EPUSP-ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PEE-DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA

LCS-LABORATÓRIO DE COMUNICAÇÕES E SINAIS

PEE-5710-COMUNICAÇÃO POR ESPALHAMENTO ESPECTRAL

UMA MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE SEQÜÊNCIAS DE CÓDIGOS

Dr. PAUL JEAN ETIENNE JESZENSKY

PROFESSOR ASSOCIADO

fev/1992

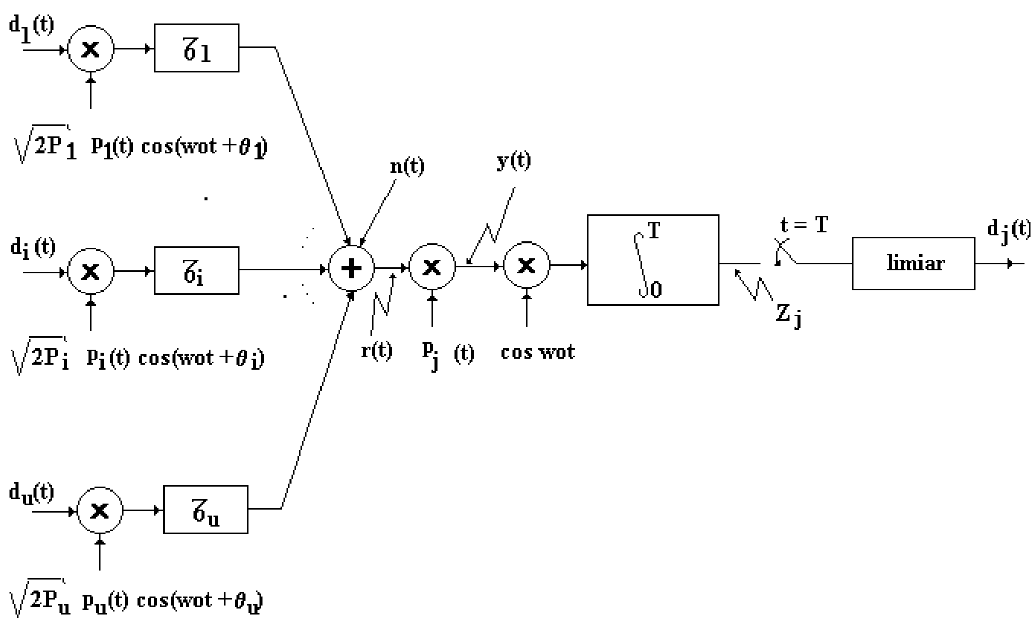
Calcula-se a seguir a probabilidade de erro de bit (P_e) em um sistema multiplexado por código (CDMA-"Code Division Multiple Access") e com espalhamento espectral do tipo de seqüência direta (DS-SS). A modelagem e abordagem inicial são devidas a um trabalho pioneiro de Pursley e Sarwate, ref. [15] e [16]. O resultado, determinação da probabilidade de erro de bit em função das seqüências usadas para o espalhamento espectral, servem como uma motivação para o estudo de seqüências de códigos e suas propriedades. Seja então um sinal DS escrito na forma:

$s_i(t) = \sqrt{2P_i}\, d_i(t) p_i(t) \cos(\omega_0 t + \theta_i)$; onde

$p_i(t) = \pm 1$ no intervalo $kT_C \leq t < (k+1)T_C$ com k = 0; 1; 2; ...e

$d_i(t) = \pm 1$ no intervalo $jT \leq t < (j+1)T$ com j = 0; 1; 2; ...

A relação $N=T/T_C$, assumida inteira, denomina-se ganho de processamento e representa o número de chips durante o intervalo de tempo de um bit de dado. Seja ainda LT_C o período da seqüência pseudo-aleatória $p_i(t)$. Em princípio N e L não precisam estar relacionados entre si, e este caso genérico não é bem estudado na literatura aberta. Mais usualmente N=L, e é este o caso que será detalhado a seguir (na ref. [22] tem-se alguns resultados para os casos em que: N e L são primos entre si, N é divisor de L e L é divisor de N). Seja um sistema DS-SS-CDMA assíncrono, modelado conforme representado abaixo, para a demodulação do canal j e com U usuários.



Como os transmissores são assíncronos considera-se, sem perda de generalidade, $\tau_j = \theta_j = 0$, e referenciam-se todos os demais atrasos e defasagens ao canal j. Assim, consideram-se estes atrasos τ_i e defasagens θ_i restritos à $0 \leq \tau_i < T$ e $0 \leq \theta_i < 2\pi$, com i tal que $1 \leq i \leq U$ e $i \neq j$ e com uma distribuição uniforme para os mesmos. Observe-se que a detecção é baseada em circuitos de correlação, que sabe-se ser ótima para o caso de ruídos tipo AWGN. Apesar de não ser o caso presente, ainda assim o circuito é largamente usado na prática, possivelmente, dada a sua simplicidade de implementação e facilidade de análise. Nestas condições o sinal à entrada do receptor é dado por:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{U} \sqrt{2P_i}\, d_i(t-\tau_i) p_i(t-\tau_i) \cos(\omega_0 t + \phi_i) + n(t)$$

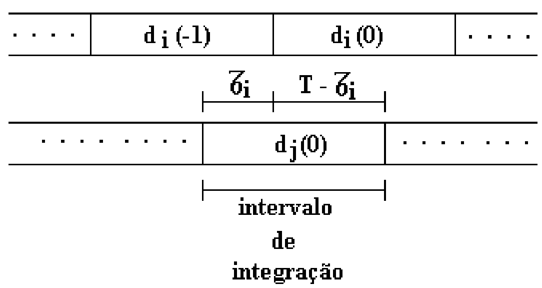
onde $\phi_i = \theta_i - \omega_0 \tau_i$ e n(t) representa todos os demais ruídos e interferências presentes à entrada (não provenientes dos demais usuários). Como o receptor está preparado para a demodulação do canal j, ter-se-á:

$$y(t) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \sqrt{2P_i}\, d_i(t-\tau_i)\, p_i(t-\tau_i)\, p_j(t) \cos(\omega_0 t + \phi_i) + n(t)\, p_j(t) + \sqrt{2P_j}\, d_j(t) \cos\omega_0 t;$$

e na saída do integrador, com $\omega_0 t >> 1$, tem-se:

$$Z_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \sqrt{\frac{P_i}{2}} \int_0^T p_i(t-\tau_i)\, p_j(t)\, d_i(t-\tau_i) \cos\phi_i \, dt + \int_0^T n(t)\, p_j(t) \cos\omega_0 t\, dt + \sqrt{\frac{P_j}{2}}\, T\, d_j(0)$$

Observando o intervalo de integração:



pode-se escrever:

$$Z_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \sqrt{\frac{P_i}{2}} \left\{ d_i(-1) \int_0^{\tau_i} p_i(t-\tau_i)\, p_j(t) \cos\phi_i \, dt + d_i(0) \int_{\tau_i}^{T} p_i(t-\tau_i)\, p_j(t) \cos\phi_i \, dt \right\} +$$
$$+ \int_0^T n(t)\, p_j(t) \cos\omega_0 t\, dt + \sqrt{\frac{P_j}{2}}\, T\, d_j(0)$$

Denominando-se:

$$R_{i,j}(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} p_i(t-\tau_i) p_j(t)\, dt \quad \text{e} \quad \hat{R}_{i,j}(\tau_i) = \int_{\tau_i}^{T} p_i(t-\tau_i)\, p_j(t)\, dt$$

tem-se, para $0 \le \tau_i < T$ e com $d_j(0) = 1$

$$Z_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \sqrt{\frac{P_i}{2}}\,\{d_i(-1)\,R_{i,j}(\tau) + d_i(0)\,\hat{R}_{i,j}(\tau_i)\}\cos\phi_i +$$

$$+\int_0^T n(t)\,p_j(t)\cos\omega_0 t\,dt + \sqrt{\frac{P_j T^2}{2}} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i + N_j + S_j\ ;$$

onde então:

- o primeiro termo representa a influência dos demais usuários sobre o sinal desejado j;

- o segundo termo representa o ruído, e ou interferência , espalhado pela seqüência local $p_j(t)$ e

- o terceiro termo representa a informação desejada.

Observe-se então que se for possível selecionar seqüências tais que resultem em valores de $R_{i,j}(\tau_i)$ e $\hat{R}_{i,j}(\tau_i)$ tais que o primeiro termo da somatória seja pequeno face à S_j, pode-se estabelecer um sistema multiplexado por código (CDMA). Para caracterizar esta possibilidade deve-se calcular a variância de Z_j para ϕ_i e τ_i distribuindo-se uniformemente, e de forma independente, nos intervalos $[0,2\pi[$ e $[0,T[$, respectivamente, e ainda com probabilidades idênticas para as possibilidades ± 1 dos dados $d_i(-1)$ e $d_i(0)$. No caso:

$$V_{ar}\left[Z_j\right] = V_{ar}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right] + V_{ar}\left[N_j\right]$$

Calculando $V_{ar}\left[N_j\right]$ obtém-se:

$$V_{ar}\left[N_j\right] = V_{ar}\left[\int_0^T n(t)\,p_j(t)\cos\omega_0 t\,dt\right] = V_{ar}\left[\sum_{k=0}^{L-1} p_j(k) \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} n(t)\cos\omega_0 t\,dt\right]$$

com $p_j(k)$ representando um chip ($\pm$ 1) da seqüência de comprimento L e com duração T_c. Agora, considerando n(t) como um ruído branco aditivo e com distribuição de amplitudes gaussiana (AWGN), tem-se:

$$E\left\{\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} n(t)\cos\omega_0 t\,dt\right\} = \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} E[n(t)]\cos\omega_0 t\,dt \ \text{ e}$$

$$E\left\{\int_{k_1T_c}^{(k_1+1)T_c} n(t)\cos\omega_0 t\,dt \int_{k_2T_c}^{(k_2+1)T_c} n(u)\cos\omega_0 u\,du\right\} = E\left\{\iint n(t)n(u)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 u\,dt\,du\right\}$$

$$= \iint E\left[n(t)\,n(u)\right]\cos\omega_0 t\cos\omega_u\,dt\,du = \frac{N_0}{2}\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \cos^2\omega_0 t\,dt = \frac{N_0 T_c}{4};\ \text{pois}$$

$$E\left[\,n(t)\,n(u)\,\right] = \frac{N_0}{2}\delta(t-u)$$

Segue-se então que:

$$\sum_{k=0}^{L-1} p_j(k) \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} n(t)\cos\omega_0 t\,dt = N\left(0, \frac{N_0 T}{4}\right); \text{ pois:}$$

- as integrais individuais correspondem a variáveis aleatórias independentes gaussianas, pois n(t) é gaussiano;

- a média é nula pois as variáveis aleatórias gaussianas são de média nula e

$\sum \sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{NoT_c}{4} = \frac{LT_c N_o}{4} = \frac{NoT}{4}$, com a hipótese do comprimento da seqüência ser tal que $L = \frac{T}{T_c}$. Calculada a variância de N_j deve-se agora avaliar: $\mathrm{Var}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right]$, para as distribuições de ϕ_i, d_i e τ_i (passos 1, 2 e 3 a seguir, respectivamente).

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right]_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right\}^2 d\phi_i - \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\left\{\alpha_i^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi_i\, d\phi_i + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{U} \alpha_k \cos\phi_k \int_0^{2\pi} \alpha_i \cos\phi_i\, d\phi_i\right\} - \frac{1}{4\pi^2}\left\{\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{U} \alpha_i \int_0^{2\pi} \cos\phi_i\, d\phi_i\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i^2 \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi_i\right)d\phi_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \frac{\alpha_i^2}{2}$$

Considerando-se em seguida os valores possíveis para o par $\{d_i(-1), d_i(0)\}$:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right]_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} P_i\left(R_{i,j}(\tau_i) + \hat{R}_{i,j}(\tau_i)\right)^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} P_i\left(R_{i,j}(\tau_i) - \hat{R}_{i,j}(\tau_i)\right)^2\right\}$$

$= \frac{P}{4}\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\left(R_{i,j}^2(\tau_i) + \hat{R}_{i,j}^2(\tau_i)\right)\right\}$; onde adotou P_i=P; i = 1,2,.,U para evitar-se o "near-far problem", quando um sinal com amplitude grande pode impedir a recepção correta dos de amplitudes mais baixas. Finalmente tem-se a contribuição de τ_i que fornece:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U} \alpha_i \cos\phi_i\right]_3 = \frac{P}{4T}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\int_0^T \left(R_{i,j}^2(\tau_i) + \hat{R}_{i,j}^2(\tau_i)\right)d\tau_i$$

$$= \frac{P}{4T}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\sum_{m=0}^{L-1}\int_{mT_c}^{(m+1)T_c}\left(R_{i,j}^2(\tau_i) + \hat{R}_{i,j}^2(\tau_i)\right)d\tau_i$$

Neste ponto devemos relacionar $R_{i,j}(\tau_i)$ e $\hat{R}_{i,j}^2(\tau_i)$ com a função de correlação cruzada aperiódica de duas seqüências i e j. Na ref. [7] é dada uma revisão sobre geradores lineares de seqüências para uso em comunicação por espalhamento espectral. Desta referência vamos nos ater aos seus itens III e V que tratam de correlações periódicas e aperiódicas e suas propriedades (para maiores detalhes sobre geração de seqüências e suas propriedades ver também a ref. [4]).

Sejam então as seqüências:

$\{a_n\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_{p-1}, a_0, \cdots\}$ e $\{b_n\} = \{b_0, b_1, \cdots, b_k, \cdots, b_{p-1}, b_0, \cdots\}$ periódicas de período p. Define-se como correlação cruzada periódica das seqüências a_n e b_n à seqüência dada por:

$$\theta_{a,b}(\ell) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, b_{i+\ell};\ \text{ com } \ell \in Z$$

A função $\theta_{a,b}(\ell)$ é periódica de período p, pois as seqüências que o formam são. Com esta definição, e considerando-se sempre as seqüências bipolarizadas (valores possíveis ± 1), a função $\theta_{a,b}(\ell)$ fornece a diferença entre o número de coincidências ou não, das duas seqüências, em um período p. Assim para seqüências de comprimento ímpar (como as de máximo comprimento, por exemplo) $\theta_{a,b}(\ell) \neq 0, \forall \ell$. Define-se como correlação cruzada aperiódica das seqüências a_n e b_n, à função $C_{a,b}(\ell), \ell \in Z$, dada por:

$$C_{a,b}(\ell) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1-\ell} a_i\, b_{i+\ell} & 0 \le \ell \le p-1 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1+\ell} a_{i-\ell}\, b_i & 1-p \le \ell < 0 \\ 0 & |\ell| \ge p \end{cases}$$

A interpretação desta função não é tão imediata quanto a anterior e a figura a seguir procura ilustrar o conceito.

a_0	. . . . . .	a_i	. . . . . .	$a_{p-1-\ell}$	$a_{-\ell}$	. . . . .	a_{p-1}	a_0
$(p-\ell)$ termos					ℓ termos			
b_ℓ	. . . . . .	$b_{\ell+i}$	. . . . . .	b_{p-1}	b_0	. . . . .	$b_{\ell-1}$	b_0

Observe-se então que para $0 \le \ell \le p-1$, tem-se $(p-\ell)$ termos dados por:

$$C_{a,b}(\ell) = a_0\, b_\ell + a_1\, b_{\ell+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{p-1-\ell}\, b_{p-1}$$

Já para os valores da variável na faixa $1-p \le \ell < 0$ tem-se $(p-|\ell|)$ termos dados por:

$$C_{a,b}(\ell) = a_{-\ell}\, b_0 + a_{-\ell+1}\, b_1 + \ldots\ldots + a_{p-1}\, b_{p-1+\ell}$$

Das definições decorrem imediatamente as propriedades elementares abaixo listadas:

- $\theta_{a,b}(\ell) = C_{a,b}(\ell) + C_{a,b}(\ell - p)$ para $|\ell| \le p$
- $\theta_{a,b}(0) = C_{a,b}(0)$
- $C_{a,b}(-\ell) = C_{b,a}(\ell)$ e $\theta_{a,b}(-\ell) = \theta_{b,a}(\ell)$
- $\theta_{a,b}(\ell) = \theta_{a,b}(\ell + p)$

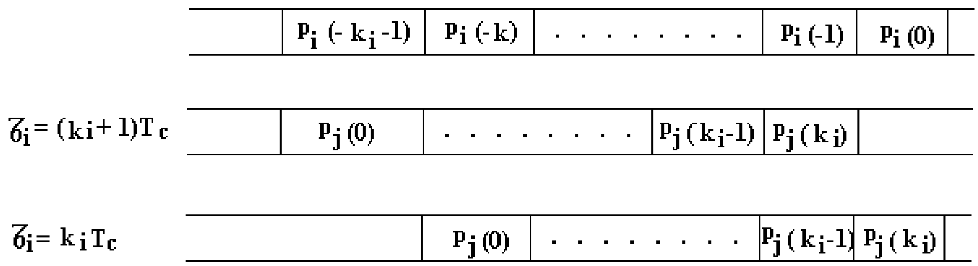
Considerando-se $\{a_n\} = \{b_n\}$, as correlações definidas denominam-se auto correlações, periódica e aperiódica, e com a notação $\theta_{a,a}(.) = \theta_a(.)$ e $C_{a,a}(.) = C_a(.)$, as propriedades anteriores particularizam-se para:

- $\theta_a(\ell) = C_a(\ell) + C_a(\ell - p)$ para $|\ell| \le p$
- $\theta_a(0) = C_a(0) = p$
- $C_a(\ell) = C_a(-\ell)$ e $\theta_a(\ell) = \theta_a(-\ell)$
- $\theta_a(\ell) = \theta_a(\ell + p)$

Apenas estas definições e propriedades são suficientes, por ora, para retornar-se ao problema original. Retomando então a expressão de $R_{i,j}(.)$, para relacioná-la $C_{i,j}(.)$, tem-se:

$R_{i,j}(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} p_i(t-\tau_i)\, p_j(t)\, dt$ para $0 \le \tau_i < T$; seja ainda $0 \le k_i\, T_c \le \tau_i \le (k_i + 1)\, T_c \le L\, T_c$.

Nos extremos deste intervalo tem-se:



Nestes extremos avaliando $R_{i,j}$ obtém-se:

$$R_{i,j}(\tau_i=k_iT_c)=\int_0^{k_iT_c} p_i(t-k_iT_c)\,p_j(t)\,dt=T_c\sum_{m=0}^{k_i-1} p_i(m-k_i)\,p_j(m);$$

denominando-se $k_i-1=L-1+\ell$ vem:

$$R_{i,j}(\tau_i=k_i\,T_c)=T_c\sum_{m=0}^{L-1+\ell} p_i(m-L-\ell)\,p_j(m)=T_c\sum_{m=0}^{L-1+\ell} p_i(m-\ell)\,p_j(m)=T_c\,C_{i,j}(\ell)=T_c\,C_{i,j}(k_i-L)$$

Para o outro extremo $\tau_i=(k_i+1)\,T_c$ e tem-se:

$$R_{i,j}\big[\tau_i=(k_i+1)\,T_c\big]=\int_0^{(k_i+1)T_c} p_i\big[t-(k_i+1)\,T_c\big]p_j(t)\,dt=T_c\sum_{m=0}^{k_i} p_i\big[m-(k_i+1)\big]p_j(m)\,;$$

denominando-se $k_i=L-1+\ell$ vem:

$$R_{i,j}\big[\tau_i=(k_i+1)\,T_c\big]=T_c\sum_{m=0}^{L-1-\ell} p_i(m-L-\ell)\,p_j(m)=T_c\sum_{m=0}^{L-1+\ell} p_i(m-\ell)\,p_j(m)\;=T_c\,C_{i,j}(l)=T_c\,C_{i,j}(k_i-L+1)$$

Como entre estes dois extremos determinados a função é linear pode-se escrever:

$$R_{i,j}\big[\tau_i\big]=T_c\,C_{i,j}(k_i-L)+\big[C_{i,j}(k_i-L+1)-C_{i,j}(k_i-L)\big](\tau_i-k_i\,T_c)$$

De forma análoga à anterior determina-se:

$$\hat{R}_{i,j}\big[\tau_i\big]=T_c\,C_{i,j}(k_i)+\big[C_{i,j}(k_i+1)-C_{i,j}(k_i)\big](\tau_i-k_i\,T_c)$$

Na expressão da variância deve-se avaliar a integral do quadrado destas funções no intervalo de um chip. Para tanto se:

$$R_{i,j}(\tau)=A+B\tau\Rightarrow\int_{\ell T_c}^{(\ell+1)T_c} R_{i,j}^2(\tau)\,d\tau=A^2\,\tau+A\,B\,\tau^2+B^2\,\frac{\tau^3}{3}\Bigg|_{\ell T_c}^{(\ell+1)T_c}$$

$$=A^2\,T_c+A\,B\,(2\ell+1)\,T_c^2+\frac{B^2}{3}(3\ell^2+3\ell+1)\,T_c^3$$

onde, fazendo-se $\ell = k_i$ nas expressões anteriores, as constantes são:

$$A = (\ell+1)T_c C_{i,j}(\ell-L) - \ell T_c C_{i,j}(\ell-L+1) \quad \text{e} \quad B = C_{i,j}(\ell-L+1) - C_{i,j}(\ell-L)$$

Deve-se fazer de forma análoga para $\hat{R}_{i,j}(\tau)$ e finalmente, efetuar a soma:

$$\sum_{m=0}^{L-1} \int_{mT_C}^{(m+1)T_C} \left(R_{i,j}^2(\tau) + \hat{R}_{i,j}^2(\tau)\right) d\tau \text{, resultando: } V_{ar}\left[Z_j\right] = \frac{P\,T^2}{12\,L^3} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{U} \beta_{i,j} + \frac{N_0\,T}{4} \text{ ; onde:}$$

$$\beta_{i,j} = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ C_{i,j}^2(\ell-L) + C_{i,j}(\ell-L)C_{i,j}(\ell-L+1) + C_{i,j}^2(\ell-L+1) + C_{i,j}^2(\ell) + C_{i,j}(\ell)C_{i,j}(\ell+1) + C_{i,j}^2(\ell+1) \right\}$$

Esta expressão determina pois a $Var[Z_j]$, conhecidas as seqüências de código atribuídas aos vários usuários do sistema. O cálculo depende da função de correlação cruzada aperiódica das seqüências e pode ser simplificada ainda. Para isso seja a função:

$$\mu_{i,j}(n) = \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_{i,j}(\ell) C_{i,j}(\ell+n)$$

e calculemos o seu valor para n=0 e n=1, buscando estabelecer uma relação com $\beta_{i,j}$

$$\mu_{i,j}(0) = \sum_{\ell=1-L}^{0} C_{i,j}^2(\ell) + \sum_{\ell=1}^{L-1} C_{i,j}^2(\ell) = \sum_{\ell=0}^{L-1} C_{i,j}^2(\ell+1-L) + \sum_{\ell=0}^{L-2} C_{i,j}^2(\ell+1) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[C_{i,j}^2(\ell+1-L) + C_{i,j}^2(\ell+1)\right]$$

pois $C_{i,j}(L) = 0$; e

$$\begin{aligned}
\mu_{i,j}(1) &= \sum_{\ell=1-L}^{0} C_{i,j}(\ell) C_{i,j}(\ell+1) + \sum_{\ell=1}^{L-1} C_{i,j}(\ell) C_{i,j}(\ell+1) \\
&= \sum_{\ell=0}^{L-1} C_{i,j}(\ell+1-L) C_{i,j}(\ell+2-L) + \sum_{\ell=0}^{L-2} C_{i,j}(\ell+1) C_{i,j}(\ell+2) \\
&= \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[C_{i,j}(\ell+1-L) C_{i,j}(\ell+2-L) + C_{i,j}(\ell+1) C_{i,j}(\ell+2)\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[C_{i,j}(\ell-L) C_{i,j}(\ell-L+1) + C_{i,j}(\ell) C_{i,j}(\ell+1)\right]
\end{aligned}$$

pois $C_{i,j}(\ell) = 0$ para $|\ell| \geq L$; destas expressões pode-se escrever, observando que:

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} \left[C_{i,j}^2(\ell-L) + C_{i,j}^2(\ell)\right] = \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[C_{i,j}^2(\ell-L+1) + C_{i,j}^2(\ell+1)\right] \text{, a relação: } \beta_{i,j} = 2\mu_{i,j}(0) + \mu_{i,j}(1).$$

Dada agora a função $\mu_{i,j}(n)=\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_{i,j}(\ell)\, C_{i,j}(\ell+n)$, expressa em termos de correlação cruzada aperiódica, demonstra-se a seguir a relação $\mu_{i,j}(n)=\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)\, C_j(\ell+n)$, com o que o cálculo de $\beta_{i,j}$ passa a depender de auto-correlações aperiódicas apenas, ao invés de cruzadas, simplificando substancialmente o problema. Inicialmente demonstraremos uma relação auxiliar similar para a função de correlação cruzada periódica. Por definição:

$\theta_{i,j}(k)=\sum_{\ell=0}^{L-1} p_i(\ell)\, p_j(\ell+k)$, e a mesma é periódica de período L. Vamos demostrar que para $\theta_{i,j}$ vale a relação:

$$\rho_{i,j}(m)=\sum_{k=0}^{L-1} \theta_{i,j}(k)\,\theta_{i,j}(m+k)=\sum_{k=0}^{L-1} \theta_i(k)\,\theta_j(m+k)$$

Para verificar esta relação, ref. [20], parte-se da definição de $\rho_{i,j}(m)$:

$$\rho_{i,j}(m)=\sum_{k=0}^{L-1}\left[\sum_{k=0}^{L-1} p_i(\ell)\, p_j(\ell+k)\right]\left[\sum_{n=0}^{L-1} p_i(n)\, p_j(n+m+k)\right]=\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{n=0}^{L-1} p_i(\ell)\, p_i(n)\,\theta_j(n+m-\ell)$$

$$=\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=-\ell}^{L-1-\ell} p_i(\ell)\, p_i(k+\ell)\,\theta_j(m+k)=\sum_{k=0}^{L-1}\theta_i(k)\,\theta_j(m+k)$$, pela periodicidade de $\theta(.)$;

com esta relação auxiliar provada, vamos estabelecer a desejada:

$$\mu_{i,j}(n)=\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_{i,j}(\ell)\, C_{i,j}(\ell+n)=\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)\, C_j(\ell+n)$$

Em primeiro lugar a relação é válida para $|n|>2L-2$, pois ambos os membros são nulos nesta condição:

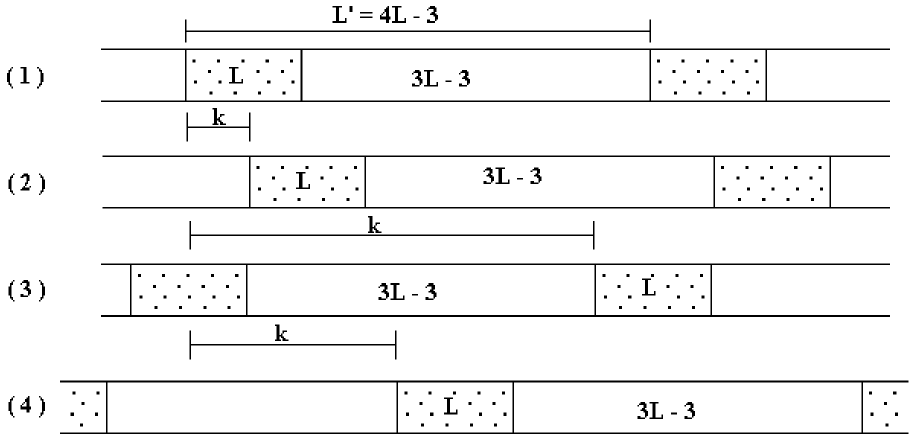
$$n>2L-2 \Rightarrow \begin{cases} \ell+n>L-1 & \text{para } \ell=1-L \\ \ell+n>3L-3 & \text{para } \ell=L-1 \end{cases}$$

$$n<2L+2 \Rightarrow \begin{cases} \ell+n<-3L+3 & \text{para } \ell=1-L \\ \ell+n<-L+1 & \text{para } \ell=L-1 \end{cases}$$

Para $|n|\le 2L-2$ definem-se duas novas seqüências u e v de período $L'=4L-3$, considerando-se os primeiros L componentes de u e v como:

$$\{p_i(0); p_i(1); ..; p_i(L-1)\} \text{ e } \{p_j(0); p_j(1); ..; p_j(L-1)\}$$

respectivamente, e completando as restantes $3L-3$ componentes de u e v com zeros. Nestas condições tem-se as possibilidades abaixo representadas.



e assim dependendo do deslocamento relativo tem-se:

- para $0 \le k \le L-1$ ((1) e (2), na figura anterior)

$$\theta_u(k) = \sum_{\ell=0}^{L'-1} p_u(\ell)\, p_u(\ell+k) = \sum_{\ell=k}^{L-1} p_u(\ell)\, p_u(\ell+k) = \sum_{\ell=0}^{L-1-k} p_i(\ell)\, p_i(\ell+k) = C_i(k)$$

- para $L \le k \le L'-L$ ((1) e (4), na figura anterior)

$$\theta_u(k) = 0$$

- para $L'-L+1 \le k \le L'-1$ ((1) e (3), na figura anterior)

$$\theta_u(k) = \sum_{\ell=0}^{L'-1} p_u(\ell)\, p_u(\ell+k) = \sum_{\ell=0}^{L-L'+k-1} p_u(\ell)\, p_u(\ell+L'-k) = \sum_{\ell=0}^{L-1+(k-L')} p_i(\ell)\, p_i\left[\ell-(k-L')\right] = C_i(k-L')$$

Para $\theta_v(.)$ e $\theta_{u,v}(.)$ obtém-se analogamente:

$$\theta_v(k) = \begin{cases} C_j(k) & 0 \le k \le L-1 \\ 0 & L \le k \le L'-L \\ C_j(k-L') & L'-L+1 \le k \le L'-1 \end{cases} \qquad \text{e}$$

$$\theta_{u,v}(k) = \begin{cases} C_{i,j}(k) & 0 \le k \le L-1 \\ 0 & L \le k \le L'-L \\ C_{i,j}(k-L') & L'-L+1 \le k \le L'-1 \end{cases}$$

Aplicando-se agora a propriedade deduzida para a função $\rho_{i,j}(m)$, para as seqüências u e v, tem-se:

$$\rho_{u,v}(m) = \sum_{k=0}^{L'-1} \theta_{u,v}(k)\,\theta_{u,v}(m+k) = \sum_{k=0}^{L-1} C_{i,j}(k)\,C_{i,j}(m+k) + \sum_{k=L'-L+1}^{L'-1} C_{i,j}(k-L')\,C_{i,j}(m+k-L')$$
$$= \sum_{k=0}^{L-1} C_{i,j}(k)\,C_{i,j}(m+k) + \sum_{k=1-L}^{-1} C_{i,j}(k)\,C_{i,j}(m+k) = \sum_{k=1-L}^{L-1} C_{i,j}(k)\,C_{i,j}(m+k)$$

Por outro lado pela propriedade deduzida, tem-se ainda:

$$\rho_{u,v}(m) = \sum_{k=0}^{L'-1} \theta_u(k)\theta_v(m+k) = \sum_{k=0}^{L-1} C_i(k)C_j(m+k) + \sum_{k=L'-L+1}^{L'-1} C_i(k-L')C_j(m+k-L')$$
$$= \sum_{k=0}^{L-1} C_i(k)C_j(m+k) + \sum_{k=1-L}^{-1} C_i(k)C_j(m+k) = \sum_{k=1-L}^{L-1} C_i(k)C_j(m+k)$$

e portanto:

$$\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_{i,j}(\ell)C_{i,j}(\ell+n) = \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)C_j(\ell+n) = \mu_{i,j}(n)$$

Retomando a expressão de $\beta_{i,j}$ e tendo em vista a relação demonstrada, segue-se que:

$$\beta_{i,j} = 2\sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)C_j(\ell) + \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)C_j(\ell+1)$$

Levando em conta agora que $C_i(\ell)=C_i(-\ell)$ e $C_i(0)=C_j(0)=L$, tem-se finalmente:

$$\beta_{i,j} = 2L^2 + 4\sum_{\ell=1}^{L-1} C_i(\ell)C_j(\ell) + \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell)C_j(\ell+1)$$

que é a expressão que permite determinar a influência tipo multiusuário num sistema CDMA. Observe-se que são necessárias para o cálculo apenas as auto-correlações aperiódicas das seqüências e não as correlações cruzadas aperiódicas, simplificando substancialmente o problema. Calculada a variância de Z_j, pode-se determinar a relação sinal/ruído:

$$\left(\frac{S}{R}\right)_j = \frac{\sqrt{P\frac{T^2}{2}}}{\sqrt{Var[Z_j]}} = \left\{\frac{1}{6L^3}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\beta_{i,j} + \frac{N_0}{2PT}\right\}^{-1/2} = \left\{\frac{1}{6L^3}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{U}\beta_{i,j} + \frac{N_0}{2E_b}\right\}^{-1/2}$$

Com um número grande de sinais interferentes a distribuição tende para a de uma gaussiana, de forma que podemos escrever:

$$P_{ej} = Q\left[\left(S/R\right)_j\right]; \text{ onde } Q(x) = \int_x^{\infty} \exp(-y^2/2)dy$$

Para esta última expressão (P_{ej}) deve-se observar no entanto que, para satisfazer as condições de aplicabilidade do Teorema do Limite Central, deveria-se ter também L aumentando com o número de usuários (o que de fato não ocorre no problema em questão, ver ref. [14] e [26]). Com o objetivo de obter expressões mais simples, para um cálculo rápido de capacidade, vamos examinar o comportamento do sistema quando se usam seqüências randômicas. Sejam $p_i(.)$ e $p_j(.)$ duas seqüências randômicas e independentemente selecionadas do conjunto de 2^L seqüências binárias possíveis de comprimento L, onde cada seqüência tem a mesma probabilidade de ser selecionada. Nestas circunstâncias verifica-se facilmente, ref. [21], que:

$$E[\mu_{i,j}(n)] = \begin{cases} L^2 & \text{para } n=0 \\ 0 & \text{c.contrário} \end{cases}$$

e portanto $\beta_{i,j} = 2L^2$; de forma que a expressão: $\left(S/R\right)_j = \left\{\frac{U-1}{3L} + \frac{N_0}{2E_b}\right\}^{-1/2}$ permite determinar um desempenho aproximado, para um lado L e U (observe-se ainda que para U=1 resulta $P_e = Q\left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right]$, como era de se esperar). Por exemplo, para um desempenho típico de $P_e = 10^{-3}$, deve-se ter $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{eq.} = 4{,}8$ e neste caso portanto $\left(S/R\right) \cong 3{,}10$. Se o valor de $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ usado no sistema for $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{eq.} = 10 \Rightarrow U \cong 0{,}162L+1$ e, por exemplo, com L=1023 pode-se multiplexar $\cong 166$ usuários. Observe-se ainda neste exemplo, que o sistema com um único usuário, isto é com $\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = 10$, tem uma $P_e \cong 4\times 10^{-6}$; a multiplexação por código de $\cong 166$ usuários degrada o seu desempenho para $P_e \cong 10^{-3}$. Para ilustrar o exemplo é interessante comparar o resultado numérico obtido, com um limite teórico que pode ser derivado do teorema de Shannon. Como se sabe a capacidade de um canal é dada por:

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right)$ bits/s. Para B crescendo indefinidamente, C aproxima-se de um limite dado por $C \Rightarrow \frac{S}{N_0 \ln 2}$ bits/s, indicando a possibilidade de transmissão à taxa C bits/s, por aumento da potência S do sinal. Na nomenclatura adotada: $f_0 \ln 2 \Rightarrow \frac{E_b f_0}{(U-1)N_i + N_0} = \frac{E_b f_0}{(U-1)E_b f_0 T_c + N_0}$ com $f_0 = \frac{1}{T}$ e N_i representando a densidade espectral de potência do ruído equivalente a um usuário. Nestas circunstâncias: $U \Rightarrow \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{N_0}{E_b}\right]L + 1 \cong 1{,}44L$ (desprezando o segundo termo)

Com os números de exemplo anterior $U \Rightarrow 1470$ usuários, indicando um desempenho pobre (11%) em relação à capacidade teórica máxima (uma codificação dos dados, evidentemente, ajuda a melhorar este desempenho). Neste ponto é interessante fazer-se uma descrição mais qualitativa da dimensão do problema. Observe-se que dadas U seqüências pode-se determinar P_{ei} para cada um dos U usuários. Para tanto precisa-se determinar uma tabela de (L-1) números (correspondentes a $C_i(\ell)$ para $\ell = 1,2,..,L-1$, visto que $C_i(0) = L$ e $C_i(\ell) = C_i(-\ell)$) para cada usuário e a partir destas tabelas o correspondente $\beta_{i,j}$ com $j = 1, 2, .., U$ e $j \neq i$. Em seguida repete-se o procedimento para todos os demais usuários. Já o problema inverso, da determinação das U seqüências de código a usar, a partir de uma família de N seqüências (códigos de Gold, ref. [2] e [3], por exemplo) é mais trabalhosa. Trata-se da repetição do problema anterior, para a determinação da P_{ei} mínima, $L^U \binom{N}{U}$ vezes. O problema é computacionalmente proibitivo, o que indica a necessidade de se criar critérios determinísticos mais simples para esta seleção. A ref. [6] descreve um método empírico para o caso de seqüências de códigos de Gold com L=511, N=513 e U=50 (neste exemplo simples o número de "alternativas" possíveis é de $\cong 10^{205}$!).

Em seguida serão estudadas algumas propriedades das funções de correlação com o objetivo de permitir determinar condições de contorno na minimização de $\beta_{i,j}$.

Seja A um conjunto formado por K seqüências periódicas de período p, e sejam θ_a e θ_c definidos por:

$$\theta_c \hat{=} \max\left\{ \left|\theta_{a,b}(\ell)\right| : 0 \le \ell \le p-1,\ a \in A,\ b \in A,\ a \ne b \right\} \text{ e}$$
$$\theta_a \hat{=} \max\left\{ \left|\theta_a(\ell)\right| : 1 \le \ell \le p-1,\ a \in A \right\}$$

Nestas circunstâncias, ver ref. [19], é valida a relação:

$\left(\frac{\theta_c^2}{p}\right) + \frac{p-1}{p(K-1)}\left(\frac{\theta_a^2}{p}\right) \ge 1$; de fato se na identidade $\sum_{j=0}^{p-1} \theta_{a,b}(j)\theta_{a,b}(\ell+j) = \sum_{j=0}^{p-1} \theta_a(j)\theta_b(\ell+j)$ já demostrada, fizermos $\ell = 0$ temos $\sum_{j=0}^{p-1} \theta_{a,b}^2(j) = \sum_{j=0}^{p-1} \theta_a(j)\theta_b(j)$. Aplicando então esta identidade para todos os elementos $a,b \in A$:

$$\sum_{\substack{a\in A \\ a\ne b}} \sum_{b\in A} \sum_{j=0}^{p-1} \theta_{a,b}^2(j) + \sum_{a\in A} \sum_{j=0}^{p-1} \theta_a^2(j) = \sum_{a\in A} \sum_{b\in A} \sum_{j=0}^{p-1} \theta_a(j)\theta_b(j)$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{a\in A} \theta_a(j) \right]^2 = K^2 p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \left[\sum_{a\in A} \theta_a(j) \right]^2$$

Nesta igualdade o primeiro membro é limitado superiormente por: $K(K-1)\,p\,\theta_c^2 + K\,p^2 + K(p-1)\,\theta_a^2$, enquanto o segundo membro é limitado inferiormente por $K^2 p^2$, e portanto: $K(K-1)\,p\,\theta_c^2 + K\,p^2 + K(p-1)\,\theta_a^2 \ge K^2\,p^2$, e desta resulta diretamente $\left(\frac{\theta_c^2}{p}\right) + \frac{(p-1)}{p(K-1)}\left(\frac{\theta_a^2}{p}\right) \ge 1$ (observe-se que esta desigualdade fornece um limite para um parâmetro, conhecido o outro).

Denominando-se agora $\theta_{max}^2 \hat{=} \max\left\{\theta_a^2, \theta_c^2\right\}$, segue-se imediatamente que $\left|\theta_{max}\right| \ge p\left(\frac{K-1}{pK-1}\right)^{1/2}$; este resultado é conhecido como limite de Welch, ref. [25], ou de Sidelnikov, ref. [10]. Para as funções de correlação aperiódicas existem resultados semelhantes, cuja demonstração é similar e portanto omitida, e que podem ser enunciadas como abaixo. Analogamente ao caso anterior sejam C_c e C_a definidas por:

$$C_c \hat{=} \max\left\{ \left|C_{a,b}(\ell)\right| : 0 \le \ell \le p-1,\ a \in A,\ b \in A,\ a \ne b \right\} \text{ e}$$
$$C_a \hat{=} \max\left\{ \left|C_a(\ell)\right| : 1 \le \ell \le p-1,\ a \in A \right\}$$

Nestas circunstâncias, ver ref. [19], é válida a relação: $\frac{2p-1}{p}\left(\frac{C_c^2}{p}\right)+\frac{2(p-1)}{p(K-1)}\left(\frac{C_a^2}{p}\right)\geq 1$

Se considerarmos agora $C_{max}^2 \hat{=} \max\{C_a^2, C_c^2\}$ tem-se $|C_{max}| \geq p\left[\frac{K-1}{2pK-K-1}\right]^{1/2}$ (este resultado é também conhecido como limite de Welch, ref. [25]). Observe-se que para valores grandes de K e p as relações simplificam-se para: $|\theta_{max}| \geq \sqrt{p}$ e $|C_{max}| \geq \sqrt{p/2}$.

Mais recentemente estabeleceram-se limites um pouco mais estreitos, que podem ser encontrados na ref. [8]. Um outro aspecto importante em relação as seqüências periódicas de período p, diz respeito às suas p fases distintas possíveis e na variação dos parâmetros de correlação em função desta fase. Para $0 \leq j < p$ a $j^{ésima}$ fase de a é denotada por $T^j a$ e é definida como a seqüência onde o $k^{ésimo}$ elemento é a_{k+j}. Algumas propriedades, imediatas a partir da definição, são listadas abaixo:

$$\theta_{a,T^k b}(\ell) = \theta_{a,b}(\ell + k$$

$$\theta_{T^i a,T^k b}(\ell) = \theta_{a,b}(\ell + k - i) \text{ e desta } \theta_{T^k a}(\ell) = \theta_a(\ell)$$

$$C_{a,Tb}(\ell) = \begin{cases} C_{a,b}(\ell+1) + a_{p-\ell-1} b_0 & 0 \leq \ell \leq p-1 \\ C_{a,b}(\ell+1) - a_{-\ell-1} b_0 & 1-p \leq \ell < 0 \end{cases}$$

$$C_{Ta}(\ell) = \begin{cases} C_a(\ell) - a_0 a_\ell + a_0 a_{p-\ell} & 0 \leq \ell \leq p-1 \\ C_a(\ell) - a_0 a_{-\ell} + a_0 a_{p+\ell} & 1-p \leq \ell < 0 \end{cases}$$

Na pesquisa para otimização de desempenho do sistema em função da fase, as duas últimas relações são importantes, pois permitem a seqüencialização do processo de cálculo. Não existem resultados analíticos prontos no processo de otimização das fases das seqüências e os resultados disponíveis são muito particulares e obtidos através de busca exaustiva, ver ref. [1], [11] e [12]. Uma outra abordagem possível é considerar-se o uso de seqüências randômicas e calcularem-se médias para os parâmetros desejados, com o objetivo de tirar-se tendências. Sejam então p_i e p_j duas seqüências binárias possíveis de comprimento L, e m e k suas fases randômica e independentemente selecionadas do conjunto $\{0,1,..,L-1\}$. Lembrando que:

$\beta_{i,j} = 2\mu_{i,j}(0) + \mu_{i,j}(1)$ com $\mu_{i,j}(n) = \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_{i,j}(\ell) C_{i,j}(\ell+n) = \sum_{\ell=1-L}^{L-1} C_i(\ell) C_j(\ell+n)$; calcula-se inicialmente $E[C_{T^m i}(\ell)]$. Seja então ℓ dado no intervalo $0 \leq \ell \leq L-1$:

$$E[C_{T^m i}(\ell)] = \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1} C_{T^m i}(\ell) = \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1-\ell} p_i(m+j) p_i(m+j+\ell)$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1-\ell}\sum_{m=0}^{L-1} p_i(m+j) p_i(m+j+\ell) = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1-\ell}\theta_i(\ell) = \left[1 - \frac{\ell}{L}\right]\theta_i(\ell)$$

Considerando agora o intervalo $1 - L \leq \ell < 0$, o cálculo é similar levando ao resultado final:

$$E\left[C_{T^m{}_i}(\ell)\right]=\left[1-\frac{|\ell|}{L}\right]\theta_i(\ell)\ \text{para}\ 0\le|\ell|\le L-1$$

Com este resultado pode-se agora avaliar:

$E\left[\mu_{T^m{}_i,T^k{}_j}(n)\right]=E\left[\sum_{\ell=1-L}^{L-1}C_{T^m{}_i}(\ell)C_{T^k{}_j}(\ell+n)\right]=\sum_{\ell=1-L}^{L-1}E\left[C_{T^m{}_i}(\ell)\right]E\left[C_{T^k{}_j}(\ell+n)\right]$ (esta última decorre da independência entre as duas seqüências). Desta forma tem-se:

$$E\left[\mu_{T^m{}_i,T^k{}_j}(n)\right]=\sum_{\ell=1-L}^{L-1}\left[1-\frac{|\ell|}{L}\right]\theta_i(\ell)\left[1-\frac{|\ell+n|}{L}\right]\theta_j(\ell+n)$$

Finalmente, desta expressão pode-se particularizar para n=0 e n=1, que são valores de interesse:

$$E\left[\mu_{T^m{}_i,T^k{}_j}(0)\right]=\sum_{\ell=1-L}^{L-1}\left[1-\frac{|\ell|}{L}\right]^2\theta_i(\ell)\theta_j(\ell)=L^2+\frac{2}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-1}\left[L-\ell\right]^2\theta_i(\ell)\theta_j(\ell)$$

$$E\left[\mu_{T^m{}_i,T^k{}_j}(1)\right]=\sum_{\ell=1-L}^{L-1}\left[1-\frac{|\ell|}{L}\right]\left[1-\frac{|\ell+1|}{L}\right]\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)=\sum_{\ell=1-L}^{-1}\left[1+\frac{\ell}{L}\right]\left[1+\frac{\ell+1}{L}\right]\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)+$$
$$(L-1)\theta_j(1)+\sum_{\ell=1}^{L-1}\left[1-\frac{\ell}{L}\right]\left[1-\frac{\ell+1}{L}\right]\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)$$

$$E\left[\mu_{T^m{}_i,T^k{}_j}(1)\right]=\frac{1}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-1}(L-\ell)\theta_i(\ell)\left[(L-\ell+1)\theta_j(\ell-1)+(L-\ell-1)\theta_j(\ell+1)\right]+(L-1)\theta_j(1)$$
$$=(L-1)\left[\theta_i(1)+\theta_j(1)\right]+\frac{1}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-2}(L-\ell)(L-\ell-1)\left[\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)+\theta_i(\ell+1)\theta_j(\ell)\right]$$

Com estes resultados, pode-se então escrever:

$$E\left[\beta_{T^m{}_i,T^k{}_j}\right]=2L^2+\frac{4}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-1}(L-\ell)^2\theta_i(\ell)\theta_j(\ell)+(L-1)\left[\theta_i(1)+\theta_j(1)\right]+$$
$$\frac{1}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-2}(L-\ell)(L-\ell-1)\left[\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)+\theta_i(\ell+1)\theta_j(\ell)\right]$$
$$=2L^2+\frac{4(L-1)^2}{L^2}\theta_i(1)\theta_j(1)+(L-1)\left[\theta_i(1)+\theta_j(1)\right]+$$
$$\frac{1}{L^2}\sum_{\ell=1}^{L-2}\left\{(L-\ell)(L-\ell-1)\quad\left[\theta_i(\ell)\theta_j(\ell+1)+\theta_i(\ell+1)\theta_j(\ell)\right]+4(L-\ell-1)^2\theta_i(\ell+1)\theta_j(\ell+1)\right\}$$

Esta expressão pode, por exemplo, ser avaliada no caso de seqüências de máximo comprimento. Para estas sabe-se que, ver ref. [7], $\theta_i(\ell)=-1$ para $\ell\neq 0\,\mathrm{mod}L$ e a expressão simplifica-se então para: $E\left[\beta_{T^m{}_i,T^k{}_j}\right]=2L^2-2+\frac{2}{L}$; o que para valores usuais de L fornece $\beta_{i,j}\cong 2L^2$. Note-se pois que, dadas duas seqüências de máximo comprimento p_i e p_j, ao calcularmos o valor de $\beta_{i,j}$ para todas as L^2 combinações de fases possíveis, o seu valor médio será o acima calculado. Isto indica que há fases para as quais $\beta_{i,j}$ é menor, porém esta determinação só é possível (hoje) por uma procura exaustiva dentre todas as possibilidades. O resultado não fornece também o quão menor poderá resultar o parâmetro desejado; de qualquer forma é um valor orientativo muito útil na avaliação do sistema. O procedimento anterior pode, evidentemente, ser estendido para outros parâmetros de interesse, ver ref. [21].

Para concluir esta motivação vamos "citar apenas" mais alguns resultados, sem nos estendermos sobre o assunto dada a limitação de espaço e dos objetivos deste resumo, a título de abrangência:

- existe uma equivalência no problema da correlação cruzada de seqüências e na distribuição de pesos em códigos cíclicos, usados na detecção de erros. Desta forma metodologias desta área, e resultados, podem ser transpostos para o problema do estudo de correlações.

- todas as definições anteriores podem ser generalizadas para seqüências complexas, onde então por exemplo:

$C_{a,b}(b)=\sum_{i=0}^{p-1-\ell} a_i b^*_{i+\ell}$ para $0\le\ell\le p-1$; etc. Denominam-se de seqüências generalizadas de Baker às seqüências $A=\{a_i\}$ de números complexos com $|a_i|=1$, periódicas de período p e tais que $|C_a(\ell)|\le 1$ para $1\le\ell\le p-1$. São conhecidas seqüências generalizadas de Baker só até p=16, atualmente.

- uma ferramenta muito útil no cálculo de correlação é a denominada função traço (tradução livre para "trace function"), que pode ser definida como uma função linear de GF(2^n) em GF(2), dado por:

$T_R(\beta)\hat{=}\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{2^i}=\beta+\beta^2+\beta^4+..+\beta^{2^{n-1}}$. A importância desta função no cálculo de correlação está no fato da seqüência $\{a_i\}$ poder ser escrita na forma $\{T_R(\alpha^i)\}$, onde α é a raiz do polinômio característico f(x) da seqüência $\{a_i\}$. No anexo, a seguir, têm-se um exemplo de aplicação baseado na ref. [24]. Apresentam-se também alguns detalhes e propriedades da função traço, que podem ser encontrados na ref. [23]. Sejam então as seqüências de máximo comprimento a_i e a_j, com j = qi, de período p=2^n-1 e $b_i=(-1)^{a_i}$. Como a_i pode ser representado por $a_i=T_R(\alpha^i)$, a correlação cruzada periódica de b_i e b_j escreve-se:

$$\theta_{i,j}(\ell)=\sum_{i=0}^{p-1} b_i b_{qi+\ell}=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{T_R(\alpha^i)}(-1)^{T_R(\alpha^{qi+\ell})}=\sum_{x\in GF(2^n)}(-1)^{T_R(x+c_\ell x^q)}-(-1)^0=\sum_{x\in GF(2^n)}(-1)^{T_R(x+c_\ell x^q)}-1$$

Assim à medida que x percorre GF(2^n), para um dado q e $c_\ell=\alpha^\ell$, pode-se determinar quão freqüentemente $T_R(x+c_\ell x^q)$ assume os valores 0 ou 1. Por exemplo, para valores de q tais que $q=2^k+1$ ou $q=2^{2k}-2^{k+1}$, se o mdc(n,k) for tal que $\frac{n}{mdc(n,k)}$ é ímpar, então a correlação cruzada periódica das seqüências assume apenas 3 valores (vide ref. [10]).

Referências Bibliográficas

[1] Garber, F. D. e M. B. Pursley, *Optimal phases of Maximal Length Sequences for Asynchronous Spread Spectrum Multiplexing*, Electronics Letters, 11th September 1980, vol. 16, nº 19, pp. 756/757.

[2] Gold, R., *Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-13, nº 5, October 1967, pp. 619/621.

[3] Gold, R., *Maximal Recursive Sequences with 3-Valued Recursive Crosscorrelation Functions*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-14, nº 1, January 1968, pp. 154/156.

[4] Golomb, S. W., *Shift Register Sequences*, Aegean Park Press, Laguna Hills-CA, 1982.

[5] Holmes, J. K., *Coherent Spread Spectrum Systems*, John Wiley & Sons, 1982.

[6] Jeszensky, P. J. E., *Calculation of the Bit Error Probability in a Direct Sequence Spread Spectrum System with Code Division Multiple Access*, International Telecommunications Symposium, Symposium Record pp. 12.3.1/12.3.5, September 1990.

[7] Jeszensky, P. J. E., *Uma Revisão sobre Geradores Lineares de Seqüências para Comunicação por Espalhamento Espectral*, 9º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Anais pp. 11.4.1/11.4.6, Setembro 1991.

[8] Kumar, P. V. e C. H. Liu, *On Lower Bounds to the Maximum Correlation of Complex Roots-of Unity Sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 36, nº 3, May 1990, pp. 633/640.

[9] No, J. S. e P. V. Kumar, *A New Family of Binary Pseudorandom Sequences Having Optimal Periodic Correlation Properties and Large Linear Span*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 35, nº 2, March 1989, pp. 371/379.

[10] Sarwate, D. V. e M. B. Pursley, *Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences*, Proceedings of the IEEE, vol. 68, nº 5, May 1980, pp. 593/619.

[11] Pursley, M. B. e H. F. A. Roefs, *Numerical Evaluation of Correlation Parameters for Optimal Phases of Binary Shift Register Sequences*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-27, nº 10, October 1979, pp. 1597/1604.

[12] Pursley, M. B. e D. V. Sarwate, *Evaluation of Correlation Parameters for Periodic Sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, July 1977, pp. 508/513.

[13] Pursley, M. B. e D. V. Sarwate, *Bounds on Aperiodic Cross-Correlation for Binary Sequences*, Electronics Letters, 10th June 1976, vol. 12, nº 12, pp. 304/305.

[14] Pursley, M. B., *The Role of Spread Spectrum in Packet Radio Networks*, Proceedings of the IEEE, vol. 75, nº 1, January 1987, pp. 116/134.

[15] Pursley, M. B., *Performance Evaluation for Phase-Coded Spread Spectrum Multiple-Access Communication-Part I: System Analysis*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-25, nº 8, August 1977, pp. 795/799.

[16] Pursley, M. B. e D. V. Sarwate, *Performance Evaluation for Phase-Coded Spread Spectrum Multiple-Access Communication-Part II: Code Sequence Analysis*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-25, nº 8, August 1977, pp. 800/803.

[17] Roefs, H. F. e M. B. Pursley, *Correlation Parameters of Random Binary Sequences, Electronics Letters,* 4th August 1977, vol. 13, nº 16, pp. 488/489.

[18] Sarwate, D. V., *An Upper Bound on the Aperiod Autocorrelation Function for a Maximal-Length Sequence*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-30, nº 4, July 1984, pp. 685/687.

[19] Sarwate, D. V., *Bounds on Crosscorrelation and Autocorrelation of Sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-25, nº 6, November 1979, pp. 720/724.

[20] Sarwate, D. V. e M. B. Pursley, *New Correlation Identities for Periodic Sequences*, Electronics Letters, 20th January 1977, vol. 13, nº 2, pp. 48/49.

[21] Sarwate, D. V. , *Mean-Square Correlation of Shift Register Sequences*, IEE Proceedings, vol. 131, Part F, nº 2, April 1984, pp. 101/106.

[22] Sarwate, D. V., M. B. Pursley e T. Ü. Basar, *Partial Correlation Effects in Direct-Sequence Spread-Spectrum Multiple-Access Communication Systems*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-32, nº 5, May 1984, pp. 567/573.

[23] Simon, M. K., J. K. Omura, R. A. Scholtz e B. K. Levitt, *Spread Spectrum Communications*, vol. I, Rockville, MD, Computer Science Press, 1985.

[24] Skwirzynski, J. K. (editor), *New Concepts in Multi-User Communication*, NATO Advanced Study Institutes Series, Sijthoff Noordhoff International Publishers, 1981.

[25] Welch, L. R., *Lower Bounds on the Maximum Crosscorrelation of Signals*, IEEE Transactions on Information Theory, May 1974, pp. 397/399.

[26] Yao, K., *Error Probability of Asynchronous Spread Spectrum Multiple Access Communication Systems*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-25, nº 8, August 1977, pp. 803/809.