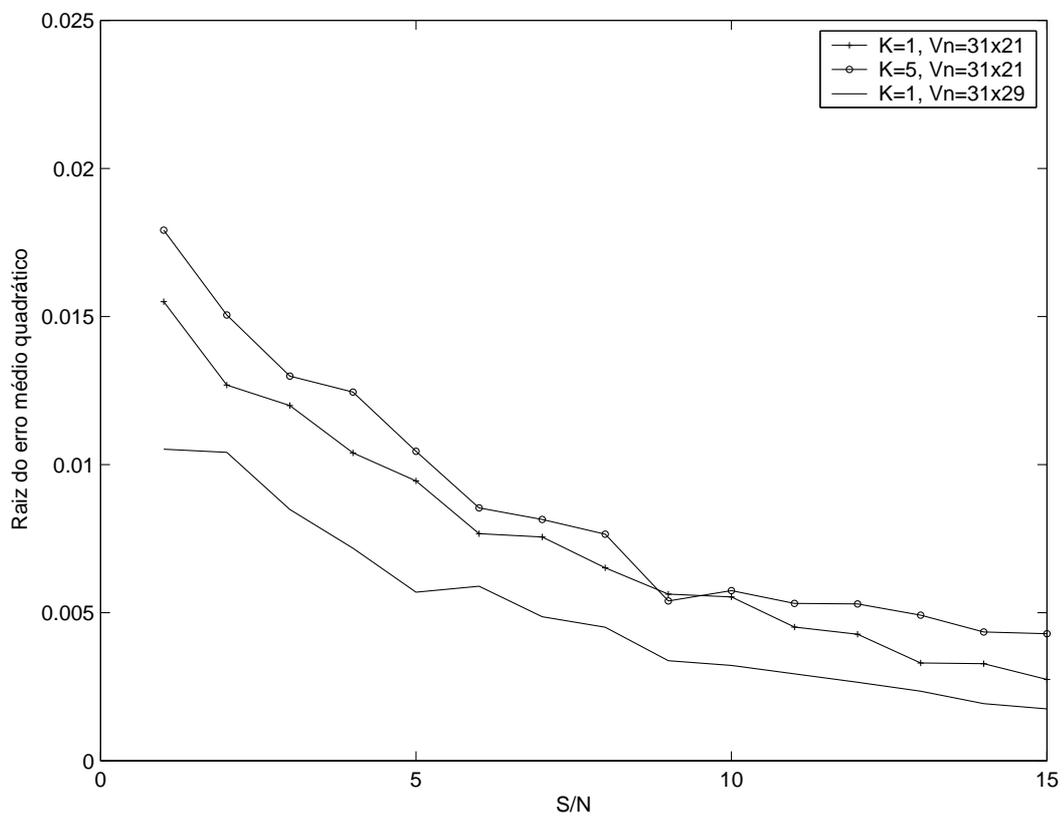


Figura 7.30: *Sliding correlator* e estimador geométrico [SMC,  $N=31$ ]

$K$	dimensão de $\mathbf{V}_N$ convencional	dimensão de $\mathbf{V}_N$ proposta
1	$31 \times 29$	$31 \times 29$
2	$31 \times 27$	$31 \times 27$
3	$31 \times 25$	$31 \times 25$
4	$31 \times 23$	$31 \times 23$
5	$31 \times 21$	$31 \times 21$
6	$31 \times 19$	$31 \times 19$
7	$31 \times 17$	$31 \times 17$
8	$31 \times 15$	$31 \times 17$
9	$31 \times 13$	$31 \times 15$
10	$31 \times 11$	$31 \times 15$
11	$31 \times 9$	$31 \times 15$
12	$31 \times 7$	$31 \times 13$
13	$31 \times 5$	$31 \times 13$
14	$31 \times 3$	$31 \times 13$
15	$31 \times 1$	$31 \times 13$

**Tabela 7.2:** Dimensão do subespaço de ruído,  $S_N$

mesmo procedimento de ordenação crescente dos autovalores da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  apresentado ‘na seção 5.2. A diferença é apenas a quantidade de autovetores que são considerados como base. Enquanto no método convencional toma-se sempre os autovetores correspondentes aos  $(N - 2K)$  menores autovalores, aqui tomou-se os autovetores correspondentes aos  $(N - 2K_p)$  menores autovalores, com  $(K_p \leq K)$ .

Note-se que este aumento artificial da dimensão do subespaço de ruído é interessante apenas quando atinge-se o carregamento máximo permitido pelo método convencional (no exemplo dado com  $N = 31$  são sete usuários). O artifício permitiu neste caso específico, a inserção de um usuário adicional, aumentando a carga limite para oito usuários.

É importante ressaltar que a dimensão proposta na tabela 7.2 para o subespaço de ruído não é uma regra e obviamente pode variar para outros comprimentos de sequências, tipos de sequências ou correlação entre sinais.

Para encerrar esta seção, é interessante mostrar o que ocorre como o “espectro” de erro averigado para o caso do usuário adicional (oitavo usuário inserido).

A figura 7.31 mostra o que ocorreu com o erro a cada amostra quando utilizado  $\mathbf{V}_N$  da forma convencional. Nota-se que, em grande parte das amostras ocorreram erros superiores a  $10^{-2}$ , enquanto utilizando-se ampliação da base de  $\mathbf{V}_N$ , figura 7.32, verifica-se apenas alguns picos superiores a  $10^{-3}$ .

Note que na figura 7.32 utilizou-se  $V_N \in (31 \times 19)$  enquanto na tabela 7.2

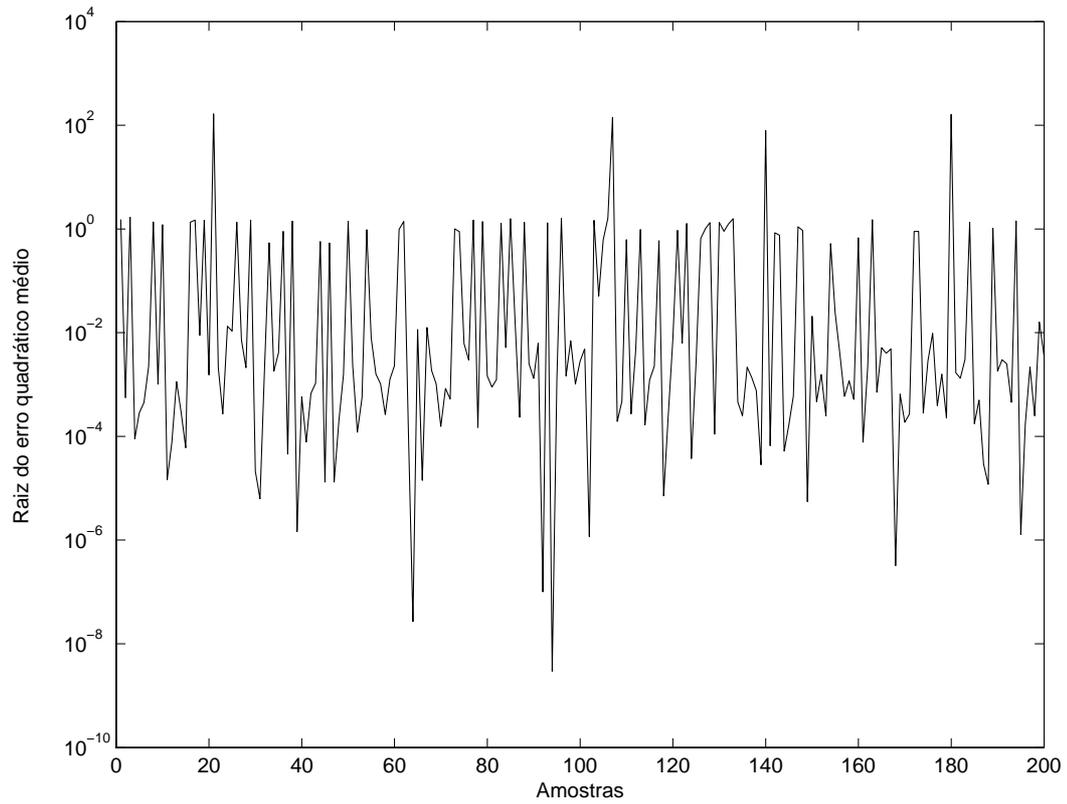


Figura 7.31: "Espectro do erro" [ $K = 8$ ,  $N=31$ ,  $\mathbf{V}_N = 31 \times 15$  S/N=10 dB]

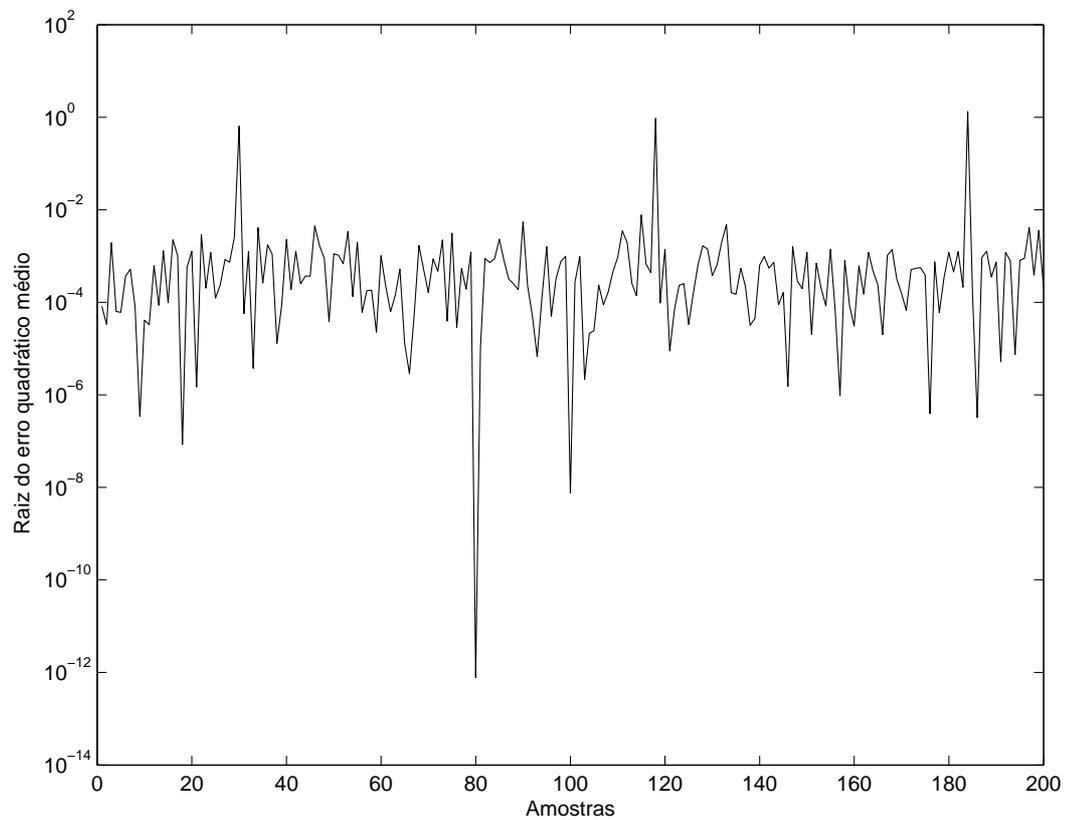


Figura 7.32: "Espectro do erro" [ $K = 8$ ,  $N=31$ ,  $\mathbf{V}_N = 31 \times 19$ , S/N=10 dB]

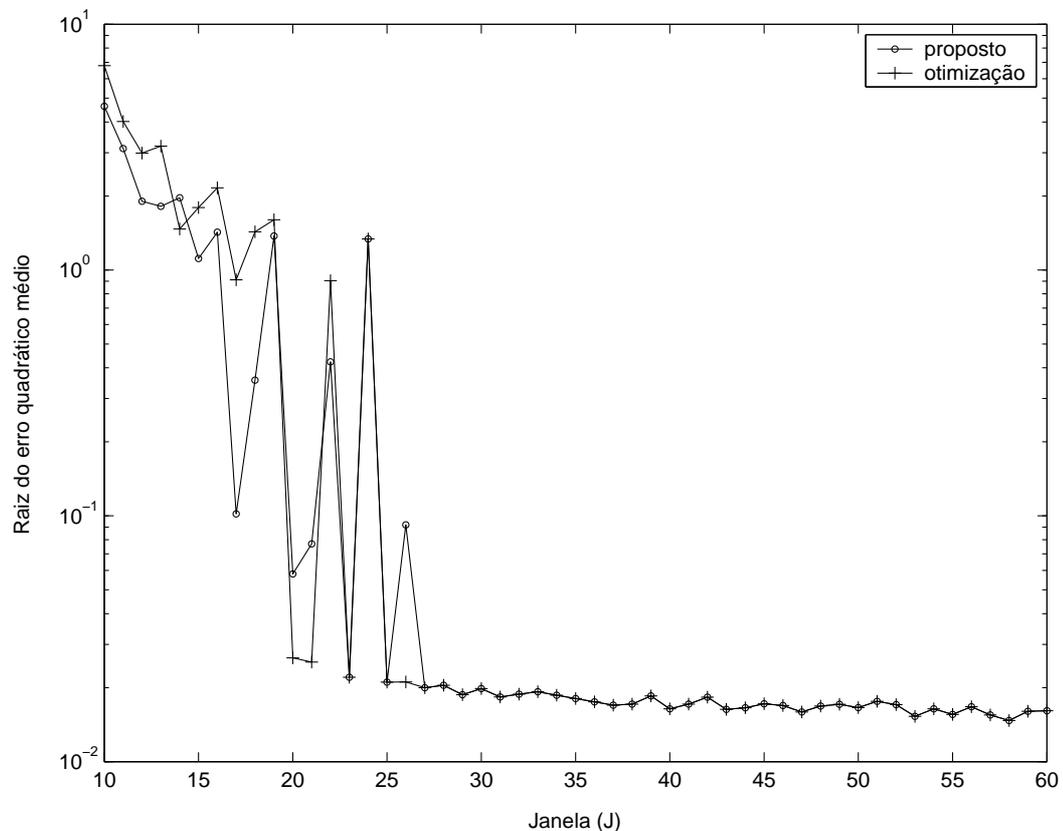
foi proposto  $V_N \in (31 \times 17)$  para  $K = 8$ . Isso porque desejou-se evidenciar o comportamento de picos de erros, que não ocorreram com  $V_N \in (31 \times 17)$ . Em simulações não apresentadas aqui verificou-se os picos de erros se acentuam à medida que se amplia artificialmente o subespaço de ruído.

### 7.4.3 Análise da solução proposta

Nesta seção compara-se o algoritmo geométrico em sua forma usual, conforme apresentado na seção 5.3.1.1 com as alterações propostas na seção 5.3.1.2.

Como visto na seção 5.2, o algoritmo geométrico é composto de três etapas: estimativa da matriz de correlação, decomposição do espaço medido em subespaços de sinal e ruído e estimativa de parâmetros de canal. A modificação proposta altera apenas a última etapa do algoritmo com a utilização da equação (5.30) que fornece essencialmente o mesmo resultado evitando-se utilização de métodos de otimização e, portanto, reduzindo a complexidade computacional.

A figura 7.33 compara a estimativa de atrasos através do método usual (otimização) com o método proposto (algébrico).



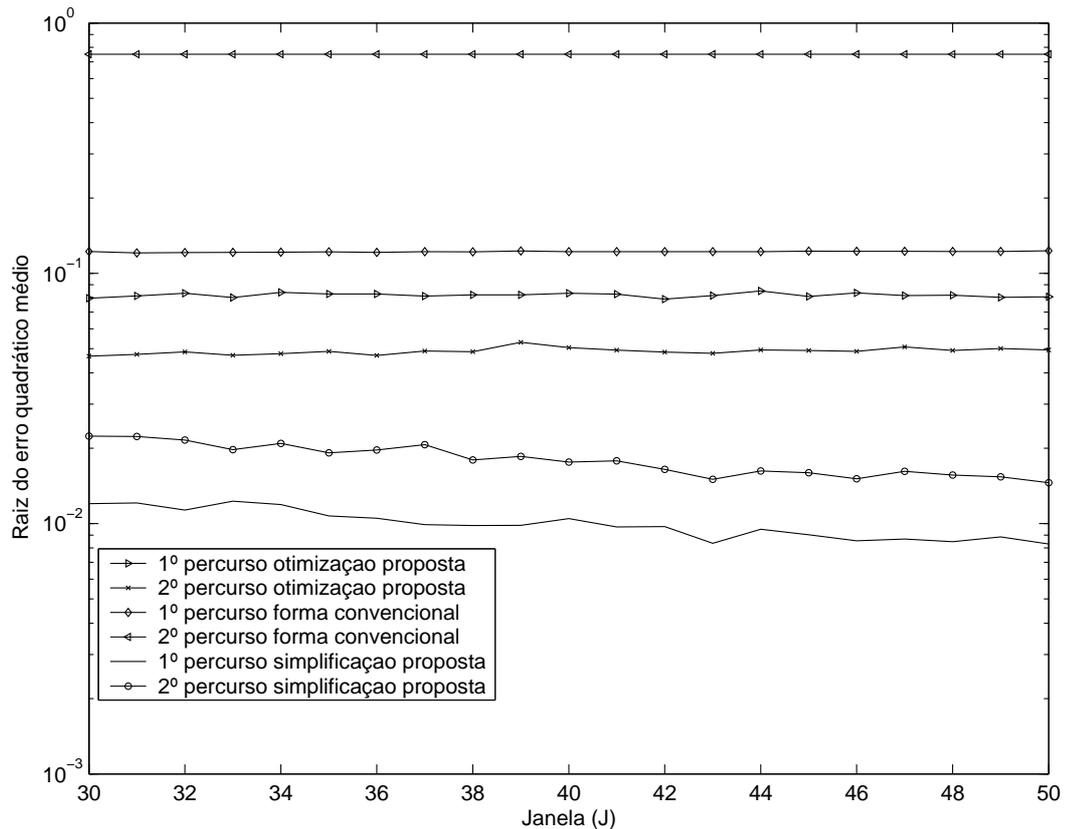
**Figura 7.33:** Comparação entre o método de otimização e método algébrico[SMC,  $N=31$ ]

Outro aspecto discutido na seção 5.3.1.2 é a incapacidade do método apre-

sentado na seção 5.3.1.1 em discriminar percursos vizinhos da forma:

$$\mathbf{h} = [\sigma^2 \ \sigma^2 \ h_{k,2} \ h_{k,3} \ h_{k,4} \ \sigma^2 \ \sigma^2]$$

Quando percursos estão suficientemente próximos para que um mesmo elemento de  $\mathbf{h}$  contenha parcelas de dois caminhos diferentes, é necessário utilizar (5.27) ou, em canais que variam lentamente, a simplificação proposta em (5.32) a (5.34). A figura 7.34 exemplifica o que foi dito.



**Figura 7.34:** Capacidade de discriminação de percursos vizinhos[SMC,  $N=31$ ]

#### 7.4.4 Sensibilidade à variação de canal

A percepção de variação do canal dependem basicamente de dois parâmetros: o máximo deslocamento Doppler,  $f_m$ , que tem relação direta à velocidade relativa entre o terminal móvel e a estação rádio base ou à velocidade com que outros objetos se movimentam no canal, e a taxa de amostragem de símbolos, equivalente à taxa de transmissão.

Na seção 7.3 foi estudado o comportamento do algoritmo geométrico em canal variante supondo-se estes dois parâmetros constantes ( $f_m = 10$  e taxa de transmissão igual a 20 kbps). Nesta seção analisaremos a influência destes parâmetros

$v(\text{km/h})$	$f_m$ (H) @ 900 MHz	$f_m$ (H) @ 1800 MHz
6	5	10
30	25	50
60	50	100
90	75	150

**Tabela 7.3:** Valores Referência de  $f_m$

sobre a variação do canal e , portanto, sobre os resultados esperados de estimação através do algoritmo geométrico.

O máximo deslocamento Doppler é dado por:

$$f_m = v/\lambda$$

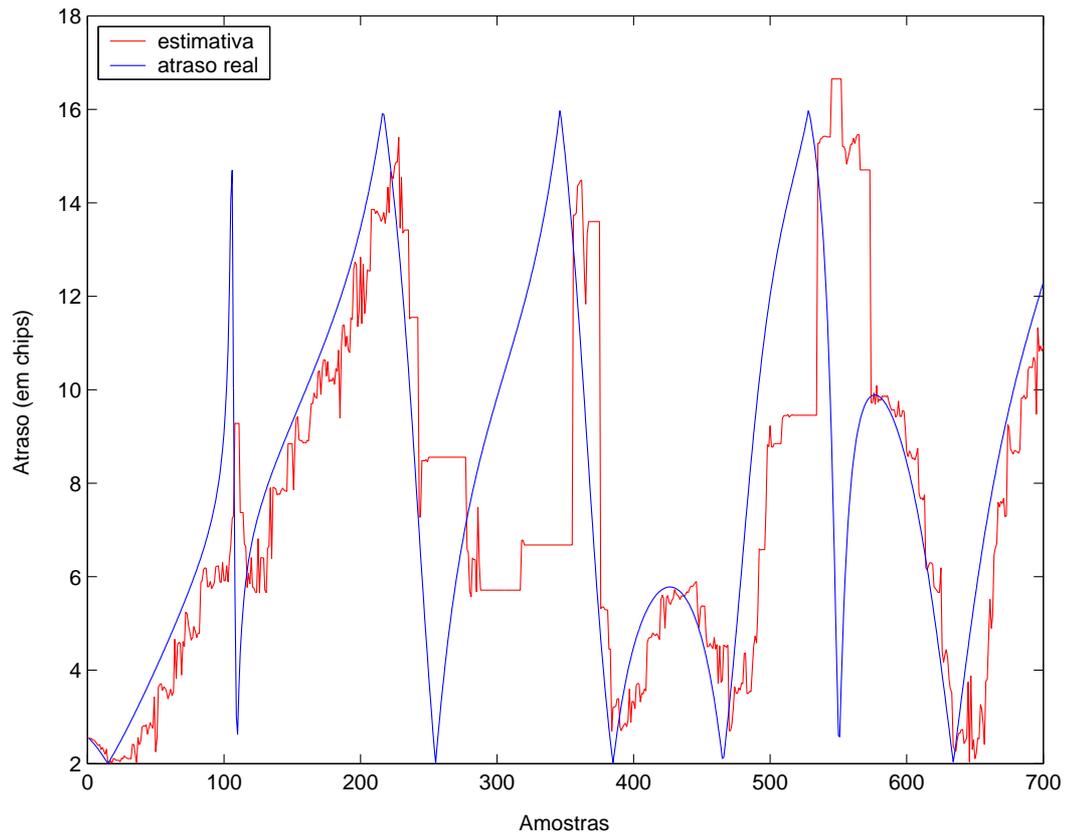
onde  $v$  é a velocidade relativa entre móvel e rádio base e  $\lambda$  o comprimento de onda.

A tabela 7.3 mostra alguns valores de  $f_m$  para frequências de 900 MHz e 1800 MHz.

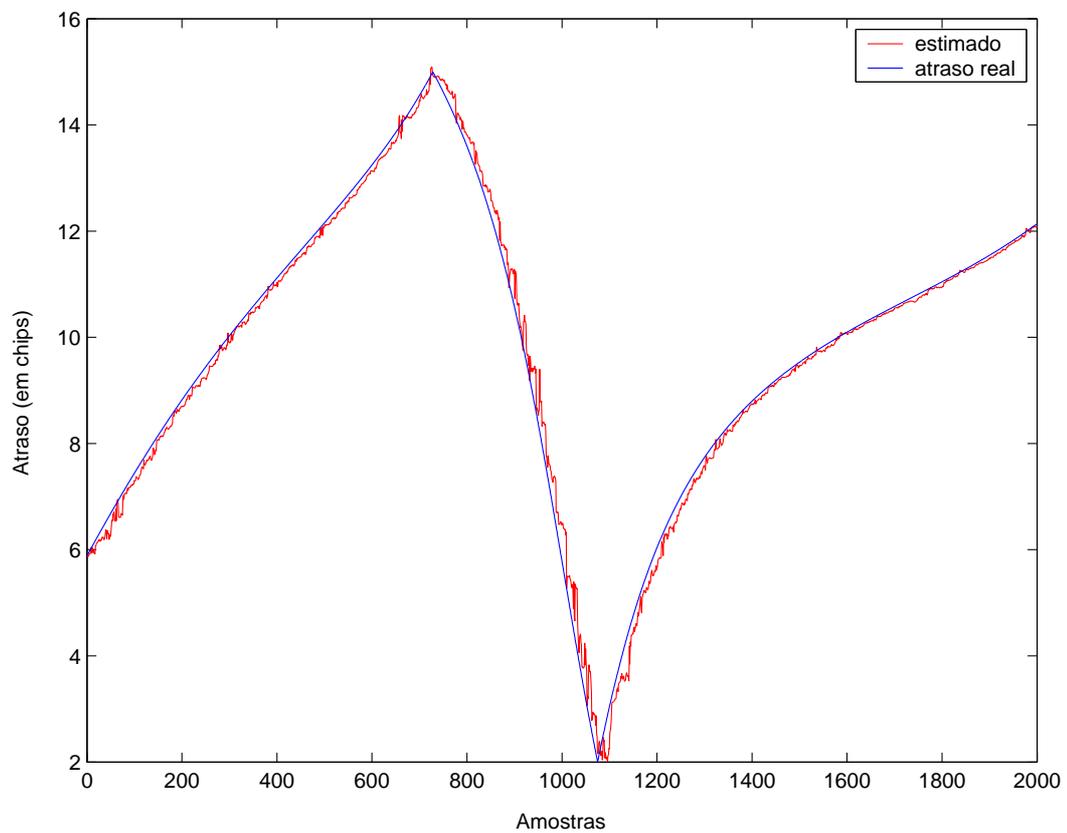
Com base na tabela verifica-se que, nas simulações da seção 7.3, na qual foi utilizado  $f_m = 10$ , considerou-se um usuário móvel caminhando.

Se, por um lado, o aumento de velocidade do móvel torna o canal mais suscetível a variações, por outro, com aumento da taxa de transmissão, o tempo de símbolo é reduzido e portanto, menor será a percepção destas variações dentro do intervalo de um símbolo. Desta forma, apesar das simulações terem sido feitas considerando baixa velocidade de deslocamento do móvel, a taxa de transmissão considerada também foi muito baixa.

A figura 7.35 mostra a degradação nas estimativas quando, mantendo a taxa de transmissão em 20kbps, aumentamos  $f_m$  de 10Hz para 100Hz. Contudo se a taxa de transmissão for aumentada para 200 kbps, conforme figura 7.36, o estimador volta a ter um bom desempenho.



**Figura 7.35:** Sensibilidade a variações do canal[SMC,  $N=31$ ]



**Figura 7.36:** Sensibilidade a variações do canal[SMC,  $N=31$ ]

## 8 Conclusões

Dos resultados analisados pôde-se concluir:

1. A primeira grande virtude do estimador geométrico é a precisão das estimativas de atrasos em canais estáticos. As figuras 7.3 e 7.11 mostram que com  $J = 60$  e relação sinal-ruído variando em ampla faixa, o estimador geométrico apresenta erro médio aproximadamente dez vezes inferior ao *slide correlator*.

É fato que na ausência de ruído é possível reduzir o erro do correlator tanto quanto se queira através da redução do passo de deslocamento, porém, em ambiente real, à medida que se reduz este passo, mais vulnerável este estimador fica em relação ao ruído e demais usuários.

Já em canal variante, o desempenho do estimador geométrico com  $K = 6$  chega a ser inferior ao correlator com  $K = 1$ , contudo, na simulação com  $N = 31$ , basta incluir mais um usuário ao sistema para o correlator degradar completamente, evidenciando outra grande virtude do estimador geométrico, a resistência à *MAI* e ao efeito *near-far*.

2. Conforme previsto no capítulo 6, o estimador geométrico apresenta desempenho crescente com aumento de  $J$  e/ou  $N$ . O aumento de  $J$  melhora a estimativa da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  e o aumento de  $N$  provê maior dimensão ao subespaço de ruído, sobre o qual é feita a projeção do vetor  $\mathbf{h}$ .
3. Em canais variantes, a janela exponencial apresentou melhor capacidade de adaptação, além de ser mais simples de implementar, já que na janela móvel é necessário armazenar  $J$  matrizes  $N \times N$ , enquanto para a janela exponencial, basta armazenar uma matriz  $N \times N$ .

## 9 Trabalhos Futuros

O tema abordado neste trabalho é bastante extenso e ainda em desenvolvimento. Os resultados aqui apresentados, se por um lado dão a certeza de que as técnicas de estimativas baseadas na decomposição em subespaços são uma alternativa para estimativas de parâmetros de canal em DS-CDMA, por outro lado evidenciam a necessidade de complementação com estudos futuros.

Como possibilidades de pesquisas futuras, pode-se citar:

1. Foi mostrado que as janelas utilizadas para estimação da matriz de correlação de sinal  $\hat{\mathbf{R}}$  constituem um ponto de grande sensibilidade no sistema, sendo que o número ótimo de amostras varia, dependendo de quão rápido varia o canal. Portanto, pode-se implementar uma janela adaptativa em relação à variação dos parâmetros estimados.
2. Este trabalho considerou a taxa de amostragem de símbolo igual ao número de *chips*. Uma taxa maior poderia ser utilizada, o que reduziria a perda na relação  $S/N$ , conforme comentado na seção 4.7.3, ao custo de maior processamento.
3. Para cálculo da matriz de correlação,  $\mathbf{R}(l) = E[y(m)y^\dagger(m+l)]$ , este trabalho sempre considerou apenas  $l=0$ . Conforme comentado na seção 4.7.3, poderia-se considerar também  $l=1$ .
4. Como a matriz de correlação utilizada tem dimensão  $N$ , a soma das dimensões dos subespaços de sinal e ruído também é limitada a  $N$ . Dado que cada usuário gera duas colunas no subespaço de sinal, a capacidade do sistema é limitada a  $K < N/2$ . Formas para "quebrar" este limite é uma área ainda pouco investigada.
5. Estimativa do número de usuários no sistema: normalmente, em sistemas comerciais, o número de usuários em determinado instante é conhecido por um comando central através da troca de informações necessárias para autenticação do usuário. Contudo, com o desenvolvimento de redes "ad hoc",

esta informação nem sempre estará presente. Portanto, métodos para estimativa do número de usuários são necessários nestes casos.

6. Em canais variantes, o algoritmo geométrico demonstrou baixo desempenho quando existem percursos próximos, ou seja, com atrasos relativos inferiores a um chip. Nestes casos o algoritmo pode ser melhorado através da inclusão da expressão (5.27) aumenta a capacidade de discriminação de percursos vizinhos.
7. No capítulo 7 não se conseguiu analisar através de simulações a variação de desempenho devido à escolha de seqüências, uma vez que o sistema reagiu bem à carga inserida até o limite de seqüências dentro das famílias testadas. Assim, para verificação deste item torna necessário um estudo formal sobre escolha de seqüências que melhoram o desempenho do algoritmo.
8. O algoritmo de estimativa de amplitude, apesar de apresentar bons resultados com único usuários ainda precisa ser melhorado para ser utilizado em ambientes multiusuários e com canais variantes.

## 10 Referências

- [1] R. L. Pickholtz, L. B. Milstein, and D.L Schilling, “Spread spectrum for mobile communications,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, pp. 313-321, May 1991.
- [2] T. K. Moon, R. T. Short, and C. K. Rushfort, “Average acquisition time for SSMA channels,” in Proc. IEEE Military Commun. Conf. 1991. Vol 3, pp. 1042-1046.
- [3] R. Lupas and S. Verdú, “Near-far resistance of multiuser detectors in asynchronous channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol 39, pp. 496-508, Apr. 1990.
- [4] S. Verdú, “Optimum Multiuser Signal Detection”, Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Comput. Eng., Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, Aug. 1984.
- [5] S. Verdú, “Minimum probability of error for asynchronous Gaussian multiple-access channels,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-32, pp. 85-96, Jan. 1986.
- [6] A. Duel-Hallen, “A family of multiuser decision-feedback detectors for asynchronous code division multiple-access channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol 43, pp.421-434, Feb./Mar./Apr. 1995.
- [7] U. Fawer and B. Aazhang, “A multiuser receiver for code division multiple access communications over multipath channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol 43, pp.1556-1565, Feb./Mar./Apr. 1995.
- [8] S. Verdu, *Multiuser detection*, Cambridge University Press, 1st edition, 1998, New York, NY.
- [9] E. G. Ström, S. Parkvall, S. L. Miller and B. E. Ottersten, “DS-CDMA synchronization in time-varying fading channels”, *IEEE J. Select Areas Comm.*, vol. 14, pp. 1636-1642, Oct. 1996.
- [10] R. L Pickholtz, D. L. Schilling and L. B Milstein, “Theory of spread spectrum communication – A tutorial,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30 , no. 5, pp. 855-884, May 1982.

- [11] V. H. Poor, "On parameter estimation in DS/SSMA formats," in *Proc. 1988 Int. Conf. Advances in Commun. Contr. Syst.*, vol. 1, Baton Rouge, LA, Oct., 1988, pp. 98-109.
- [12] R. A. Iltis. "A digital receiver for demodulation of CDMA waveforms with *a-priori* unknown delays and amplitudes," in *Proc. IEEE Military Commun. Conf.* 1991, pp. 113-116.
- [13] Z. Xie, C. K. Rushforth, R. T. Short and T. K. Moon, "Joint Signal Detection and Parameter Estimation in Multiuser Communications," in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 41, no. 7, pp. 1208-1215, Aug. 1993.
- [14] A. Radovic and B. Aazhang, "Iterative algorithms for joint data detection and delay estimation for code division multiple access communication systems," in *Proc. 31<sup>st</sup> Annual Allerton Conf. Commun., Control, Computing.* Allerton House, Monticello. IL. 1993, pp. 1-10.
- [15] S. E. Bensley and B. Aazhang, "Subspace-based channel estimation for code division multiple access communications systems," in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 8, pp. 1009-1020, Aug. 1996.
- [16] S. E. Bensley and B. Aazhang, "Maximum-Likelihood Synchronization of a Single User for Code-Division Multiple-Access Communication Systems," in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 3, pp. 392-300, March 1998.
- [17] C. Sengupta, J. R. Cavallaro, and B. Aazhang, "On multipath channel estimation for CDMA using multiple sensors," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 543-553, Mar. 2001.
- [18] E. G. Ström, S. Parkvall, S. L. Miller, and B. E. Ottersten, "Propagation delay estimation in asynchronous Direct Sequence Code Division Multiple Access systems," *IEEE Trans. Communications*, vol. 44, no. 1, pp. 84 -93, Jan. 1996.
- [19] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propagation.*, vol. 34, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [20] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT - Estimation of signal parameters via rotational invariant techniques," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, July 1989.
- [21] E. Eleftheriou and D. D. Falconer, "Tracking properties and steady-state performance of RLS adaptive filter algorithms," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 1097-1109, Oct. 1986.
- [22] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computation*, Baltimore MD:

The Johns Hopkins Univ. Press, 1983.

[23] P. Stoica and A. Nehorai, “Statistical efficiency study of direction estimation methods part I: Analysis of MUSIC and preliminary study of MLM,” *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing – Volume II*, S. Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1991, pp. 263-305.

[24] Z. S. Liu, J. Li and S. L. Miller, “A receiver diversity based code-timing estimator for asynchronous DS-CDMA systems,” in *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Seattle, WA, May 1998, pp. 3245-3248.

[25] R. Madyastha, “Antenna Arrays for Wireless CDMA Communications Systems,” *Ph.D. dissertation, ECE Dept., Rice Univ., Houston, TX*, 1997.

[26] P. Stoica and A. Nehorai, “MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer-Rao Bound,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720-740, May 1989.

[27] K. Sharman, T. S. Durrani, M. Wax and T. Kailath, “Asymptotic performance of eigenstructure spectral analysis methods,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Processing*, San Diego, CA, Mar. 1984, pp. 45.5.1-45.5.4.

[28] K. Sharman, T. S. Durrani, M. Wax and T. Kailath, “A comparative study of modern eigenstructure methods for bearing estimation – A new high performance approach,” in *Proc. 25<sup>th</sup> IEEE Conf. Dec. Contr.*, Athens, Greece, Dec. 1986, pp. 1737-1742.

[29] D. J. Jeffries and D. R. Farrier, “Asymptotic results for eigenvector methods,” *IEE Proc.*, vol. 132, pt. F, pp. 589-594, 1985.

[30] M. Kaveh and A. J. Barabell, “The statistical performance of the MUSIC and minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 331-341, Apr. 1986; corrections in *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, p. 633, June. 1986.

[31] S. Y. Miller and S. C. Schwartz, “Parameter estimation for-asynchronous multiuser communications,” presented at the 1989 Conf. inform. Sci. Syst., Johns Hopkins Univ., Mar. 1989.

[32] M. Wax and T. Kailath, “Detection of signals by information theoretic criteria,” in *IEEE Trans. Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, pp. 1737-1742, Apr. 1985.

[33] H. Wang and M. Kaveh, “On the performance of signal-subspace process-

ing - Part I: Narrow band systems,” in *IEEE Trans. Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 1201-1209, Oct. 1986.

[34] P. L. O. Costa Neto, *Estatística*, Editora Edgard Blücher, primeira edição, 1977, São Paulo, SP.

[35] V. Pisarenko, “The retrieval of harmonics from a covariance function”, *Geophysical J. Royal Astron. Soc.*, vol. 33, pp. 347-366, 1973.

[37] V. Adamjan, D. Arov and M. Krein, “Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem,” *Math. USSR Sbornik*, vol. 15, no. 1, pp. 31-73, 1971.

[38] F. Li, R. Vaccaro and D. Tufts, “Min-Norm Linear Prediction for arbitrary sensor arrays,” in *Proc. IEEE ICASSP*, (Glasgow), pp. 2613-2616, May 1989.

[39] G. H. Golub and C. F. Vam Loan, *Matrix Computations*, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1984.

[40] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill International Editions, 3rd edition, 1995, New York, NY.

[41] D. V. Sarwate and M. B. Pursley, ”Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences,” *Proceedings of the IEEE*, v. 68, n. 5, p. 593-619, May 1980.

[42] L. R. WELCH, ”Lower Bounds on the Maximum Crosscorrelation of Signals,” *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT-20, n. 3, p. 397-399, May 1974.

[43] T. S. Rappaport, *Wireless Communications Principles and Practice*, Prentice Hall, 1996, Upper Saddle River, New Jersey .

# Índice Remissivo

- cenario2, 77
- cenario2dl, 77
- cenario3dl, 85
- contexto, 32
- CRLB, 11
- Distribuição assintótica, 65
- estimador e estimativa, 4
- estimativa conjunta, 35
- Estimativa de Amplitudes, 81
- estimativa de parâmetros, 28
- Estimativas de Amplitudes, 75
- estimativas de atrasos, 72
- maxvero, 48
- metodosdeestim, 5
- Modelo, 49
- Problemas, 28
- sec:crlbmu, 64
- sub-ótimo estimativa conjunta, 38
- subespaco, 43

# Apêndice A – Modelagem do Simulador e Rotinas

## A.1 Objetivo do Simulador

O simulador tem por objetivo verificar o desempenho do estimador geométrico sob os seguintes aspectos:

- Precisão: capacidade de estimar corretamente atrasos e amplitude do sinal recebido. Neste sentido, o simulador calcula a raiz do erro quadrático médio:

$$\epsilon = \sqrt{E[(\hat{\tau} - \tau)^2]}$$

- Agilidade na aquisição: esta medida é relacionada à rapidez com que o algoritmo alcança uma margem de erro aceitável, partindo-se de um estado inicial aleatório. Neste item, adotou-se como medida a probabilidade de aquisição, definida como:

$$|\hat{\tau} - \tau_k| < \delta$$

- Capacidade de *tracking*: mede a agilidade do algoritmo em, após a aquisição, acompanhar as variações dos parâmetros estimados. Para verificação deste item, o simulador plota em um mesmo gráfico o atraso real e o atraso estimado.
- Sensibilidade à variação de ruído e *MAI*: o simulador permite estabelecer faixas de ruído ou de *MAI*, o que possibilita a avaliação do algoritmo em diversos pontos de operações diferentes.
- Sensibilidade ao número de usuários: o número de usuários pode ser alterado dentro do limite estabelecido pelo algoritmo, o qual está relacionado ao tamanho da seqüência de espalhamento. A restrição é  $K < \frac{N}{2}$ .

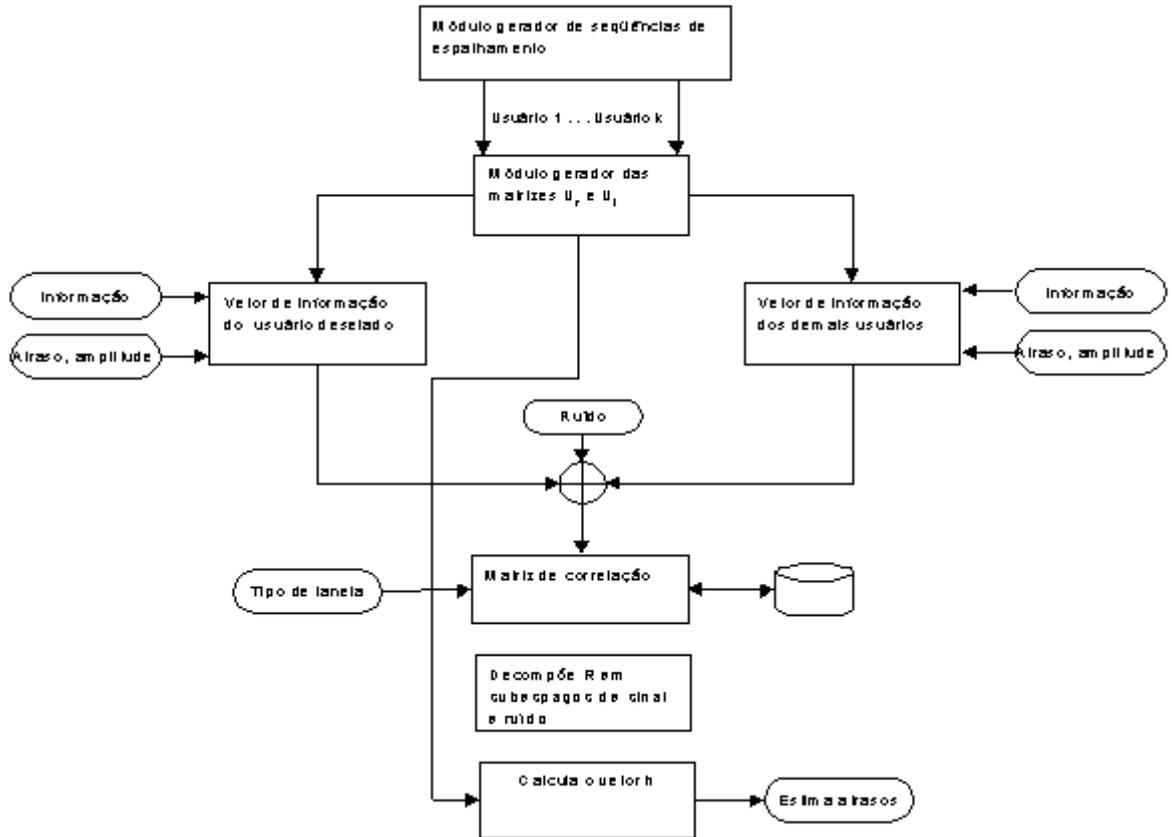


Figura A.1: Diagrama em blocos do simulador

- Influência do tipo e tamanho da seqüência de espalhamento: verifica os efeitos do tamanho da seqüência de espalhamento sobre a precisão das estimativas. O simulador aceita qualquer tamanho e tipo de seqüência, uma vez que para o simulador a seqüência de espalhamento de cada usuário é um vetor de entrada.
- Comparação com *slide correlator*: quanto à variação de  $S/N$  o simulador permite construção de gráficos conjuntos para fins de comparação de desempenho.

## A.2 Diagrama em blocos do simulador

A figura A.1 apresenta o diagrama em blocos do simulador.

### Módulo gerador de seqüências de espalhamento

Nesta simulação foi utilizado o Simulink do Matlab para geração das seqüências de  $K$  usuários. O simulador trabalha com qualquer tipo de seqüência, já que estas seqüências para o simulador são vetores de entrada.

### Módulo gerador das matrizes $\mathbf{U}_r$ e $\mathbf{U}_l$

Este módulo utiliza as seqüências de espalhamento de usuário para gerar as matrizes  $\mathbf{U}_r$  e  $\mathbf{U}_l$ . Exemplo: seja a seqüência de usuário  $\mathbf{y}_{in} = [1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1]^\dagger$ , então:

$$\mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Vetor de informação do usuário desejado

O vetor de informação do usuário é montado utilizando-se duas colunas vizinhas das matrizes  $\mathbf{U}_r$  e  $\mathbf{U}_l$ . Os bits transmitidos (bloco informação) são gerados aleatoriamente, com igual probabilidade de zeros e uns. As colunas das matrizes  $\mathbf{U}_r$  e  $\mathbf{U}_l$  escolhidas para compor o vetor de informação podem ser fixas (cenário invariante no tempo, isto é, cenários 1 e 2 ou podem variar de acordo com um "gerador de atrasos" (cenário 3), conforme capítulo 7.

### Vetor de informação dos usuários indesejados: gerador de *MAI*

São gerados da mesma forma que os vetores de informação do usuário desejado, com geradores de informação, atrasos e amplitudes independentes. Este bloco gera a interferência de múltiplo acesso, ou *MAI*. A relação entre a potência do usuário desejado e as potências dos demais usuários pode ser fixa ou variável.

### Adição de ruído gaussiano

O ruído gaussiano é adicionado após a adição da *MAI*. A potência de ruído

também pode assumir um valor fixo ou variar dentro de uma faixa.

### Módulo gerador da matriz de correlação

Este módulo estima a matriz de correlação através de uma estimativa de  $E[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger]$ . Três tipos de janela podem ser escolhidos para este cálculo: janela fixa de tamanho  $J$ , janela retangular ou móvel de tamanho  $J$  ou janela exponencial com fator de "esquecimento"  $\beta$ . O módulo gerador da matriz de correlação trabalha em conjunto com um banco de dados de medições, armazenando e recuperando medidas anteriores para utilização no cálculo da média.

### Módulo de decomposição da matriz de correlação

Este módulo decompõe a matriz  $R$  em autovalores e autovetores e encontra os subespaços de sinal e ruído através da ordenação crescente dos autovalores. Os  $2K$  autovetores relacionados aos  $2K$  maiores autovalores formam o subespaço de sinal.

### Módulo de cálculo do vetor $\mathbf{h}$

Este módulo é reponsável por estimar o vetor  $\mathbf{h}$ , ou seja, pela minimização da equação (5.20). A partir deste ponto, com o vetor  $\mathbf{h}$  em mãos, a estimação de atrasos e amplitudes podem seguir caminhos diferentes, conforme detalhado no capítulo 5.

## A.3 Rotinas

Segue um exemplo de uma rotina principal e rotinas auxiliares.

```

Estimador geométrico - sliding window (Rotina Principal)
%-----
%Inicializa, gera código de usuário com número inteiro de atrasos e gera
%matrizes  $U_r$  e  $U_l$ 
a0=1;
b=1;%define bit 1 do segundo usuário
c=1;%define bit 1 do terceiro usuário
d=1;%define bit 1 do quarto usuário
e=1;%define bit 1 do quinto usuário
f=1;%define bit 1 do sexto usuário
y=length(yout);
R=zeros(y);
Ur=create_Ur(yout);

```

```

Ul=create_Ul(yout);
i=1;
Y0=zeros(1,y);
J=30;
flag=0;
for n=1:2000
Int=ph1I(n);
Int1=ph2I(n);
Fra1=ph1F(n);
Fra2=ph2F(n);
Fad1=mod1(n);
Fad2=mod2(n);
X1=(Ur(1:y,Int))';
X2=(Ul(1:y,Int))';
X3=(Ur(1:y,(Int-1)))';
X4=(Ul(1:y,(Int-1)))';
X5=(Ur(1:y,Int1))';
X6=(Ul(1:y,Int1))';
X7=(Ur(1:y,(Int1-1)))';
X8=(Ul(1:y,(Int1-1)))';
%-----
%for J=50:50 %tamanho da janela
    %for j=1:1 %numero de amostras para calculo do erro medio
        while i<J % preenche a matriz Y0 que contem J vetores de observacao
m=rand(1);
if m<.5
    a1=-1;
else
    a1=1;
end
X=a0*(Fra1*X1+(1-Fra1)*X3)+a1*(Fra1*X2+(1-Fra1)*X4);
X=Fad1*X;
X9=a0*(Fra2*X5+(1-Fra2)*X7)+a1*(Fra2*X6+(1-Fra2)*X8);
X9=Fad2*X9;
X=X+X9;
Z=user_noise(yout1,b);%usuario interferente 1
Z1=Z(1,1:y);%usuario interferente 1
b=Z(1,(y+1));%usuario interferente 1

```

```

V=user_noise1(yout2,c);%usuario interferente 2
V1=V(1,1:y);%usuario interferente 2
c=V(1,(y+1));%usuario interferente 2
D=user_noise2(yout3,d);%usuario interferente 3
D1=D(1,1:y);%usuario interferente 3
d=D(1,(y+1));%usuario interferente 3
O=user_noise3(yout4,e);%usuario interferente 4
O1=O(1,1:y);%usuario interferente 4
e=O(1,(y+1));%usuario interferente 4
G=user_noise4(yout5,f);%usuario interferente 5
G1=G(1,1:y);%usuario interferente 5
f=G(1,(y+1));%usuario interferente 5
X=X+Z1+V1+D1+O1+G1;%usuarios interferentes
Y1=awgn(X,20);
Y0(i,1:y)=Y1;
R1=Y1'*Y1;
R=R+R1;
a0=a1;
i=i+1;
    end
%-----
m=rand(1); %gera 1 vetor de observação e calcula e R
if m<.5
    a1=-1;
else
    a1=1;
end
X=a0*(Fra1*X1+(1-Fra1)*X3)+a1*(Fra1*X2+(1-Fra1)*X4);
X=Fad1*X;
X9=a0*(Fra2*X5+(1-Fra2)*X7)+a1*(Fra2*X6+(1-Fra2)*X8);
X9=Fad2*X9;
X=X+X9;
Z=user_noise(yout1,b);%usuario interferente 1
Z1=Z(1,1:y);%usuario interferente 1
b=Z(1,(y+1));%usuario interferente 1
V=user_noise1(yout2,c);%usuario interferente 2
V1=V(1,1:y);%usuario interferente 2
c=V(1,(y+1));%usuario interferente 2

```

```

D=user_noise2(yout3,d);%usuario interferente 2
D1=D(1,1:y);%usuario interferente 2
d=D(1,(y+1));%usuario interferente 2
O=user_noise3(yout4,e);%usuario interferente 4
O1=O(1,1:y);%usuario interferente 4
e=O(1,(y+1));%usuario interferente 4
G=user_noise4(yout5,f);%usuario interferente 5
G1=G(1,1:y);%usuario interferente 5
f=G(1,(y+1));%usuario interferente 5
X=X+Z1+V1+D1+O1+G1;%usuarios interferentes
Y1=awgn(X,20);
R1=Y1'*Y1;
R0=Y0(1,1:y)'*Y0(1,1:y);
R=R+R1-R0;
Y0=circshift(Y0,-1);
Y0(J,1:y)=Y1;
a0=a1;
R2=R/J;
%-----
[K,W]=eig(R2);%calcula Vn, minimiza M, estima o atraso T e calcula o erro
Vn=[K(1:y,1:(y-12))];
M=(Ur'*(Vn*Vn')*Ur + Ul'*(Vn*Vn')*Ul);
[Q,A]=eig(M);
a=minimo(A);
h=abs([Q(1:y,a)]);
[S,P1]=max(h);
if P1>1
if h(P1-1)>h(P1+1)
P2=P1-1;
T1=P2+S/(S+h(P2))+1;
else
P2=P1+1;
T1=P1+h(P2)/(S+h(P2))+1;
end
else
P2=P1+1;
T1=P1+h(P2)/(S+h(P2))+1;
end
end

```

```

h1=zeros(y,1);
h1(P1)=h(P1);
h1(P2)=h(P2);
h2=h-h1;
[S1,P3]=max(h2);
if P3>1&&h(P3-1)>h(P3+1)
    P4=P3-1;
    T2=P4+S1/(S1+h(P4))+1;
else
    P4=P3+1;
    T2=P3+h(P4)/(S1+h(P4))+1;
end
if T1>=T2
    Ta1(n)=T2;
    Ta2(n)=T1;
else
    Ta1(n)=T1;
    Ta2(n)=T2;
end
if n>1&&abs(Ta1(n)-Ta1(n-1))>2&&flag<10
    Ta1(n)=Ta1(n-1);
    flag=flag+1;
else
    flag=0;
end
if n>1&&abs(Ta2(n)-Ta2(n-1))>2&&flag<10
    Ta2(n)=Ta2(n-1);
    flag=flag+1;
else
    flag=0;
end
%XX(n,1:4)=P;
disp('calculando')
end
hold on;
plot(Ta1);
plot(ph1I+ph1F);

```

Bloco gerador de Ul e Ur (rotina auxiliar)

```
function y = create_Ul(x);
s=size(x);
s=s(1);
mk=ones(s,1);
mk(1)=0;
Ul=zeros(s);
Ul(1:s,1)=x;
hx=x;
for i=1:s-1
    hx=circshift(hx,1).*mk;
    Ul(1:s,i+1)=hx;
end
y=Ul;
```

```
function y = create_Ur(x);
s=size(x);
s=s(1);
mk=ones(s,1);
mk(s)=0;
Ur=zeros(s);
Ur(1:s,1)=x;
hx=x;
for i=1:s-1
    hx=circshift(hx,-1).*mk;
    Ur(1:s,s-(i-1))=hx;
end
y=Ur;
```

Bloco gerador de MAI (rotina auxiliar)

```
function y = user_noise(x,a);
y=length(x);
Ur=create_Ur(x);
Ul=create_Ul(x);
Int=8;
```

```

X1=(Ur(1:y,Int))';
X2=(Ul(1:y,Int))';
X3=(Ur(1:y,(Int-1)))';
X4=(Ul(1:y,(Int-1)))';
m=rand(1);
if m<.5
    p=-1;
else
    p=1;
end
X=a*(.6*X1+.4*X3)+p*(.6*X2+.4*X4);
y=[X,p];

```

Encontra mínimo - Bloco de cálculo o vetor h (rotina auxiliar)

```

function y = minimo(x);
a=max(x);
[C,I]=min(a);
y=I;

```

Estimador correlator - (Rotina Principal)

```

a=repete_vetor(yout);
b=a;
k=length(a);
a1=circshift(a,[0 1]);
for n=1:2000
frac=4*ph1F(n) - floor(4*ph1F(n));
a2=(1-frac)*a+frac*a1;
int=4*ph1I(n)+floor(4*ph1F(n));
a3=circshift(a2,[0 int]);
frac1=4*ph2F(n)-floor(4*ph2F(n));
a4=(1-frac1)*a+frac1*a1;
int1=4*ph2I(n)+floor(4*ph2F(n));
a5=circshift(a4,[0 int1]);
a6=mod1(n)*a3+mod2(n)*a5+ruido_u(yout1,n);%+ruido_u(yout2,n);%+ruido_u(yout3,n);
a6=awgn(a6,20);
R=0;
S=0;

```

```
R1=0;
S1=0;
for j=1:k
S=a6.*b;
C=sum(S);
R(j)=C;
b=circshift(b,[0 1]);
end
[M,I]=max(R);
T1=(I-1)/4;
amp(n)=M/124;
if n>5
amp1=(amp(n)+amp(n-1)+amp(n-2)+amp(n-3)+amp(n-4))/5;
else
    amp1=amp(n);
end
a3e=amp1*circshift(b,[0 (I-1)]);
n
a6=a6-a3e;
for j=1:k
S1=a6.*b;
C1=sum(S1);
R1(j)=C1;
b=circshift(b,[0 1]);
end
[M1,I1]=max(R1);
T2=(I1-1)/4;
amp1(n)=M1/124;
if T1>T2
    Ta1(n)=T2;
    Ta2(n)=T1;
else
    Ta1(n)=T1;
    Ta2(n)=T2;
end
end
end
```

Rotina 'Repete vetor" (auxiliar do estimador correlator)

```
function y = repete_vetor(x)
k=length(x);
for i=0:(k-1)
    m=x(i+1);
    for j=1:4
        s(4*i+j)=m;
    end
end
y=s;
```