

Sobre a Determinação da Capacidade de Sistemas CDMA

Dr. Paul Jean Etienne Jeszenszky
professor associado

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Depto. de Engenharia Eletrônica
LCS-Laboratório de Comunicações e Sinais

(e-mail: pjj@lcs.poli.usp.br)

1 - INTRODUÇÃO

A história do desenvolvimento de sistemas "Spread-Spectrum" (SS) remonta aos anos 20, com aplicações exclusivamente militares e daí sua pouca, ou nenhuma divulgação na literatura aberta. Em 1976 é publicado, por Robert Dixon, o primeiro livro sobre o assunto: "Spread Spectrum Systems", que é precursor de vários outros e pode ser considerado como um marco a partir do qual a discussão sobre o assunto torna-se pública. Essa discussão aberta sobre o assunto, provavelmente, originou-se das aplicações não militares de SS, assim como de um avanço tecnológico que tornou o processamento complexo de sinais realizável.

Uma definição para um sistema SS, que reflete adequadamente as características desta técnica, é:

"SS é um modo de transmissão em que o sinal ocupa uma banda superior à mínima necessária para àquela informação; o alargamento (ou espalhamento) da banda é obtido por meio de um código, que é independente da informação, e uma recepção sincronizada com o mesmo código é usada no receptor para concentrar o sinal em uma banda menor e posterior detecção".

Segundo esta definição, sistemas tradicionais de modulação/codificação como FM, PCM, etc, não constituem um sistema SS.

Várias características benéficas podem ser obtidas com o espalhamento espectral, entre as quais: capacidade de rejeitar interferências, baixa probabilidade de interceptação, sistemas multiusuários multiplexados por código, sistemas de radar precisos, etc.

Os meios usuais para obter-se o espalhamento espectral são:

- DS (Direct Sequence): onde uma seqüência pseudo-aleatória rápida causa transições na fase da portadora modulada com a informação.
- FH (Frequency Hopping): onde a portadora modulada é deslocada em frequência de uma maneira pseudo-aleatória.
- TH (Time Hopping): onde surtos do sinal com a informação, são iniciados em instantes pseudo-aleatórios.

Existem outras possibilidades menos usuais, assim como é possível a combinação destas técnicas (DS com FH, por exemplo).

Para o texto a seguir consideraremos apenas a forma DS, procurando detalhar algumas abordagens possíveis para o cálculo do desempenho de sistemas multiplexados por código (também conhecidos como sistemas CDMA, de "Code Division Multiple Access"). Sistemas CDMA comparam-se de forma favorável com outras técnicas usuais de multiplexação, como TDMA ou FDMA, na comunicação de sinais vocais, por exemplo. Esta vantagem advém, basicamente, do fato de ser possível usar a favor do sistema, algumas características comuns deste tipo de comunicação, de uma forma mais simples que nos outros.

A caracterização do desempenho será baseada no cálculo da probabilidade de erro de bit final da informação, para um sistema dado. Esta abordagem permitirá, por exemplo, determinar a capacidade de um sistema CDMA, isto é, determinar o número máximo de usuários para um determinado desempenho desejado.

2 - ESPALHAMENTO ESPECTRAL E CDMA

O sistema a estudar possui o modelamento do diagrama 1: cada usuário transmite um sinal $s_i(t)$, para $i = 1, 2, \dots, K$, onde K é o número de usuários. Admite-se que na entrada do receptor tem-se todos os sinais transmitidos somados e que o efeito de todas as interferências introduzidas no meio de transmissão é um ruído branco gaussiano aditivo $n(t)$ de densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$. Cada sinal $s_i(t)$ é formado pela informação $b_i(t)$ multiplicada pelo código $c_i(t)$ modulados convenientemente, isto é:

$$s_i(t) = A_i \cdot b_i(t) \cdot c_i(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta_i) \quad (1)$$

com:

$$b_i(t) = \pm 1 \quad \text{no intervalo} \quad k \cdot T \leq t \leq (k+1) \cdot T \quad \text{com} \quad k = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$$
$$c_i(t) = \pm 1 \quad \text{no intervalo} \quad j \cdot T_c \leq t \leq (j+1) \cdot T_c \quad \text{com} \quad j = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$$

Onde $A_i = \sqrt{2 \cdot P_i}$, com P_i representando a potência do i -ésimo sinal transmitido.

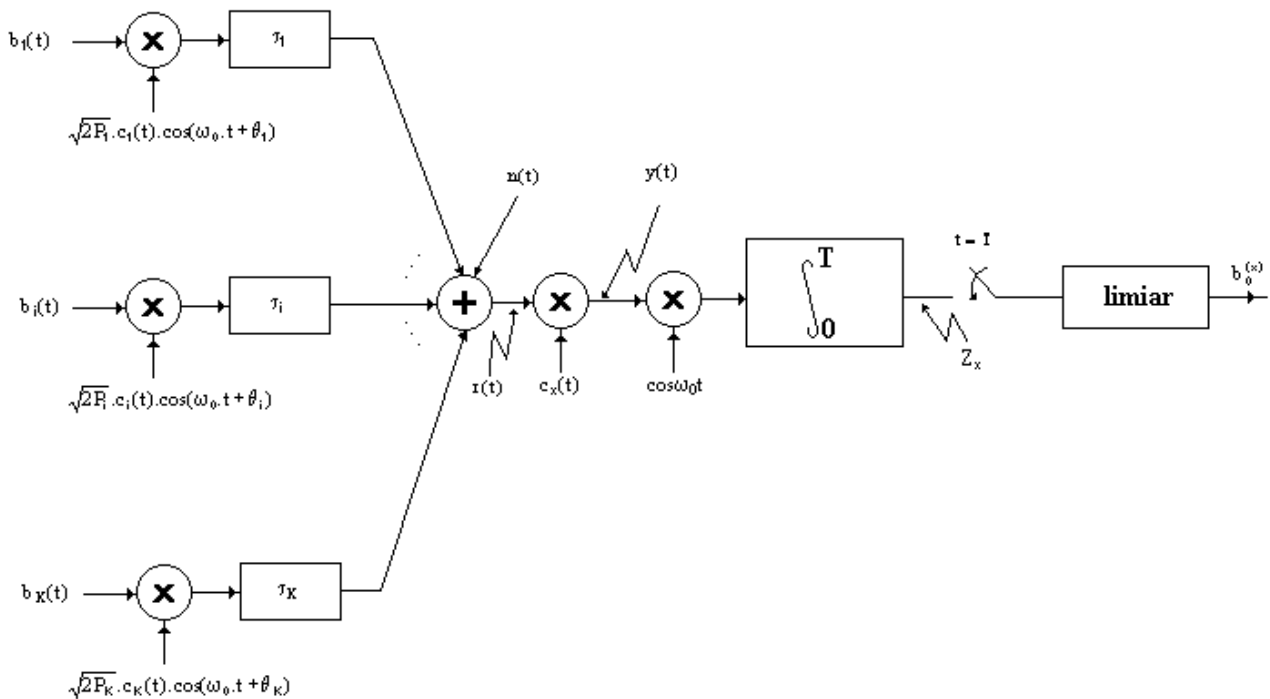


Diagrama 1

O efeito da multiplicação da informação pelo código $c_i(t)$ é o de espalhar no espectro a banda ocupada pela informação. O efeito do modulador é deslocar a banda anteriormente citada para uma faixa de frequências mais altas possibilitando tanto uma transmissão como uma recepção mais eficiente quando se pensa em uma utilização em telecomunicações. A modulação poderia não ser necessária dependendo da aplicação.

Supondo que o sinal transmitido pelo usuário i chegue no receptor com um atraso τ_i , o sinal na entrada do receptor, devido a este usuário é $r_i(t)$:

$$r_i(t) = s_i(t - \tau_i) = A_i \cdot b_i(t - \tau_i) \cdot c_i(t - \tau_i) \cdot \cos[\omega_0(t - \tau_i) + \theta_i] \quad (2)$$

Fazendo $\phi_i = \theta_i - \omega_0 \cdot \tau_i$ resulta:

$$r(t) = \sum_{i=1}^K r_i(t) + n(t) = \sum_{i=1}^K A_i \cdot b_i(t - \tau_i) \cdot c_i(t - \tau_i) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_i) + n(t) \quad (3)$$

Admite-se que o receptor consiste apenas de um demodulador (perfeitamente sincronizado) com o objetivo de trazer o sinal transmitido para a banda base, multiplicado em seguida pela sequência de espalhamento do usuário $c_x(t)$ (perfeitamente sincronizado para que se tenha $c_x^2(t)$), onde x se refere a qual usuário transmissor se deseja receber. Segue-se então um correlator que embora não seja o receptor ótimo para a recepção deste tipo de sinal, é bem simples de se implementar e possui uma performance bem próxima ao ótimo.

O sinal na saída do correlator Z_x no instante T é:

$$Z_x = \int_0^T r(t) \cdot c_x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \quad (4)$$

Supondo que o receptor possui uma curva de resposta abaixo de ω_0 (o que ocorre na prática):

$$Z_x = \text{Inf}_x + \text{Interf}_x + \eta_x \quad (5)$$

onde:

$$\text{Inf}_x = \frac{A_x \cdot T \cdot b_o^{(x)}}{2} \quad (6)$$

$$\text{Interf}_x = \frac{1}{2} \times \int_0^T \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K A_i \cdot d_i(t - \tau_i) \cdot c_i(t - \tau_i) \cdot c_x(t) \cdot \cos(\phi_i) \cdot dt \quad (7)$$

$$\eta_x = \int_0^T n(t) \cdot c_x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \quad (8)$$

As variáveis acima tem o seguinte significado físico:

- Inf_x é o sinal que se deseja receber.

- $b_0^{(x)} \in \{1, -1\}$ é o dado desejado, recebido no intervalo $[0, T]$.

- Interf_x é a interferência dos outros usuários, a qual desejamos minimizar.

- η_x é a interferência devida ao ruído branco gaussiano, sobre a qual, pela sua própria natureza não temos controle (é demonstrado no apêndice que η_x é uma variável aleatória de média nula e variância $\frac{N_0 \cdot T}{4}$).

Definindo as seguintes variáveis, e notando as formas de onda do diagrama 2, consegue-se desmembrar um pouco mais a interferência Interf_x :

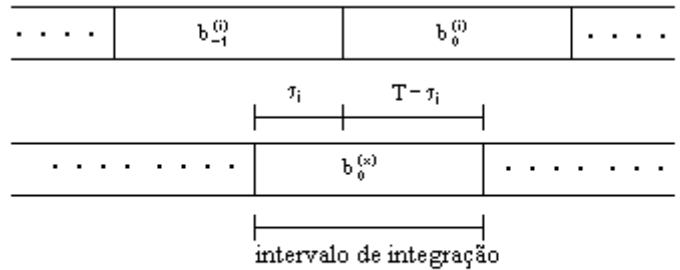


Diagrama 2

$$R_{i,x}(\tau) = \int_0^{\tau} c_i(t - \tau) \cdot c_x(t) \cdot dt \quad (9)$$

$$\hat{R}_{i,x}(\tau) = \int_{\tau}^T c_i(t - \tau) \cdot c_x(t) \cdot dt \quad (10)$$

$$f_{i,x}(\tau) = b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau) \quad (11)$$

$$\hat{f}_{i,x}(\tau) = b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau) \quad (12)$$

$$\text{Interf}_x = \frac{1}{2} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K A_i \cdot [f_{i,x}(\tau_i) + \hat{f}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i) \quad (13)$$

~

$$\text{Interf}_x = \frac{1}{2} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K A_i \cdot [b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i) \quad (14)$$

~

onde:

~

- $R_{i,x}(\tau_i)$ e $\hat{R}_{i,x}(\tau_i)$ são conhecidas como funções de correlação cruzada parcial contínua no tempo.

$-b_{-1}^{(i)}$ e $b_0^{(i)}$ são dois bits de dados consecutivos de informação transmitidos pelo i -ésimo usuário no intervalo de tempo de um bit de informação do usuário x -ésimo, o qual deseja-se receber.

Da expressão anterior nota-se que um forma de diminuir o módulo de Interf_x é com a escolha adequada de sequências de código, de modo a minimizar os módulos de $R_{i,x}(\tau_i)$ e $\hat{R}_{i,x}(\tau_i)$.

Seguindo uma nomenclatura introduzida por Pursley [5] definiremos as seguintes variáveis:

$$I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot [b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i) \quad (15)$$

$$\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau_i, \phi_i) \quad (16)$$

A variável $I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi)$ é chamada de interferência de múltiplo acesso normalizada na saída do x -ésimo receptor devido ao i -ésimo sinal interferente.

Reescrevendo Interf_x e admitindo-se que todas as amplitudes, a do sinal de interesse e dos sinais interferentes, tem a mesma amplitude na entrada do receptor, isto é, $A_i = A$ (o problema de diferentes níveis de sinais na entrada do receptor é importante em CDMA, pois um aumento no nível do sinal desejado implica em uma melhor recepção deste, porém aumenta a interferência deste sinal nos outros receptores, prejudicando o sistema como um todo):

$$\text{Interf}_x = \frac{A \cdot T}{2} \times \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi}) \quad (17)$$

$$Z_x = \frac{A \cdot T}{2} \times [b_0^{(x)} + \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] + \eta_x \quad (18)$$

Sabendo as características da variável η_x podemos desenvolver uma expressão básica para o cálculo da probabilidade de erro P_e , na saída do receptor em consideração, no caso de transmissão de mensagens equiprováveis:

$$P_e = \frac{1}{2} \times \text{Prob}\{ b_0^{(x)} = 1 \text{ e } Z_x < 0 \} + \frac{1}{2} \times \text{Prob}\{ b_0^{(x)} = -1 \text{ e } Z_x > 0 \} \quad (19)$$

Devido à simetria do problema:

$$P_e = \text{Prob}\{ b_0^{(x)} = 1 \text{ e } Z_x < 0 \} \quad (20)$$

Portanto:

$$P_e = \text{Prob}\left\{ \left[\frac{A \cdot T}{2} \times [1 + \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] + \eta_x \right] < 0 \right\} = \text{Prob}\left\{ \eta_x < -\frac{A \cdot T}{2} \times [1 + \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] \right\} \quad (21)$$

Devido à simetria da função densidade de probabilidade gaussiana:

$$P_e = \text{Prob}\left\{ \eta_x > \frac{A \cdot T}{2} \times [1 + \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] \right\} \quad (22)$$

$$P_e = Q\left\{ \frac{2 \cdot A}{N_0} \times [1 + \gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] \right\} \quad (23)$$

$$\text{onde: } Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \times \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot dy \quad (24)$$

3 - ABORDAGEM DO PIOR CASO, [6]

Uma abordagem importante, pois mostra um caso limite, é a do pior caso, que consiste em minimizar $\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})$, uma vez que na expressão (23) para P_e , a função $Q(x)$ é monotonicamente decrescente.

Da simetria da função $\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})$:

$$\min[\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] = -\max[\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})] = -\max\left[|\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})|\right] = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \max\left[|I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau_i, \phi_i)|\right] \quad (25)$$

Portanto, da equação acima, maximizaremos $I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot [b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i)$:

a) em relação a ϕ_i

Da característica da função $\cos(\phi_i)$ sabe-se que $\max[\cos(\phi_i)] = 1$ e $\min[\cos(\phi_i)] = -1$, permitindo escrever:

$$-T^{-1} \cdot \max \left[\left| b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] < I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) < T^{-1} \cdot \max \left[\left| b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] \quad (26)$$

b) em relação a $b_{-1}^{(i)}$ e $b_0^{(i)}$

Definindo as funções de correlação cruzada par (e ímpar, respectivamente) contínuas no tempo por:

$$\mathfrak{R}_{i,x}(\tau_i) = R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i) = \int_0^T c_i(t - \tau_i) \cdot c_x(t) \cdot dt \quad (27)$$

$$\hat{\mathfrak{R}}_{i,x}(\tau_i) = R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \quad (28)$$

e levando em conta todas as combinações possíveis de $b_{-1}^{(i)}$ e $b_0^{(i)}$, obtemos:

$$T^{-1} \cdot \max \left[\left| b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] = T^{-1} \cdot \max \left[\left| \mathfrak{R}_{i,x}(\tau_i) \right|, \left| \hat{\mathfrak{R}}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] = T^{-1} \cdot \max \left[\left| R_{i,x}(\tau_i) \right| + \left| \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right]$$

e finalmente:

$$-T^{-1} \cdot \max \left[\left| R_{i,x}(\tau_i) \right| + \left| \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] < I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) < T^{-1} \cdot \max \left[\left| R_{i,x}(\tau_i) \right| + \left| \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right| \right] \quad (29)$$

c) em relação a τ_i

Demonstra-se que os máximos locais e os mínimos locais de $\left| R_{i,x}(\tau_i) \right| + \left| \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right|$ ocorrem em valores de τ_i que são

múltiplos inteiros de T_c . Assim, chamando de ξ o maior valor entre os todos os resultados de $\left| R_{i,x}(\tau_i) \right| + \left| \hat{R}_{i,x}(\tau_i) \right|$ calculados nos múltiplos inteiros de T_c , isto é, para $\tau_i = 0 \cdot T_c, 1 \cdot T_c, 2 \cdot T_c, \dots, (N-1) \cdot T_c$, a interferência de múltiplo acesso normalizada pode ser limitada superior e inferiormente por:

$$-T^{-1} \cdot \xi < I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) < T^{-1} \cdot \xi \quad (30)$$

Esta abordagem é importante, porém, o valor obtido para a probabilidade de erro ocorre pouco frequentemente na prática. Daí a necessidade de outras abordagens, geralmente envolvendo o uso de estatística, para calcular um valor médio da probabilidade de erro ou próximo dela (a obtenção de aproximações é importante, principalmente de limites superiores e inferiores, pois geralmente o cálculo computacional necessário é menor).

4 - ABORDAGEM SEGUNDO PURSLEY, [5]

A abordagem seguida por Pursley emprega métodos estatísticos e uma aproximação em seu final, tendo como objetivo obter uma probabilidade de erro média. Isto é realizado calculando-se a variância de Z_x supondo que ϕ_i e τ_i são variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalos $[0, 2 \cdot \pi]$ e $[0, T]$ respectivamente, além de $b_{-1}^{(i)}$ e $b_0^{(i)}$ serem duas variáveis aleatórias equiprováveis, podendo assumir os valores $\{-1, +1\}$:

$$\text{var}[Z_x] = \text{var}[\text{Inf}_x] + \text{var}[\text{Interf}_x] + \text{var}[\eta_x] \quad (31)$$

$\text{var}[\text{Inf}_x] = 0$, porque Inf_x é um evento certo.

$\text{var}[\eta_x] = \frac{N_0 \cdot T}{4}$, conforme demonstrado no apêndice.

$$\text{var}[\text{Interf}_x] = \text{var} \left[\frac{A}{2} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [b_{-1}^{(i)} \cdot R_{i,x}(\tau_i) + b_0^{(i)} \cdot \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i) \right] = \text{var} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i \cdot \cos(\phi_i) \right] \quad (32)$$

Calculando a variância em relação a ϕ_i :

$$\text{var}[\text{Interf}_x] = E[\text{Interf}_x^2] - E[\text{Interf}_x]^2 \quad (33)$$

$$\text{var}[\text{Interf}_x] = \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i \cdot \cos(\phi_i) \right)^2 \cdot d\phi_i - \left\{ \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i \cdot \cos(\phi_i) \cdot d\phi_i \right\}^2 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\text{Interf}_x] = E[\text{Interf}_x^2] &= \frac{1}{2\pi} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \left\{ \alpha_i^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)^2 \cdot d\phi_i + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i \\ h \neq x}}^K \alpha_h \cdot \cos(\phi_h) \cdot \int_0^{2\pi} \alpha_i \cdot \cos(\phi_i) \cdot d\phi_i \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) \cdot d\phi_i \right\}^2 \end{aligned}$$

Como os dois últimos termos são nulos devido à integração ser no período $[0, 2\pi]$:

$$\text{var}[\text{Interf}_x] = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)^2 \cdot d\phi_i = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \alpha_i^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \cos(2\phi_i) \right) \cdot d\phi_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \frac{\alpha_i^2}{2}$$

Calculando a esperança de $\text{var}[\text{Interf}_x]$ em relação a $b_0^{(i)}$ e $b_{-1}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} E\{\text{var}[\text{Interf}_x]\} &= \frac{A^2}{32} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 + \frac{A^2}{32} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 + \\ &\quad \frac{A^2}{32} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [-R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 + \frac{A^2}{32} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [-R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 \\ E\{\text{var}[\text{Interf}_x]\} &= \frac{A^2}{16} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 + \frac{A^2}{16} \times \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \right\}^2 \quad (35) \end{aligned}$$

$$E\{\text{var}[\text{Interf}_x]\} = \frac{A^2}{8} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K [R_{i,x}(\tau_i)^2 + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)^2] \quad (36)$$

Calculando a esperança agora em relação a τ_i , supondo que o mesmo é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, T]$:

$$E\{E\{\text{var}[\text{Interf}_x]\}\} = \frac{A^2}{8 \cdot T} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \sum_{m=0}^{N-1} \int_{m \cdot T_c}^{(m+1) \cdot T_c} (R_{i,x}(\tau_i)^2 + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)^2) \cdot d\tau_i \quad (37)$$

A partir das funções de correlação cruzada parcial contínua no tempo, ref. [2,6], para as formas de onda do sinal de código e das relações existentes entre sequências de código genéricas, ref. [2,5,7], obtemos:

$$\sum_{i=1}^K \sum_{m=0}^{N-1} \int_{m \cdot T_c}^{(m+1) \cdot T_c} (R_{i,x}(\tau_i)^2 + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)^2) \cdot d\tau_i = \frac{T^3}{3 \cdot N^3} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \beta_{i,x} \quad (38)$$

e então:

$$E\{E\{\text{var}[\text{Interf}_x]\}\} = \frac{A^2 \cdot T^2}{24 \cdot N^3} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \beta_{i,x} \quad (39)$$

com:

$$\beta_{i,x} = 2 \cdot N^2 + 4 \cdot \sum_{l=1}^{N-1} C_l(1) \cdot C_x(1) + \sum_{l=1-N}^{N-1} C_l(1) \cdot C_x(1+l) \quad (40)$$

e onde $C_{a,b}(1)$ é chamada de função de correlação cruzada aperiódica das sequências e definida por:

$$C_{a,b}(l) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1-l} a_i \cdot b_{i+1} & 0 \leq l \leq N-1 \\ \sum_{i=0}^{N-1+l} a_{i-1} \cdot b_i & 1-N \leq l < 0 \\ 0 & |l| \geq N \end{cases} \quad (41)$$

A partir das relações (31) e (38) obtém-se:

$$\text{var}[Z_x] = \frac{N_0 \cdot T}{4} + \frac{A^2 \cdot T^2}{24 \cdot N^3} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \beta_{i,x} \quad (42)$$

Considerando agora a relação sinal para ruído SNR_x na saída do receptor, ref. [2], tem-se:

$$\text{SNR}_x = \frac{\frac{A \cdot T}{2}}{\sqrt{\text{var}[Z_x]}} = \frac{\sqrt{\frac{A^2 \cdot T^2}{4}}}{\sqrt{\text{var}[Z_x]}} = \left\{ \frac{1}{6 \cdot N^3} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \beta_{i,x} + \frac{N_0}{A^2 \cdot T} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Para um número grande de sinais interferentes ou seqüências de comprimento relativamente grande utilizadas pelo usuários para espalhar os sinais, a distribuição da interferência na saída do receptor tende para uma gaussiana, permitindo-nos calcular a probabilidade de erro de bit final da informação:

$$P_e = Q[\text{SNR}_x] = Q\left[\left\{ \frac{1}{6 \cdot N^3} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^K \beta_{i,x} + \frac{N_0}{A^2 \cdot T} \right\}^{-\frac{1}{2}}\right]$$

A expressão anterior pode ser simplificada se considerarmos seqüências randômicas de comprimento N , pois, neste caso demonstra-se que $E[\beta_{i,x}] = 2 \cdot N^2$, resultando:

$$P_e = Q\left[\left\{ \frac{(K-1)}{3 \cdot N} + \frac{N_0}{A^2 \cdot T} \right\}^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (\text{observe-se que para } K=1 \text{ recaímos no caso BPSK conhecido}).$$

A relação sinal para ruído SNR_x é um parâmetro de performance muito importante (pelo significado físico) e utilizado na prática (pela quantidade relativamente pequena de computação necessária para sua obtenção quando comparado com outros métodos). Esta relação sinal para ruído é obtida a partir do cálculo da esperança na saída do receptor com respeito aos deslocamentos de fase, atrasos de sinais e a informação transmitida. Tais médias podem também ser interpretadas como médias no tempo, já que na prática estas variáveis variam muito lentamente no tempo podendo serem modeladas como processos estacionários aleatórios ergódicos, ref. [5].

5 - ABORDAGEM SEGUNDO WEBER, [11]

A abordagem introduzida por Weber é a de que $I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi)$ pode ser modelada como uma variável aleatória gaussiana. A partir da conclusão provada na abordagem de Nazari e Ziemer [20], que calcula a função densidade de probabilidade na saída do correlator, é perfeitamente aceitável a abordagem de Weber para um número significativamente grande de usuários ou seqüências de código de comprimento longo. A qualidade desta aproximação foi demonstrada como excelente por Yao [8] para períodos de código maior que 7, para a maioria das seqüências PN e de Gold.

Portanto $\gamma_i(\underline{b}, \underline{\tau}, \underline{\phi})$ pode ser modelado, pelo Teorema do Valor Central, como uma variável aleatória gaussiana pois é formado de uma soma várias variáveis aleatórias independentes. O efeito de um usuário interferente pode então ser modelado como um ruído "broad-band" aditivo. Assumindo que os outros sinais interferentes são mutuamente não coerentes, suas densidades de potência espectral se adicionam.

Se a relação $\eta = \frac{T_b}{T_c}$ = ganho de processamento (período do sinal da informação para período do chip do sinal de código), que indica o espalhamento ocorrido na banda ocupada pelo sinal da informação, é relativamente grande os valores de maior significado se encontram na vizinhança da frequência do sinal da portadora do modulador.

A densidade de potência espectral equivalente, próximo à frequência do sinal da portadora do modulador, na saída do receptor devido ao i -ésimo usuário é:

$$N_i = \frac{P_i}{R_c} = P_i \cdot T_c = \alpha_i \cdot P_o \cdot T_c \quad (44)$$

A relação sinal para ruído na saída do receptor devida aos $K-1$ usuários adicionais é portanto:

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K = \frac{E_b}{N_o + \sum_{i=1}^{K-1} N_i} \quad (45)$$

Da equação acima nota-se que existe uma redução na relação sinal para ruído à medida que aumenta-se o número de usuários. Com a hipótese gaussiana pode-se escrever:

$$P_e = Q\left[\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K\right] \quad (46)$$

Para manter a mesma probabilidade de erro quando $K-1$ usuários adicionais estão presentes igual à probabilidade de erro quando um único usuário está presente, é necessário que a relação sinal para ruído de um usuário $\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R$ satisfaça a seguinte relação:

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1 = \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K = \left[\frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R}{1 + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{N_i}{N_o}}\right] = \left[\frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R}{1 + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\alpha_i \cdot P_o \cdot T_c}{N_o}}\right] = \left[\frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R}{1 + \frac{T_c}{T_b} \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R \times \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i}\right] \quad (47)$$

Portanto, a partir da equação acima:

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1 + \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1 \times \eta^{-1} \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R \times \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i - \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R = 0$$

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R = \frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1}{1 - \eta^{-1} \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1 \times \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i} \quad (48)$$

Definindo agora o fator de degradação DF como sendo o fator multiplicativo necessário para $\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1$ se tornar igual a

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R :$$

$$DF = \frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R}{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1} = \frac{1}{1 - \eta^{-1} \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1 \times \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i} \quad (49)$$

Vamos aplicar as equações obtidas para comentar um resultado interessante que ocorre no caso de todos os usuários transmitirem com a mesma potência.

Com todas as potências iguais $\alpha_i = 1$ e $DF = \frac{1}{1 - \eta^{-1} \times (K-1) \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1}$.

Nota-se que $\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R$ tende a $\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_1$ quando K tende a 1.

Reescrevendo a equação (47) para o caso em estudo:

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K = \left[\frac{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R}{1 + \eta^{-1} \times (K-1) \times \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R} \right] \quad (50)$$

Nota-se na equação acima que $\lim_{\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_R \rightarrow \infty} \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K = \frac{\eta}{K-1}$ que é um limite teórico, pelo modelamento utilizado por Weber, para o máximo valor que $\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_K$ pode atingir, para potências crescendo sem limite.

6 - ABORDAGEM SEGUNDO NAZARI E ZIEMER, [20]

A abordagem seguida por Nazari e Ziemer é a da obtenção da função densidade de probabilidade na saída do correlator. A equação (15) pode ser reescrita:

1) Se $b_0^{(x)} = b_{-1}^{(x)}$:

$$I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot b_0^{(x)} \cdot [R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i)$$

Conforme definição (27) tem-se:

$$\mathfrak{R}_{i,x}(\tau) = R_{i,x}(\tau_i) + \hat{R}_{i,x}(\tau_i),$$

e portanto resulta:

$$I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot b_0^{(x)} \cdot \mathfrak{R}_{i,x}(\tau) \cdot \cos(\phi_i) = T^{-1} \cdot B_{i,x}(\tau, \phi)$$

Prova-se em Pursley [6], que para formas de onda retangular do código de espalhamento:

$$\mathfrak{R}_{i,x}(\tau) = (T_c - \tau + l_i \cdot T_c) \cdot \theta_{i,x}(l_i) + (\tau - l_i \cdot T_c) \cdot \theta_{i,x}(l_i + 1)$$

com: $\theta_{i,x}(l) = C_{i,x}(l) + C_{i,x}(l - N)$

e onde l_i é a parte inteira de $\frac{\tau_i}{T_c}$.

Reagrupando:

$$B_{i,x}(\tau_i) = b_0^{(x)} \cdot \{ \theta_{i,x}(l_i) \cdot T_c + [\theta_{i,x}(l_i + 1) - \theta_{i,x}(l_i)] \cdot (\tau_i - l_i \cdot T_c) \} \cdot \cos(\phi_i) \quad (51)$$

2) Se $b_0^{(x)} \neq b_{-1}^{(x)}$:

$$I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot b_0^{(x)} \cdot [R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i)] \cdot \cos(\phi_i)$$

Conforme definição (28):

$$\hat{\mathfrak{R}}_{i,x}(\tau) = R_{i,x}(\tau_i) - \hat{R}_{i,x}(\tau_i)$$

e portanto resulta:

$$I_{i,x}(\underline{b}_i, \tau, \phi) = T^{-1} \cdot b_0^{(x)} \cdot \hat{\mathfrak{R}}_{i,x}(\tau) \cdot \cos(\phi_i) = T^{-1} \cdot B_{i,x}(\tau, \phi)$$

Novamente Pursley [6], prova que para formas de onda retangular do código de espalhamento:

$$\hat{\mathfrak{R}}_{i,x}(\tau) = (T_c - \tau + l_i \cdot T_c) \cdot \hat{\theta}_{i,x}(l_i) + (\tau - l_i \cdot T_c) \cdot \hat{\theta}_{i,x}(l_i + 1)$$

com:

$$B_{i,x}(\tau_i) = b_0^{(x)} \cdot \{ \hat{\theta}_{i,x}(l_i) \cdot T_c + [\hat{\theta}_{i,x}(l_i + 1) - \hat{\theta}_{i,x}(l_i)] \cdot (\tau_i - l_i \cdot T_c) \} \cdot \cos(\phi_i) \quad (52)$$

A função densidade de probabilidade será calculada supondo que $b_0^{(x)} = b_{-1}^{(x)}$. Definindo como interferência de múltiplo acesso normalizada $m_{i,x}$:

$$m_{i,x} = \frac{B_{i,x}(\tau_i)}{b_0^{(x)} \cdot T_c} = \{\theta_{i,x}(l_i) + [\theta_{i,x}(l_i + 1) - \theta_{i,x}(l_i)] \cdot u\} \cdot \cos(\phi_i) \quad (53)$$

onde:

$u = \frac{\tau_i - l_i \cdot T_c}{T_c}$ e adotando que τ_i e ϕ_i estão uniformemente distribuídos no intervalo $[0, T]$ e $[0, 2 \cdot \pi]$, respectivamente,

conclui-se que a variável aleatória u encontra-se uniformemente distribuída no intervalo $[0, 1]$. Vamos calcular agora a função densidade de probabilidade para os diferentes casos de $\theta_{i,x}(l_i)$ e $\theta_{i,x}(l_i + 1)$.

1º Caso) $\theta_{i,x}(l_i) = \theta_{i,x}(l_i + 1)$

Calculando $m_{i,x}$:

$$m_{i,x} = \theta_{i,x}(l_i) \cdot \cos(\phi_i) \quad (54)$$

Na referência [26] prova-se que a função densidade de probabilidade de $m_{i,x}$ é:

$$f_{m_{i,x}}(d) = \frac{1}{\pi \cdot |\theta_{i,x}(l_i)| \cdot [1 - (\frac{d}{\theta_{i,x}(l_i)})^2]^{0.5}}, \quad |d| < |\theta_{i,x}(l_i)| \quad (55)$$

$$f_{m_{i,x}}(d) = 0, \quad \text{nas outras regiões} \quad (56)$$

2º Caso) $\theta_{i,x}(l_i) \neq \theta_{i,x}(l_i + 1)$

Definindo $m_{i,x}$:

$$m_{i,x} = Y \cdot \cos(\phi_i) \quad (57)$$

onde:

$$Y = \theta_{i,x}(l_i) + [\theta_{i,x}(l_i + 1) - \theta_{i,x}(l_i)] \cdot u \quad (58)$$

Verifica-se que a variável aleatória Y encontra-se uniformemente distribuída no intervalo $[A, B]$ onde A e B são iguais a:

$$A = \min[\theta_{i,x}(l_i), \theta_{i,x}(l_i + 1)]$$

$$B = \max[\theta_{i,x}(l_i), \theta_{i,x}(l_i + 1)]$$

Como a variável aleatória Y está sendo multiplicada por $\cos(\theta_i)$ pode-se mudar simultaneamente os sinais de A e B sem mudar a função densidade de probabilidade de $m_{i,x}$; com esta propriedade é possível fazer com que $B > 0$ e $|B| > |A|$. Utilizando o resultado obtido em [19]:

$$f_{m_{i,x}}(d) = \frac{1}{\pi \cdot (B - A)} \times \ln \left| \frac{B + (B^2 - d^2)^{0.5}}{A + (A^2 - d^2)^{0.5}} \right|, \quad |d| < |A| \quad (59)$$

$$f_{m_{i,x}}(d) = \frac{1}{\pi \cdot (B - A)} \times \ln \left| \frac{B + (B^2 - d^2)^{0.5}}{d} \right|, \quad |A| < |d| < B \quad (60)$$

$$f_{m_{i,x}}(d) = 0 \quad \text{nas outras regiões} \quad (61)$$

Portanto a função densidade de probabilidade resultante $p_{l_{i,x}}(d)$, correspondente ao caso $b_0^{(x)} = b_{-1}^{(x)}$, é igual a:

$$p_{l_{i,x}}(d) = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N f_{m_{i,x}/l_i}(d/l_i) \quad (62)$$

Basta agora calcular $p_{2,i,x}(d)$ para o caso em que $b_0^{(x)} \neq b_{-1}^{(x)}$. Para isto basta substituir $\theta_{i,x}(\dots)$ por $\hat{\theta}_{i,x}(\dots)$ em todas as equações acima deduzidas e considerar que a probabilidade de $b_0^{(x)} = b_{-1}^{(x)}$ e $b_0^{(x)} \neq b_{-1}^{(x)}$ é $\frac{1}{2}$ para os dois eventos. Portanto, a função densidade de probabilidade $p_{i,x}(d)$ procurada normalizada é:

$$p_{i,x}(d) = \frac{1}{2} \times p_{1,i,x}(d) + \frac{1}{2} \times p_{2,i,x}(d) \quad (63)$$

Desnormalizando:

$$p_{B_{i,x}}(d) = b_0^{(x)} \cdot T_c \cdot p_{i,x}(d / |b_0^{(x)} \cdot T_c|) \quad (64)$$

7 - APÊNDICE

Neste apêndice será calculada a média e a variância na saída de um receptor tendo como entrada um ruído branco aditivo, gaussiano de média 0 e variância $\frac{N_0}{2}$. Utilizando (8):

$$\text{var}\{\eta_x\} = \text{var}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} c_x^{(j)} \cdot \int_{jT_c}^{(j+1)T_c} n(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt\right\}$$

$$\text{com: } c_x(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_x^{(j)} \cdot \Pi(t - j \cdot T_c)$$

Sabendo que:

$$\text{var}\{\eta_x\} = E\{\eta_x^2\} - E\{\eta_x\}^2 :$$

$$E\{\eta_x\} = \sum_{j=0}^{N-1} c_x^{(j)} \cdot \int_{jT_c}^{(j+1)T_c} E\{n(t)\} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt$$

Como $E\{n(t)\} = 0$ conclui-se que $E\{\eta_x\} = 0$.

A variância de η_x é igual a:

$$\text{var}\{\eta_x\} = \text{var}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} c_x^{(j)} \cdot \int_{jT_c}^{(j+1)T_c} n(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt\right\}$$

A partir da seguinte propriedade (facilmente demonstrável):

$$E\left[\int_{jT_c}^{(j+1)T_c} n(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot dt \cdot \int_{jT_c}^{(j+1)T_c} n(u) \cdot \cos(\omega_0 \cdot u) \cdot du\right] = \frac{N_0 \cdot T_c}{4}$$

conclue-se que a variância de η_x é igual a uma somatória das variâncias individuais e portanto: $\text{var}\{\eta_x\} = \frac{N_0 \cdot T}{4}$

8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Paul Jean E. Jeszensky, "Notas de Aula do Curso de Comunicação por Espalhamento Espectral", Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade de São Paulo, 1991.

[2] Paul Jean E. Jeszensky, "Notas de Aula do Curso de Comunicação por Espalhamento Espectral: Uma motivação para o estudo de seqüências de códigos", Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade de São Paulo, 1992.

[3] V. H. MacDonald, "Advanced Mobile Phone Service - The Cellular Concept", Bell System Technical Journal, January 1979, pp 15-41.

[4] William C. Y. Lee, "Overview of Cellular CDMA", IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 40, Nº 2, May 1991, 291-302.

- [5] Michael B. Pursley, "Performance Evaluation for Phase-Coded Spread Spectrum Multiple-Access Communication - Part I: System Analysis", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-25, N^o 8, August 1977, pp. 795-799.
- [6] Michael B. Pursley, "Spread-Spectrum Multiple-Access Communications", *New Concepts in Multi-User Communication*, Nato Advanced Study Institutes Series, 1981, pp. 139-199.
- [7] Michael B. Pursley and D. V. Sarwate, "Performance Evaluation for Phase-Coded Spread Spectrum Multiple-Access Communication - Part II: Code Sequence Analysis", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-25, N^o 8, August 1977, pp. 800-803.
- [8] Kung Yao, "Error Probability of Asynchronous Spread Spectrum Multiple Access Communication Systems", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-25, N^o 8, August 1977, pp. 803-809.
- [9] M. Dresher, S. Karlin, L. S. Shapley, "Polynomial Games", *Contributions to the Theory of Games*, *Annals of Mathematics Studies*, N^o 24, 1950, pp. 161-180.
- [10] M. Dresher, "Moment Spaces and Inequalities", *Duke Math. J.*, Vol. 20, June 1953, pp. 261-271.
- [11] Charles L. Weber, Gaylord K. Huth and Bartus H. Batson, "Performance Considerations of Code Division Multiple-Access Systems", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. VT-30, N^o 1, February 1981, pp. 3-10.
- [12] Kung Yao and Robert M. Tobin, "Moment Space Upper and Lower Error Bounds for Digital Systems with Intersymbol Interference", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-22, N^o 1, January 1976.
- [13] James W. Matthews, "Sharp Error Bounds for Intersymbol Interference", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-19, N^o 4, July 1973.
- [14] Dilip V. Sarwate and Michael B. Pursley, "Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 68, No 5, May 1980, pp. 593-619.
- [15] Michael B. Pursley and H. F. A. Roefs, "Numerical Evaluation of Correlation Parameters for Optimal Phases of Binary Shift-Register Sequences", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-27, N^o 10, October 1979, pp. 1597-1604.
- [16] Jerrold A. Heller and Irwin Mark Jacobs, "Viterbi Decoding for Satellite and Space Communications", *IEEE Transactions on Communications Technology*, Vol. COM-19, N^o 5, October 1971, pp. 835-848.
- [17] Klein S. Gilhousen, Irwin M. Jacobs, Roberto Padovani, Andrew J. Viterbi, Lindsay A. Weaver Jr. and Charles E. Wheatley III, "On the Capacity of a Cellular CDMA System", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 40, N^o 2, May 1991, pp. 303-312.
- [18] Raymond L. Pickholtz, Laurence B. Milstein and Donald L. Schilling, "Spread Spectrum for Mobile Communications", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 40, N^o 2, May 1991, pp. 313-322.
- [19] James S. Lehnert and Michael B. Pursley, "Error Probabilities for Binary Direct-Sequence Spread-Spectrum Communications with Random Sequence Signatures", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-35, No 1, January 1987, pp. 87-98.
- [20] Nersi Nazari and Rodger E. Ziemer, "Computationally Efficient Bounds for the Performance of Direct-Sequence Spread Spectrum Multiple-Access Communications Systems in Jamming Environments", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 36, N^o 5, May 1988, pp. 577-587.
- [21] Michael B. Pursley, D. V. Sarwate and W. E. Stark, "Error Probability for Direct-Sequence Spread Spectrum Multiple Access Communications: Part I: Upper and Lower Bounds", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-30, N^o 5, May 1982, pp. 975-984.
- [22] E. A. Geraniotis and M. B. Pursley, "Error Probability for Direct-Sequence Spread Spectrum Multiple Access Communications: Part II: Approximations", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-30, N^o 5, May 1982, pp. 985-995.

- [23] Jack M. Holtzman, "A Simple, Accurate Method to Calculate Spread Spectrum Multiple-Access Error Probabilities", IEEE Transactions on Communications", Vol. COM-40, N^o 3, March 1992, pp. 461-464.
- [24] Ricardo De Gaudenzi, Carlos Elia and Roberto Viola, "Bandlimited Quasi-Synchronous CDMA: A Novel Satellite Access Technique for Mobile and Personal Communication Systems", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 10, N^o 2, February 1992, pp. 328-343.
- [25] Robert A. Scholtz, "The Spread Spectrum Concept", IEEE Transactions on Communications, Vol. COM-25, No 8 , August 1977, pp. 748-755.
- [26] Athanasios Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", Second Edition , pp. 120.