



REVISÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER – continuação

10. Integração no tempo

Se

$$v(t) \leftrightarrow V(f),$$

$$\text{então } g(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(\alpha) d\alpha \leftrightarrow G(f) = \frac{V(f)}{j2\pi f} + \frac{V(0)}{2} \delta(f).$$

A primeira parcela da transformada $G(f)$ é de interpretação imediata, decorrendo da própria definição da transformada. A segunda parcela, impulsiva, requer cuidadosa interpretação: se a área sob $v(t)$ (que é igual a $V(f=0)$) for não nula, então a integral $g(t)$, que em $t = -\infty$ é nula, assumirá o valor $V(f=0)$ em $t = +\infty$ (**Figura 03.01**):

$$\begin{aligned} - \quad g(t = -\infty) &= 0 \\ g(t = +\infty) &= V(0), \end{aligned}$$

e portanto o valor médio de $g(t)$ é $V(0)/2$. Verifique todas estas afirmações.

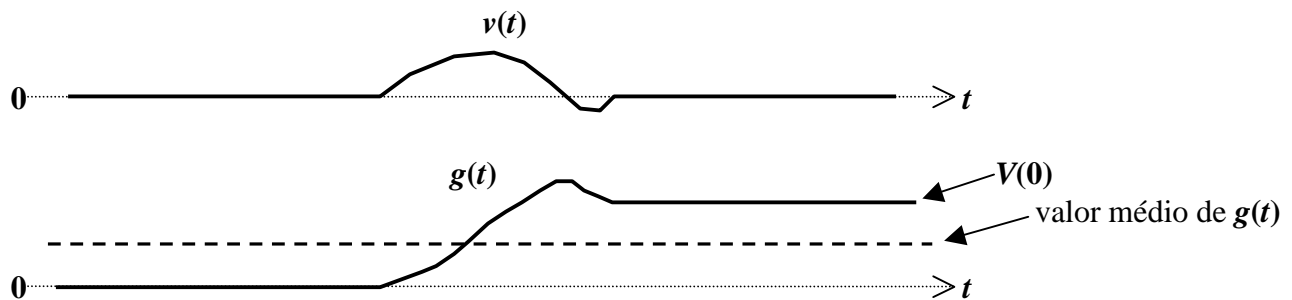


Figura 03.01. Um sinal $v(t)$ de área não nula, sua integral $g(t)$ e o valor médio de $g(t)$.

Notas:

1. O valor médio de $g(t)$, $\overline{g(t)}$, é definido como o limite

$$\overline{g(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t) dt,$$

ficando claro que as contribuições para $|t| \rightarrow \infty$ são as predominantes.

2. A transformada da integral pode também ser obtida, mais formalmente, através da convolução, como será ilustrado mais tarde.

11. Convolução

A convolução, um caso particular da integral de superposição, aparece muito naturalmente estabelecendo a relação entre

[a resposta impulsiva de um *sistema linear, fixo e quiescente*],

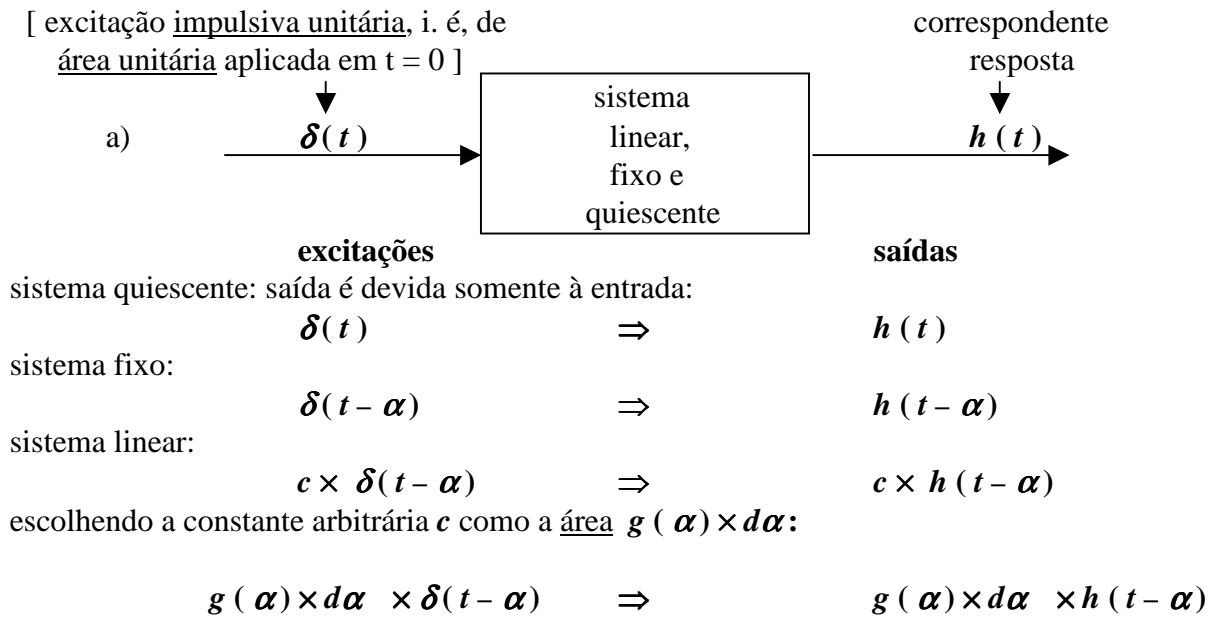
[o sinal aplicado à entrada desse sistema *quiescente*]

e

{ o sinal resultante observado à saída desse sistema }.



De fato, considere a **Figura 03.02**, que ilustra uma seqüência de sinais aplicados na **entrada** de um **sistema linear, fixo e quiescente** e as correspondentes **saídas**.



integrando em α para incluir as contribuições devidas a todos os valores possíveis da variável α :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \times \delta(t - \alpha) \times d\alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \times h(t - \alpha) \times d\alpha$$

A integral à esquerda é reconhecida como o próprio sinal de entrada, $g(t)$. O sinal resultante à saída do sistema foi construído pela integral à direita, que fica definida como a “**convolução entre $g(t)$ e $h(t)$** ”. Tem-se então:

entrada $g(t)$	\Rightarrow	saída $y(t)$
$g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \cdot \delta(t - \alpha) d\alpha \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \cdot h(t - \alpha) d\alpha \equiv g(t) * h(t)$		

Figura 03.02. Seqüência de sinais aplicados à entrada do sistema linear, fixo e quiescente, mostrando que nesse caso a saída é a “convolução” (definida pela integral de superposição) entre a entrada e a resposta impulsiva.

Na **Figura 03.02** indica-se que aplicando um impulso unitário $\delta(t)$ na entrada do sistema *quiescente* (isto é, sem qualquer armazenamento interno de energia), observa-se na saída o sinal $h(t)$, que é chamado “resposta impulsiva”. O fato de o sistema ser *quiescente* significa que a saída é devida única e exclusivamente à entrada, pois não há outras fontes de energia envolvidas. Como o sistema é fixo – ou invariante no tempo –, um atraso na entrada reflete-se num atraso na saída. Por ser sistema linear, vale a superposição.

Mediante troca da variável de integração, demonstra-se facilmente que a operação definida pela convolução é comutativa, como mostrado a seguir:



Fazendo $t - \alpha = x \Rightarrow t - x = \alpha$; $d\alpha = -dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} ..d\alpha = \int_{+\infty}^{-\infty} ..(-)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ..dx$.

$$g(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha).h(t-\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x).h(x) dx = h(t) * g(t)$$

Na segunda integral foi propositadamente substituída a variável de integração, para ressaltar o fato que seu efeito desaparece depois de ser efetuada a integração.

As operações que produzem a convolução são ilustradas graficamente na **Figura 03.03**, usando especificamente a primeira das integrais acima.

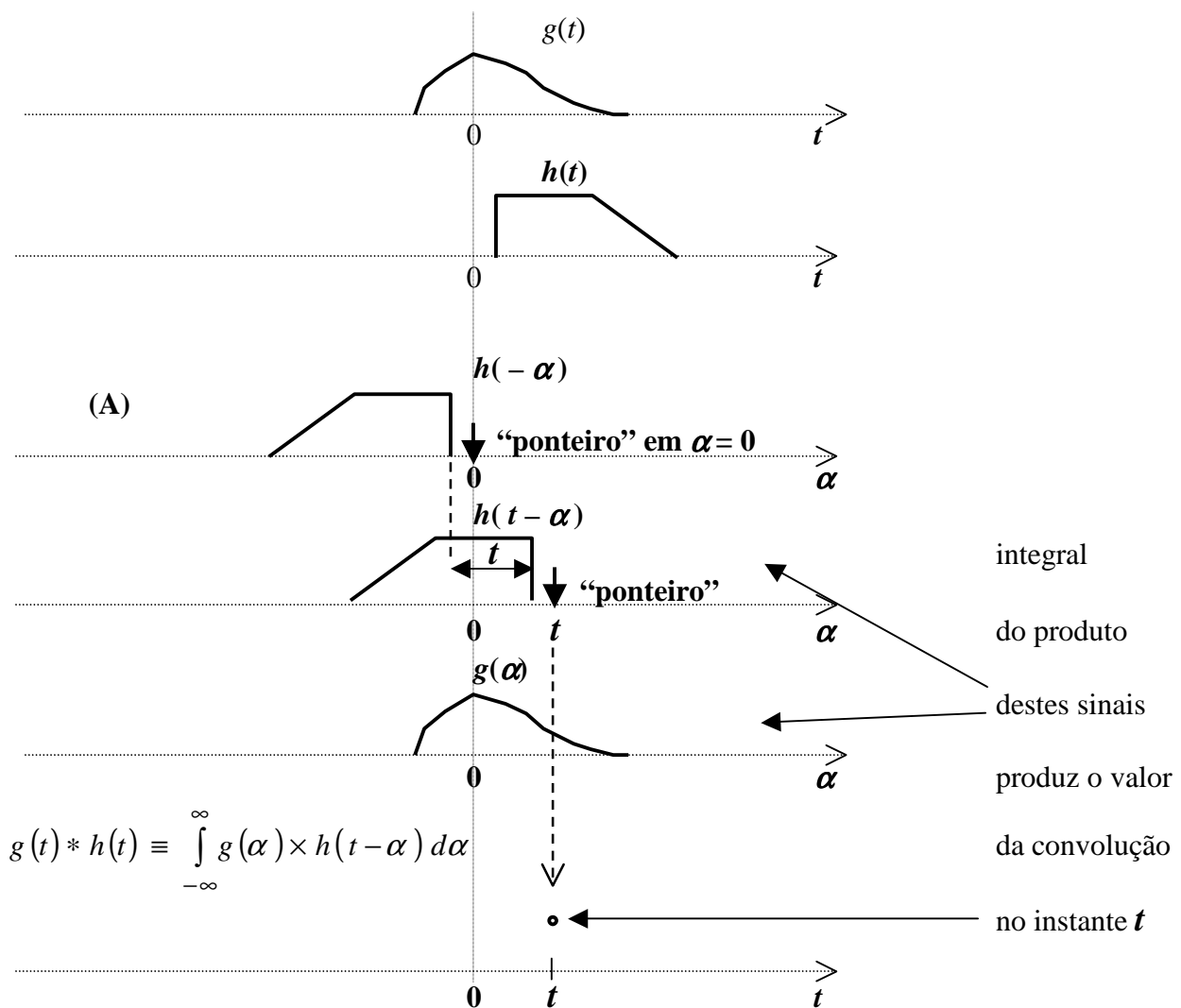


Figura 03.03. – Operações para obter a convolução entre os sinais $g(t)$ e $h(t)$. Este último é, propositadamente, ilustrado como resposta impulsiva de um sistema causal.

Para facilitar a convolução, em uma tira de papel deve ser esboçado um dos sinais [$h(t)$, nesta ilustração] com o eixo dos tempos invertido e a indicação do ponteiro no instante 0, conforme mostrado em (A). O ponteiro indica o instante em que será marcado o resultado da integração.



É também conveniente interpretar a convolução diretamente, como ilustrado na **Figura 03.04**:

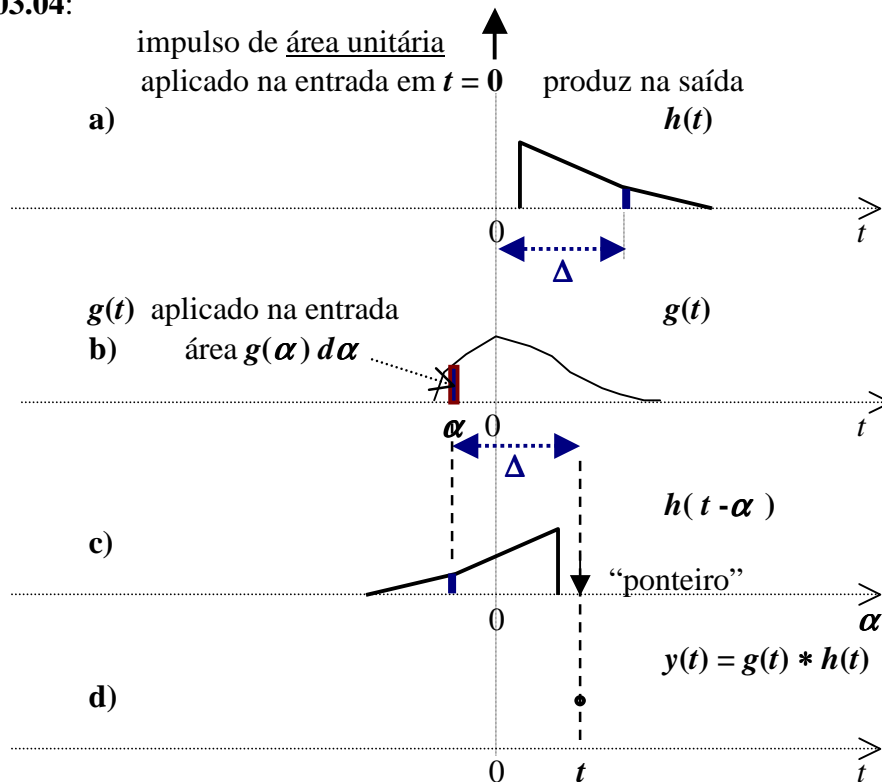


Figura 03.04. – Interpretação alternativa da convolução entre os sinais $g(t)$ e $h(t)$:

A amplitude $y(t)$ na saída, em um instante t (**d**), é o resultado da soma das contribuições de impulsos elementares de magnitude $[g(\alpha) d\alpha]$ aplicados na entrada em instantes α , como mostrado em **b**).

A amplitude na saída devida a esse impulso elementar é o produto de dois fatores: [a magnitude desse impulso] e [a saída devida ao impulso unitário, avaliada $\Delta (= t - \alpha)$ segundos após a aplicação desse impulso], conforme mostrado em **a**) – que é também mostrada em **c**) na forma em que aparece na integral que define a convolução.

Transformada da Convolução

Sendo, como definido acima, $y(t) = g(t) * h(t)$, deseja-se calcular $Y(f)$ em função das respectivas transformadas $G(f)$ e $H(f)$.

O cálculo é feito por simples e cuidadosa substituição:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(t-x) dx ,$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(t-x) dx \right] \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

invertendo a ordem das integrações e identificando termos resulta:



$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right] \cdot g(x) dx = \\
 &= H(f) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-j2\pi x f} dx}_{G(f)} = G(f) \times H(f)
 \end{aligned}$$

Resumindo, temos o par transformado:

$$\boxed{y(t) \equiv g(t) * h(t) \leftrightarrow Y(f) = G(f) \times H(f)}$$

Dualmente, dada a simetria:

indica convolução

$$\boxed{w(t) \equiv g(t) \times x(t) \leftrightarrow W(f) = G(f) * X(f)}$$

isto é, a transformada do produto de dois sinais é dada pela convolução das transformadas desses dois sinais.

A validade deste último par transformado é a seguir demonstrada diretamente, de modo análogo ao já feito:

Seja

$$W(f) \equiv G(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\alpha) G(\alpha) d\alpha, \text{ de onde se calcula } w(t):$$

↕

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\alpha) G(\alpha) d\alpha \right\} e^{j2\pi f t} df$$

invertendo a ordem das integrações e lembrando que

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\text{e} \\
 x(t) e^{j2\pi \alpha t} \leftrightarrow X(f-\alpha) \Rightarrow x(t) e^{j2\pi \alpha t} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\alpha) e^{j2\pi f t} df$$

resulta

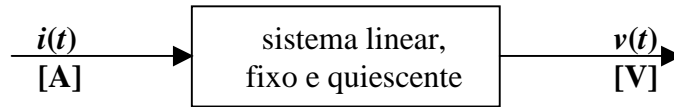
$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\alpha) e^{j2\pi f t} df \right\}}_{x(t) e^{j2\pi \alpha t}} d\alpha = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha = x(t) \times g(t)$$



Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

Nota sobre unidades na convolução e sua transformada.

Consideremos um sistema linear, fixo e quiescente, no qual a entrada seja uma corrente $i(t)$ e a saída uma tensão $v(t)$ (p. ex., um circuito elétrico alimentado por corrente, no qual se observa a tensão entre um par de nós):



Excitando por um impulso unitário $\delta(t)$ (isto é, corrente impulsiva que injeta uma carga de 1 coulomb), tem-se na saída a resposta impulsiva $h(t)$, cujas unidades são obviamente volts/coulomb (volts na saída devido a um coulomb injetado na entrada) [V/C]:

$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & \Rightarrow & h(t) \\ 1 \text{ [A.s] ou [C]} & & \text{[V/C]} \end{array}$$

Excitando agora com uma corrente arbitrária $i(t)$ [A] observa-se na saída $v(t)$ [V]:

$$\begin{array}{ccc} i(t) & \Rightarrow & v(t) \\ \text{[A]} & & \text{[V]} \end{array}$$

Consideremos as *transformadas* dessas funções com suas respectivas [unidades]:

$$\begin{array}{ccc} i(t) & \Leftrightarrow & I(f) \\ \text{[A]} & & \text{[A/Hz]} \\ \delta(t) & \Leftrightarrow & 1 \\ 1 \text{ [A.s] ou [C]} & & \text{[C/Hz]} \\ h(t) & \Leftrightarrow & H(f) \\ \text{[V/C]} & & \text{[(V/C)/Hz] ou V/(C.Hz)} \end{array}$$

Mas

$$\begin{array}{ccc} v(t) = i(t) * h(t) = & \Leftrightarrow & V(f) = I(f) \times H(f) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} i(x) \times h(t-x) dx & & \left[\frac{\text{A}}{\text{Hz}} \right] \times \left[\frac{\text{V}}{\text{C}} \frac{1}{\text{Hz}} \right] \\ \text{[A]} \times \left[\frac{\text{V}}{\text{C}} \right] \times \text{[s]} & & \text{ou} \left[\frac{\text{A}}{\text{Hz}} \right] \times \left[\frac{\text{V}}{\text{C/s}} \right] \text{ ou} \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] \end{array}$$

$$\text{[V]} = \text{[V]} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] \quad (\text{como deveria ser})$$



PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Já vimos que a operação de convolução é **comutativa**:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Facilmente verifica-se que a convolução é também associativa e distributiva. A demonstração é feita de maneira muito conveniente usando a Transformada de Fourier, uma vez que a convolução no tempo corresponde ao produto das respectivas transformadas. Assim, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(f)$$

$$w(t) \leftrightarrow W(f)$$

e as operações

$$[x(t) * y(t)] \leftrightarrow [X(f) \times Y(f)]$$

$$[y(t) * w(t)] \leftrightarrow [Y(f) \times W(f)]$$

$$[x(t) * y(t)] * w(t) \leftrightarrow [X(f) \times Y(f)] \times W(f) =$$

$$\therefore \equiv \Leftarrow \equiv$$

$$x(t) * [y(t) * w(t)] \leftrightarrow X(f) \times [Y(f) \times W(f)]$$

De forma análoga, demonstra-se que a convolução é também distributiva, utilizando-se das transformadas.

Em resumo:

$$x(t) * y(t) * w(t) = [x(t) * y(t)] * w(t) = x(t) * [y(t) * w(t)]$$

e

$$x(t) * \{ y(t) + w(t) \} = [x(t) * y(t)] + [x(t) * w(t)]$$

porque



$$X(f) \times \{ Y(f) + W(f) \} = [X(f) \times Y(f)] + [X(f) \times W(f)]$$



EXERCÍCIOS

1. Determinar $v(t)$ analiticamente e esboçar sua forma de onda em gráfico cotado, sendo

$$v(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_2}\right), \text{ com } T_2 > T_1.$$

(sugestão: usar as transformadas)

2. Derivada da convolução: Sendo $y(t) = g(t) * h(t)$ e $v(t) \equiv \frac{dy}{dt}$,

determinar $v(t)$ em função de $g(t)$ e $h(t)$ (ou suas derivadas), bem como sua transformada, $V(f)$ em função de $G(f)$ e $H(f)$.

3. Mostrar que se os sinais $g(t)$ e $h(t)$ só forem não nulos em intervalos de larguras finitas T_1 e T_2 , respectivamente (isto é, se têm suportes T_1 e T_2), então sua convolução só será não nula num intervalo de largura finita ($T_1 + T_2$).

4. Dualmente, se os espectros de dois sinais ocupam bandas de larguras finitas B_1 e B_2 , então o espectro do produto desses sinais terá largura finita não maior do que ($B_1 + B_2$).

5. Note que **não existe** a recíproca da afirmação acima, isto é, pode haver sinais com espectro de banda infinita cujo produto tem espectro de banda finita (!). Como exemplo, **analise** os espectros do módulo de um co-seno ($|\cos(\omega_0 t)|$) bem como do quadrado desse módulo.

6. Convolução com impulso: Mostre que

$$y(t) \equiv v(t) * \delta(t - t_0) = v(t - t_0)$$

de três maneiras diferentes:

através dos espectros;
 executando a convolução graficamente;
 e pela integral de convolução.

7. Sendo $x(t) = 3 \delta(t-2) - 5 \delta(t-4)$; $y(t) = 2 \delta(t-5)$;
 e $w(t) = x(t) * y(t)$
 Esboce essas 3 funções.

8. Considere o par transformado já visto

$$g(t) = \exp(-a|t|) \quad \leftrightarrow \quad G(f) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}.$$

Verifique o comportamento assintótico de $G(f)$ para $|f| \rightarrow \infty$ através das derivadas de $g(t)$.

9. Determine a transformada do $w(t)$ definido pela convolução de duas portas de mesma largura. Esboce todas as funções envolvidas (em t e em f), e conclua qual a área sob a função **sinc**².

10. Determine o comportamento assintótico do pulso $p_2(t)$ cuja transformada $P_2(f)$ é dada:

$$p_2(t) \quad \leftrightarrow \quad P_2(f) = \cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) \times \Pi\left(\frac{f}{f_0}\right).$$

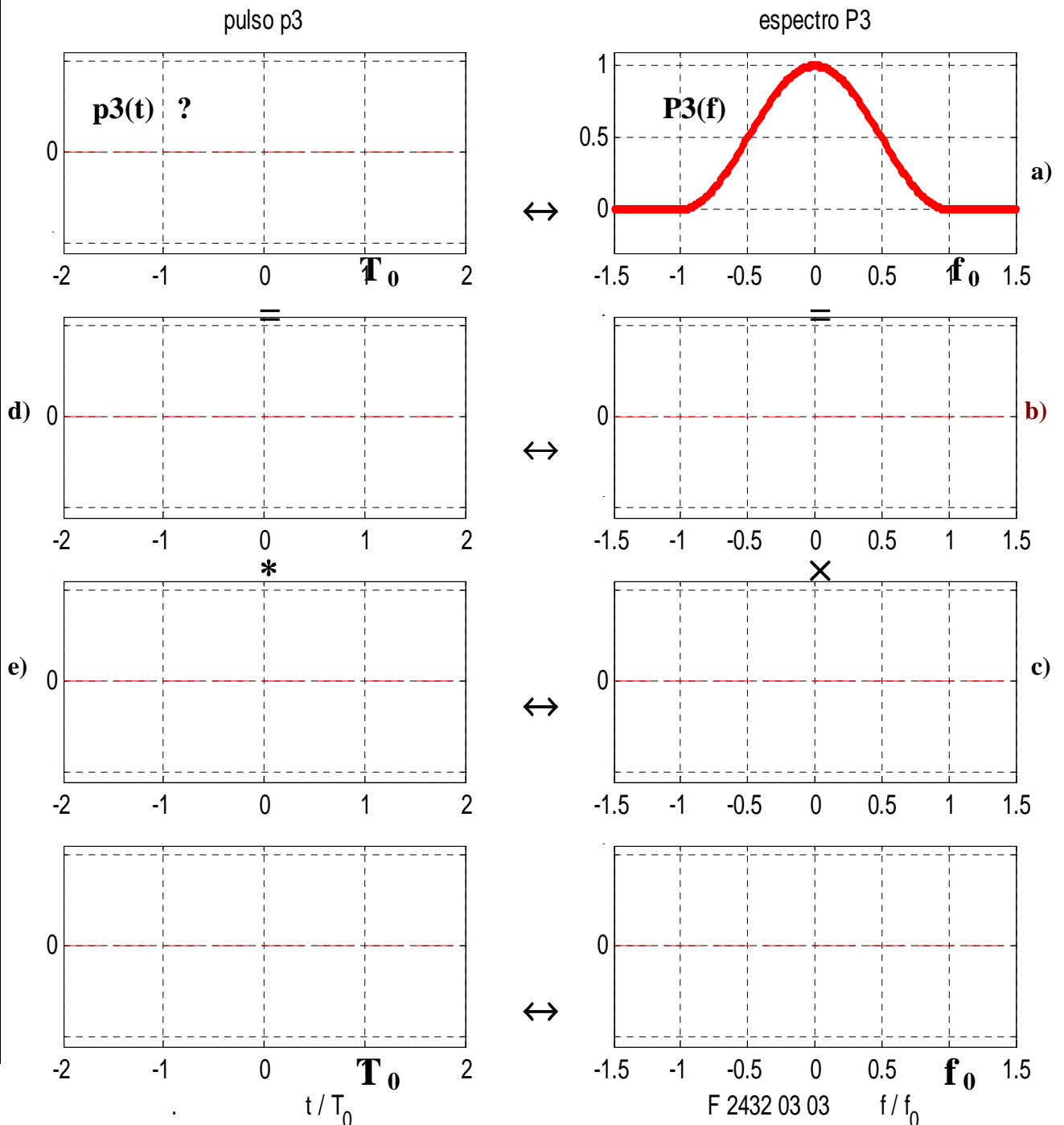
Sugestão: Diferencie $P_2(f)$ até encontrar impulsos (se necessário, esboce $P_2(f)$ – não é preciso determinar a expressão de $p_2(t)$).



11. Deseja-se analisar o pulso “**p3**”, cujo espectro é um *co-seno levantado*, conforme mostrado em **a)** na **Figura** abaixo. A sucessão de pares transformados dessa **Figura** apresenta um conveniente roteiro para determinar a expressão temporal do pulso **p3**. Para isso:

- Expresse o espectro em **a)** como adequado produto de **porta (b)** por $(1 + \text{co-seno})$ (**c**);
- Determine as correspondentes anti-transformadas em **(d)** e **(e)** e efetue a convolução;
- Esboce a forma de onda resultante (será a soma de 3 **sincs** cujas amplitudes você determinará);
- Conclua, tanto pelo espectro como pela construção no tempo, qual o comportamento assintótico do **p3**, para $|t| \rightarrow \infty$;
- Confira o valor de **p3(t = 0)** que você encontrou.

(calibre adequadamente os eixos verticais)





12. Função de correlação (cruzada) no tempo – para sinais de energia

Sejam $g(t)$ e $v(t)$ dois *sinais de energia* (ou seja, sinais com energia finita, e que portanto possuem transformadas de Fourier). Define-se a **função de correlação cruzada** entre eles como

$$\psi_{gv}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t-\tau) \cdot v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \cdot v(x+\tau) dx$$

$$\leftrightarrow \Psi_{gv}(f) = G^*(f) \cdot V(f), \text{ como é mostrado abaixo.}$$

Note que o complexo conjugado ocorre na primeira função – g – que é a atrasada.

Por mudança da variável de integração, **mostre que** a segunda integral no tempo é equivalente à primeira. A definição inclui sinais (isto é, funções no tempo) complexos, que serão utilizados em aulas seguintes. Observações: • a variável é τ ; • a variável de integração, t (ou x), desaparece; • diferentemente da integral de convolução, não há inversão do eixo dos tempos.

A **primeira integral é a mais conveniente** para representar graficamente a operação que produz $\psi_{gv}(\tau)$, conforme mostra a **Figura 03.05** (verifique porque isso acontece):

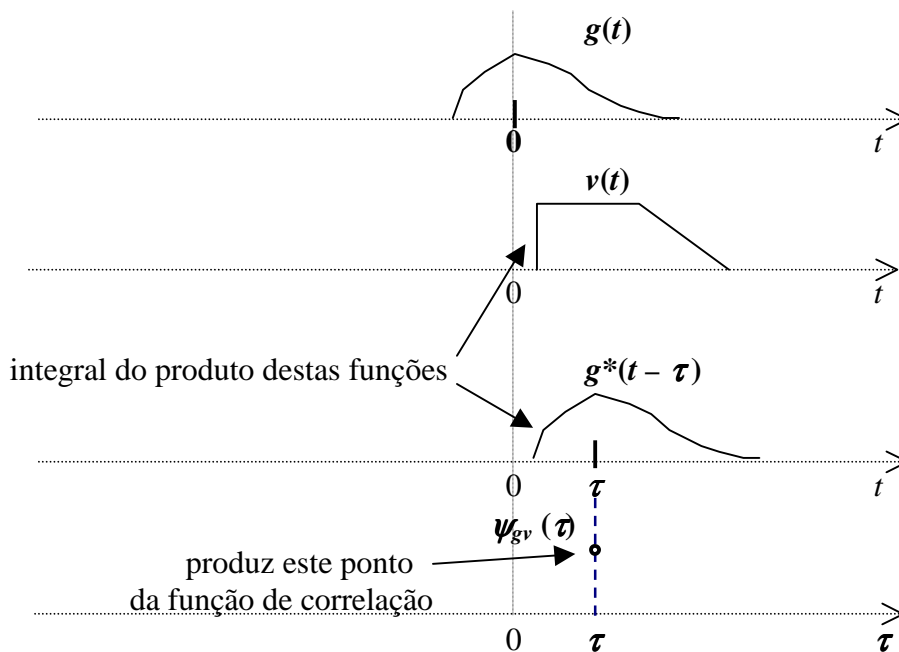


Figura 03.05. – Operações para obter a função de correlação cruzada.

A transformada de Fourier da função de correlação cruzada é calculada em função das transformadas dos dois sinais por aplicação direta das definições, a saber:

$$\psi_{gv}(\tau) \quad \leftrightarrow \quad \Psi_{gv}(f)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t-\tau) \cdot v(t) dt \quad = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{gv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \cdot v(x+\tau) dx$$



Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

Substituindo (aqui a segunda forma da integral no tempo é a mais cômoda):

$$\begin{aligned}\Psi_{gv}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{gv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \cdot v(x + \tau) dx \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau\end{aligned}$$

Invertendo a ordem das integrações e identificando as integrais resultantes:

$$\begin{aligned}\Psi_{gv}(f) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(x + \tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right]}_{V(f) \cdot \exp(+j2\pi f x)} \cdot dx = V(f) \cdot \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \cdot e^{+j2\pi f x} dx \right\}}_{G^*(f)} = \\ &= V(f) \times G^*(f)\end{aligned}$$

Concluindo:

$$\begin{aligned}\psi_{gv}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \cdot v(t + \tau) dt \quad \leftrightarrow \quad \Psi_{gv}(f) = G^*(f) \cdot V(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x - \tau) \cdot v(x) \cdot dx\end{aligned}$$

A correlação cruzada expressa como convolução de funções associadas

É útil expressar a função de correlação cruzada como uma convolução. Para isso, considere a definição original na forma $\psi_{gv}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t - \tau) \cdot v(t) dt$ e os seguintes pares transformados

$$\begin{aligned}g(t) &\leftrightarrow G(f) \\ g^*(t) &\leftrightarrow G^*(-f) \quad (\text{propriedade 9, Transformada do conjugado}) \\ \text{definamos } w(t) \equiv g^*(-t) &\leftrightarrow W(f) = G^*(f)\end{aligned}$$

Reescrevendo a correlação cruzada original em termos do $w(t)$ assim definido:

$\psi_{gv}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t - \tau) \cdot v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau - t) \cdot v(t) dt$. Reconhece-se esta expressão como a convolução de $w(\tau)$ com $v(\tau)$, ou – o que dá no mesmo, de $g^*(-\tau)$ com $v(\tau)$ (observe que a variável é τ). Ou seja:

a função de correlação cruzada de $g(t)$ com $v(t)$ – nesta ordem!
 é idêntica à convolução de $g^*(-t)$ com $v(t)$.



Segue-se que, confirmando resultado já obtido:

$$\begin{aligned} \psi_{gv}(\tau) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t-\tau) \cdot v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau-t) \cdot v(t) dt && \leftrightarrow G^*(f) \times V(f) = W(f) \times V(f) \\ &= w(t) * v(t) && \leftrightarrow W(f) \times V(f) \end{aligned}$$

É também útil definir uma **função de correlação cruzada em frequência**, ou seja, correlação cruzada de espectros. Pela simetria do equivalente expresso como convolução, conclui-se que a anti-transformada da correlação dos espectros é dada pelo produto das funções no tempo:

$$\psi_{GV}(t) = g^*(t) \times v(t) \leftrightarrow \Psi_{GV}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\alpha-f) \cdot V(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x) \cdot V(x+f) dx$$

De fato, calculando a anti-transformada diretamente pelas definições:

$$\begin{aligned} \psi_{GV}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\Psi_{GV}(f)} \times e^{+j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G^*(x) \cdot V(x+f) dx \right] \cdot e^{+j2\pi ft} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{V(x+f) \cdot e^{+j2\pi ft}}_{v(t) \cdot \exp[-j2\pi xt]} df \right] \times G^*(x) dx = \\ &= v(t) \times \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G^*(x) \cdot e^{-j2\pi xt}}_{g^*(t)} dx = g^*(t) \times v(t) \end{aligned}$$

Exercício: Verifique todas as igualdades e identidades acima: os sinais são traiçoeiros.

Observação: A função de correlação cruzada (na verdade, de auto-correlação) de espectros será empregada para analisar a envoltória de sinais modulados em **FM**, e em especial para determinar a banda ocupada por esses sinais.

EXERCÍCIOS

1. Verifique as igualdades e a consistência dos pares abaixo:

$$\psi_{vg}(\tau) = \psi_{gv}^*(-\tau) \leftrightarrow \Psi_{vg}(f) = \Psi_{gv}^*(f).$$

2. Mostre que se $v(t)$ e $g(t)$ são reais, então

$$\psi_{vg}(\tau) = \psi_{gv}(-\tau)$$

completar com outros....



Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

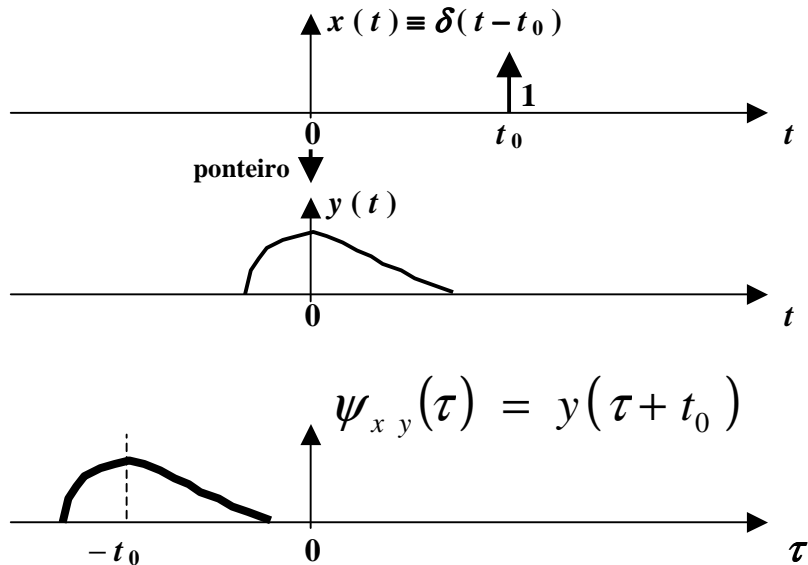
3. **Correlação com impulso** *note que a ordem é importante !*

Sendo $x(t) \equiv \delta(t - t_0)$ (impulso unitário aplicado no instante t_0) e $y(t)$ o pulso ilustrado, **verifique** os resultados abaixo especificados. Observe o efeito da ordem das funções.

pela própria definição:

$$\psi_{x y}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0 - \tau) \times y(t) dt = y(t = t_0 + \tau) = y(\tau + t_0)$$

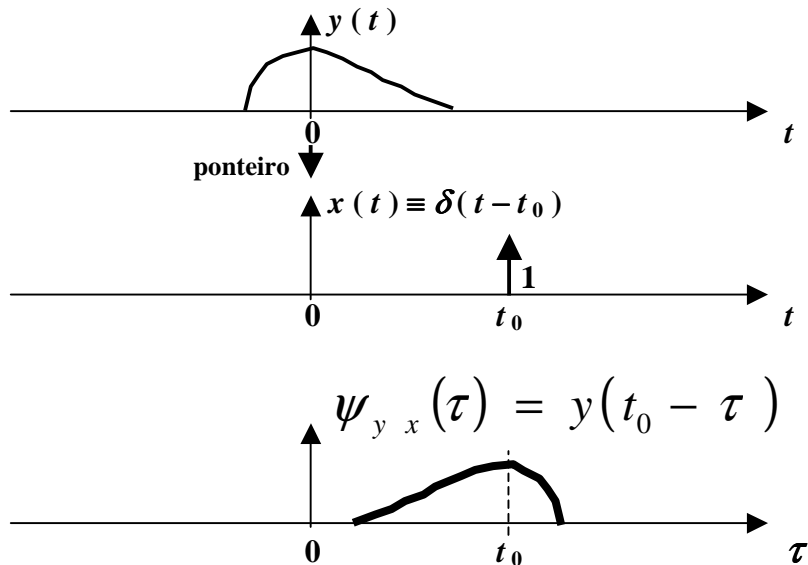
graficamente:



pela própria definição:

$$\psi_{y x}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) \times \delta(t - t_0) dt = y(t_0 - \tau)$$

graficamente:



4. Verifique estes resultados também pela convolução, conforme mostrado na **página 9**.



Função de auto-correlação e energia de um sinal

A função de auto-correlação de um sinal de energia $v(t)$ é definida pela função de correlação cruzada quando $g(t) = v(t)$, ou seja:

$$\psi_v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t) \cdot v(t + \tau) dt \quad \leftrightarrow \quad \Psi_v(f) = V^*(f) \cdot V(f) = |V(f)|^2.$$

O valor assumido pela função de auto-correlação em $\tau = 0$ é a própria **energia do sinal**:

$$\psi_v(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t) \cdot v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = E_v$$

Aplicando a propriedade das áreas ao par transformado, verifica-se que a energia E_v pode também ser calculada pela área sob a transformada $\Psi_v(f) = |V(f)|^2$:

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df.$$

Esta expressão é o “**Teorema de Parseval**”: A **energia** de um sinal pode ser calculada integrando-se, no tempo, o seu módulo ao quadrado, ou integrando-se, em frequência, o quadrado do módulo de sua transformada de Fourier.

Note que $\Psi_v(f) = |V(f)|^2$ mostra como a energia contida em um sinal está distribuída no espectro de frequências, da mesma forma que $|v(t)|^2$ mostra como essa energia está distribuída no tempo.

Por essa razão, $|V(f)|^2$ – ou $\Psi_v(f)$ – recebe o nome muito apropriado de **DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA**, abreviada por **DEE**.

EXEMPLO (exercício)

Considere o par transformado

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad \leftrightarrow \quad V(f)$$

Esboce $v^2(t)$ bem como $|V(f)|^2$ (note que é um sinc^2).

Conclua (novamente...) qual é a área sob a função sinc^2 .

mencionar função de autocorrelação em frequência !!!! já feito.



As Figuras seguintes ilustram graficamente a distinção entre a **convolução** e a **correlação cruzada**.

$g(t) * h(t)$:

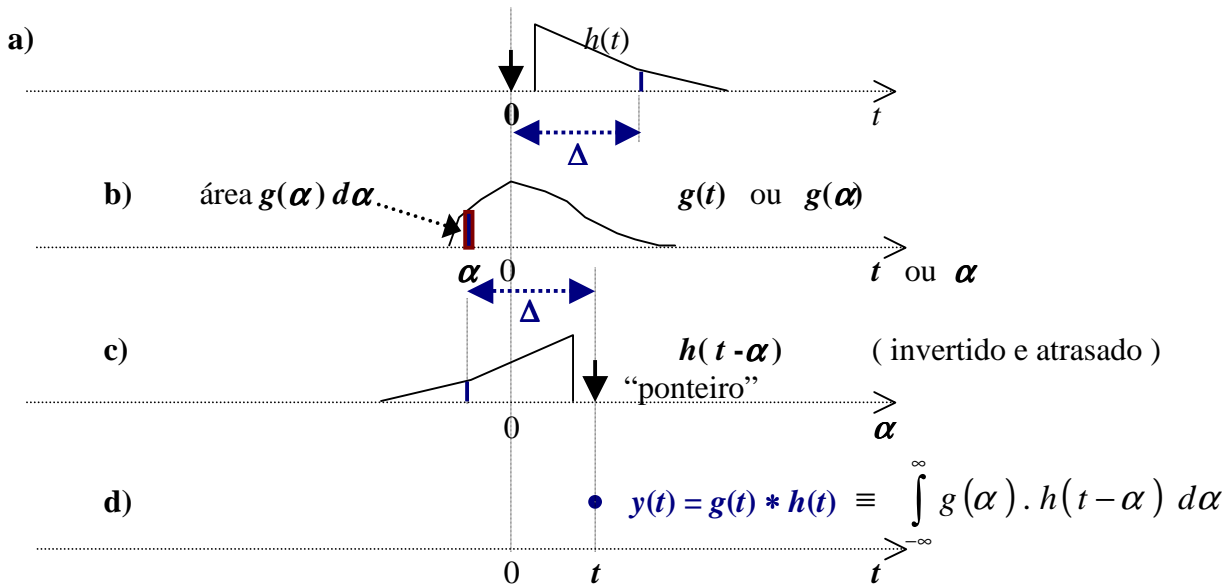


Figura 03.04. – Interpretação alternativa da **convolução** entre os sinais $g(t)$ e $h(t)$:

A amplitude $y(t)$ na saída, em um instante t (**d**), é o resultado da soma das contribuições de impulsos elementares, de magnitude $[g(\alpha) d\alpha]$, aplicados na entrada em instantes α , como mostrado em **b**).

A amplitude na saída devida a esse impulso é o produto de dois fatores: [a magnitude desse impulso] e [a saída devida ao impulso unitário, avaliada Δ segundos após a aplicação desse impulso unitário, como mostrado em **a**) – que é também mostrada em **c**) na forma em que aparece na integral que define a convolução.

$\psi_{g v}(\tau)$:

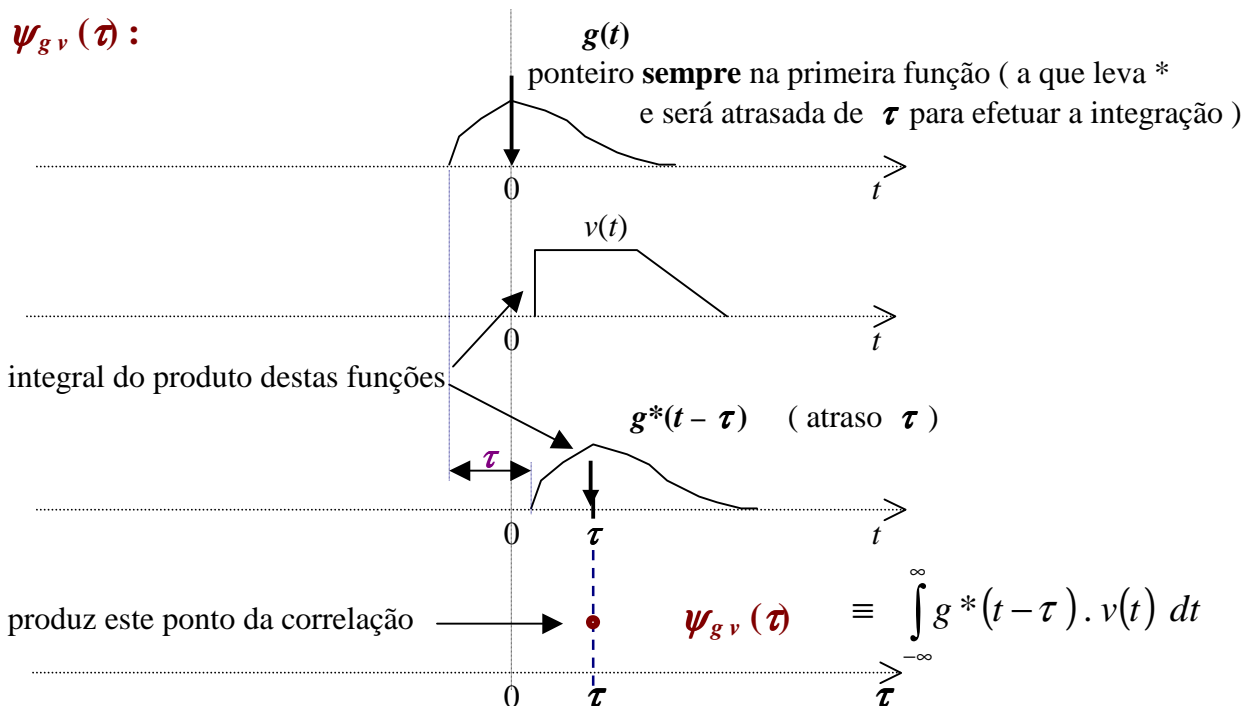


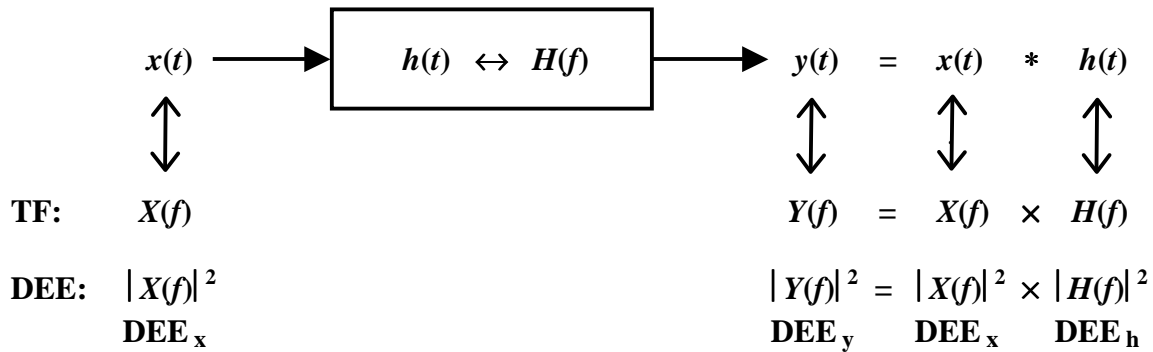
Figura 03.05. – Operações para obter a função de **correlação cruzada**.



DEE na entrada e saída de sistema linear

novembro 2013

Considere o sistema linear abaixo, excitado pelo sinal $x(t)$ e produzindo saída $y(t)$



Energias:

na entrada

na saída

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \times |H(f)|^2 df$$

Na última integral, se um dos fatores for essencialmente constante em todas as frequências em que o outro for não nulo, então essa constante pode ser colocada fora da integral. É o caso, por exemplo, de um filtro com ganho constante k em toda a banda do sinal de entrada. A energia do sinal na saída fica então

$$E_y = k^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = k^2 \times E_x$$

Outro caso de interesse ocorre quando a DEE do sinal de entrada é essencialmente constante em toda a banda do filtro. Esta situação será mais apropriadamente tratada na **A04**, quando será discutida a Densidade Espectral de Potência, DEP de um sinal.



Exercício: (exemplo de questões de provas) talvez incluir aqui, da A02: páginas 15—19 a 21 já nesta, pp 27 e ...

Considere os pulsos $x(t)$ e $y(t)$ explicitados abaixo

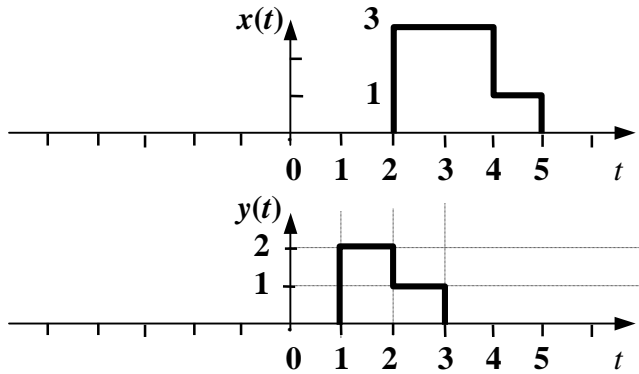


Figura 03.06

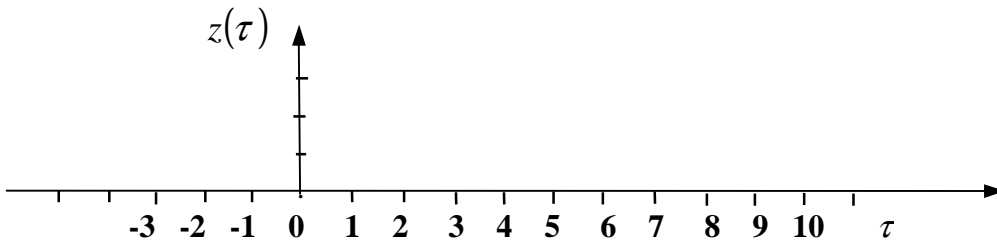
Seja $z(\tau)$ a função de correlação cruzada entre $x(t)$ e $y(t)$, isto é:

$$z(\tau) \equiv \psi_{xy}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-\tau) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha) \cdot y(\alpha + \tau) d\alpha$$

complete os sinais

escreva $Z(f)$ em função de $X(f)$ e $Y(f)$: $Z(f) = \dots\dots\dots$

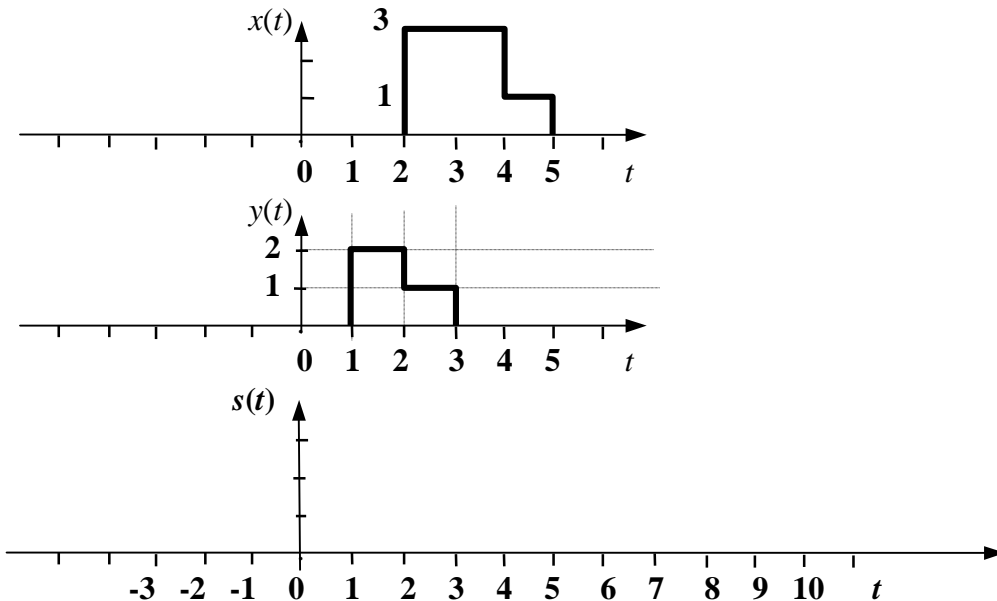
Cuidadosamente esboce $z(\tau)$ em gráfico cotado (atente para a assimetria!):



Chamando $s(t)$ a **convolução** de $x(t)$ com $y(t)$,
 dê duas expressões de $s(t)$ em função de $x(t)$ e $y(t)$:

$s(t) = \dots\dots\dots$
 escreva $S(f)$ em função de $X(f)$ e $Y(f)$: $S(f) = \dots\dots\dots$

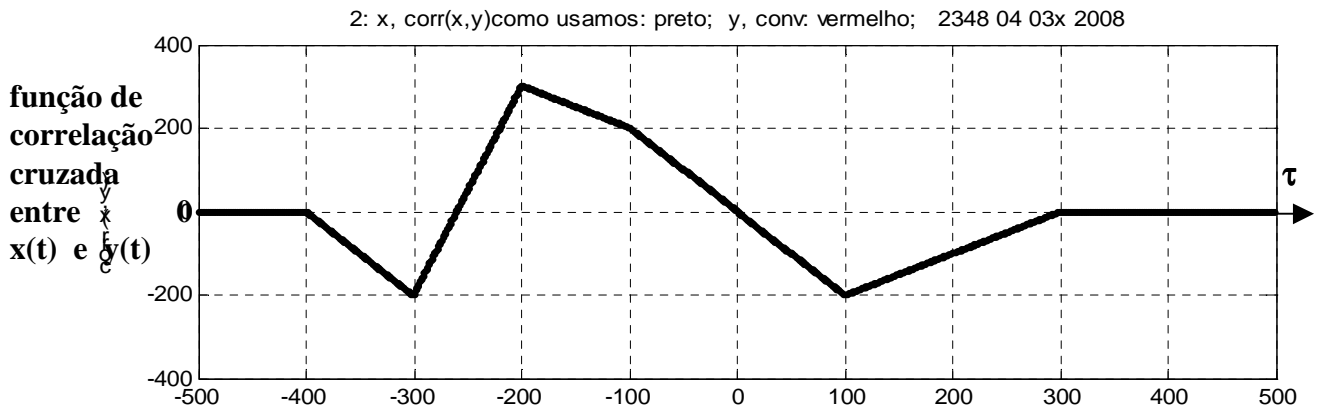
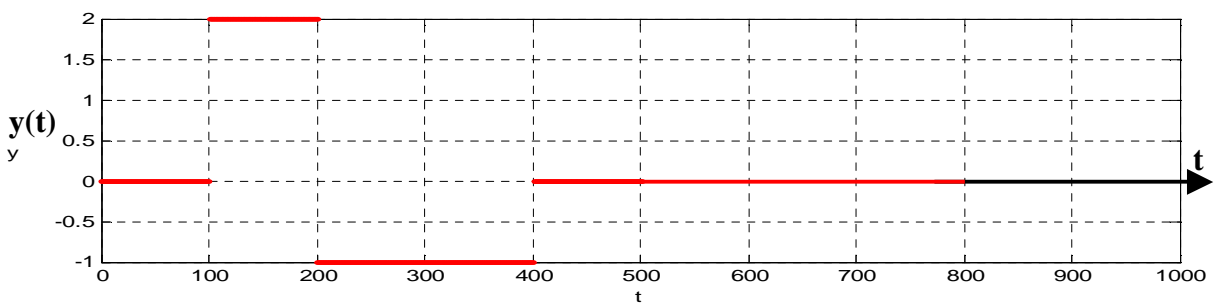
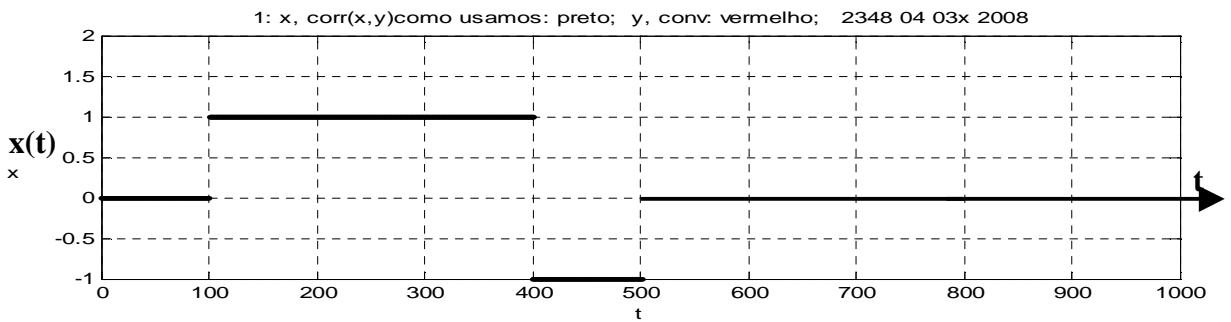
Cuidadosamente esboce $s(t)$ em gráfico cotado (atente para a assimetria!):



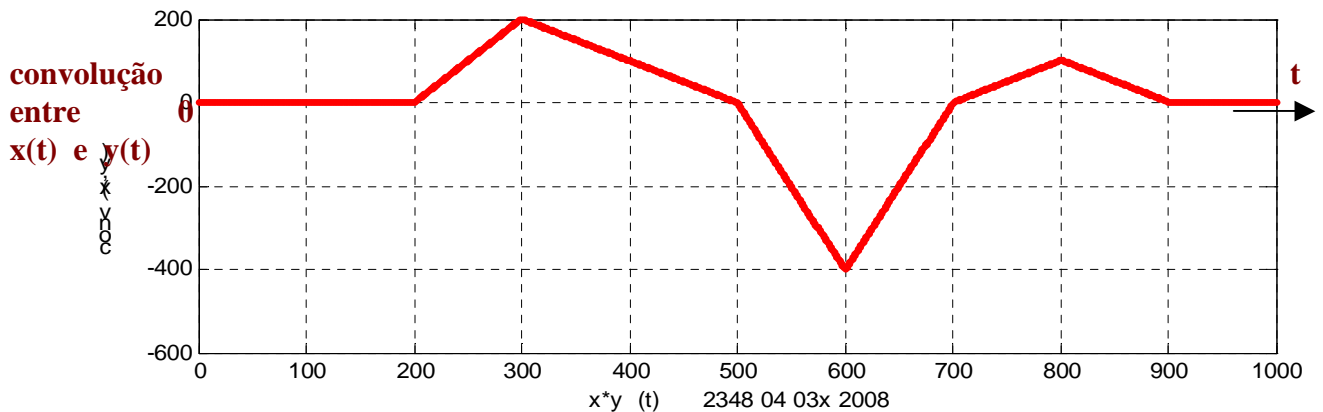


Ilustramos a seguir exemplo de correlação cruzada e convolução de dois sinais de energia, mostrando claramente que essas funções são em geral muito diferentes.

Como exercício, verifique os dois resultados, com especial atenção aos sinais.



variável tau é o atraso da primeira função (x) ^{corr(x,y) (tau)} (o contrário do que faz o MatLab)



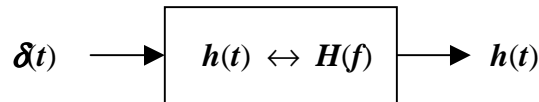


Importante aplicação de correlação e convolução:

Determinação da resposta impulsiva de um sistema

(ver também Carlson 3^a. ed., p. 179).

Para determinar a **resposta impulsiva** de um sistema, a primeira idéia é aplicar um impulso à sua entrada e observar a saída. Entretanto, um “impulso” possui amplitude infinita, e em um grande número de sistemas é fisicamente inviável esse tipo de excitação.

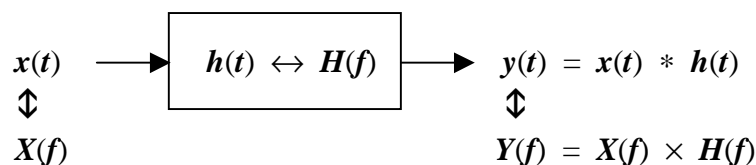


Uma alternativa é usar o artifício exposto a seguir: O sistema é excitado por um sinal $x(t)$ muito particular, cuja função de auto correlação é um impulso, $\delta(t)$, isto é, sua **DEE** é unitária:

$$\begin{aligned} \psi_x(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha-t).x(\alpha) d\alpha = \leftrightarrow \Psi_x(f) = |X(f)|^2 = \\ &= \delta(t) \leftrightarrow = 1 \text{ isto é, constante para todas as frequências} \end{aligned}$$

Mostraremos que nessas condições a resposta impulsiva do sistema é a própria função de correlação cruzada entre a entrada e a saída.

Seja então o mesmo sistema acima, agora excitado pelo $x(t)$ descrito. A saída é dada pela convolução da entrada com a resposta impulsiva, como indicado abaixo, juntamente com as respectivas transformadas



Calculemos a função de correlação cruzada entre a entrada e a saída, bem como sua transformada:

$$\begin{aligned} \psi_{xy}(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha-t).y(\alpha) d\alpha \leftrightarrow \Psi_{xy}(f) = X^*(f) \times Y(f) \\ &\leftrightarrow = X^*(f) \times X(f) \times H(f) \\ &\leftrightarrow = |X(f)|^2 \times H(f) = 1 \times H(f) \\ &= h(t) \leftrightarrow = H(f) \\ &\leftarrow \end{aligned}$$

Ou seja, a função de correlação cruzada entre a entrada e a saída (determinada experimentalmente) é a própria resposta impulsiva do sistema.

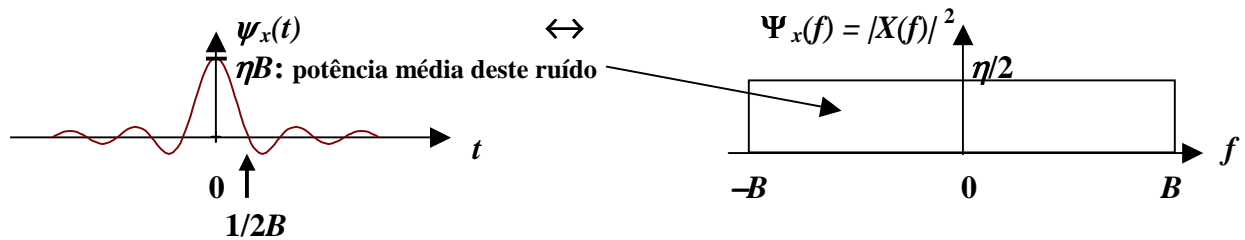


Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

(A plena compreensão do material seguinte necessita de conhecimentos adquiridos em Processos Estocásticos, e que serão aqui revistos na Aula 21.)

Mais realisticamente, o sinal aplicado na entrada, $x(t)$, possui, necessariamente, banda limitada – pode ser, por exemplo, um ruído Gaussiano “branco” de banda B , a qual deverá ser “suficientemente maior” que a banda do sistema em estudo. Neste caso $x(t) \equiv n(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_x(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha-t).x(\alpha) d\alpha = \leftrightarrow \Psi_x(f) = |X(f)|^2 = \\ &= \eta B \text{sinc}(2Bt) \leftrightarrow = \frac{\eta}{2} \underbrace{\Pi\left[\frac{f}{2B}\right]}_{\text{função porta de largura } 2B} \end{aligned}$$

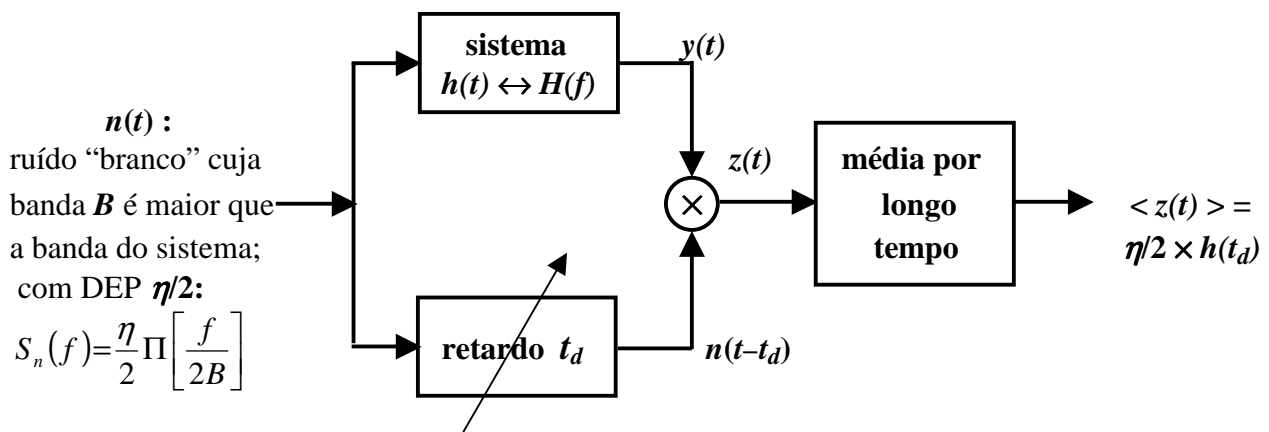


Com esta entrada, a formulação fica

$$\begin{aligned} \psi_{xy}(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha-t).y(\alpha) d\alpha \leftrightarrow \Psi_{xy}(f) = X^*(f) \times Y(f) \\ &\leftrightarrow = X^*(f) \times X(f) \times H(f) \\ &\leftrightarrow = |X(f)|^2 \times H(f) = \frac{\eta}{2} \times \Pi[f/2B] \times H(f) = \\ &= \frac{\eta}{2} h(t) \leftrightarrow = \frac{\eta}{2} H(f) \end{aligned}$$

Se, de fato, a banda B for maior que a banda do sistema em estudo. -----

Ou seja, nestas condições, a função de correlação cruzada da entrada com a saída (determinada experimentalmente conforme o diagrama abaixo) é igual a $\eta/2 \times h(t)$.





Seguem-se exemplos do procedimento acima descrito.

Tomou-se como “sistema linear” um filtro de Butterworth, cuja resposta impulsiva $h(t)$ é conhecida; esta foi utilizada para a determinação da resposta, $y(t)$, resultante da entrada, $x(t)$, que foi escolhida de forma a ter função de autocorrelação “essencialmente” impulsiva. Uma estimativa da resposta impulsiva foi então obtida pela correlação cruzada entre a entrada e a saída (nesta ordem). Numa aplicação real, a saída $y(t)$ é obtida experimentalmente, excitando o sistema com uma entrada $x(t)$ adequada, isto é, cuja autocorrelação seja essencialmente impulsiva, ou, equivalentemente, cuja função de autocorrelação seja essencialmente plana na banda do sistema em estudo.

EXEMPLO 1

Filtro de Butterworth passa-baixas, com frequência de corte 0,5 Hz, ganho unitário e ordem $N=8$. A resposta impulsiva é, de fato, conhecida e está mostrada na **Figura 03.11**.

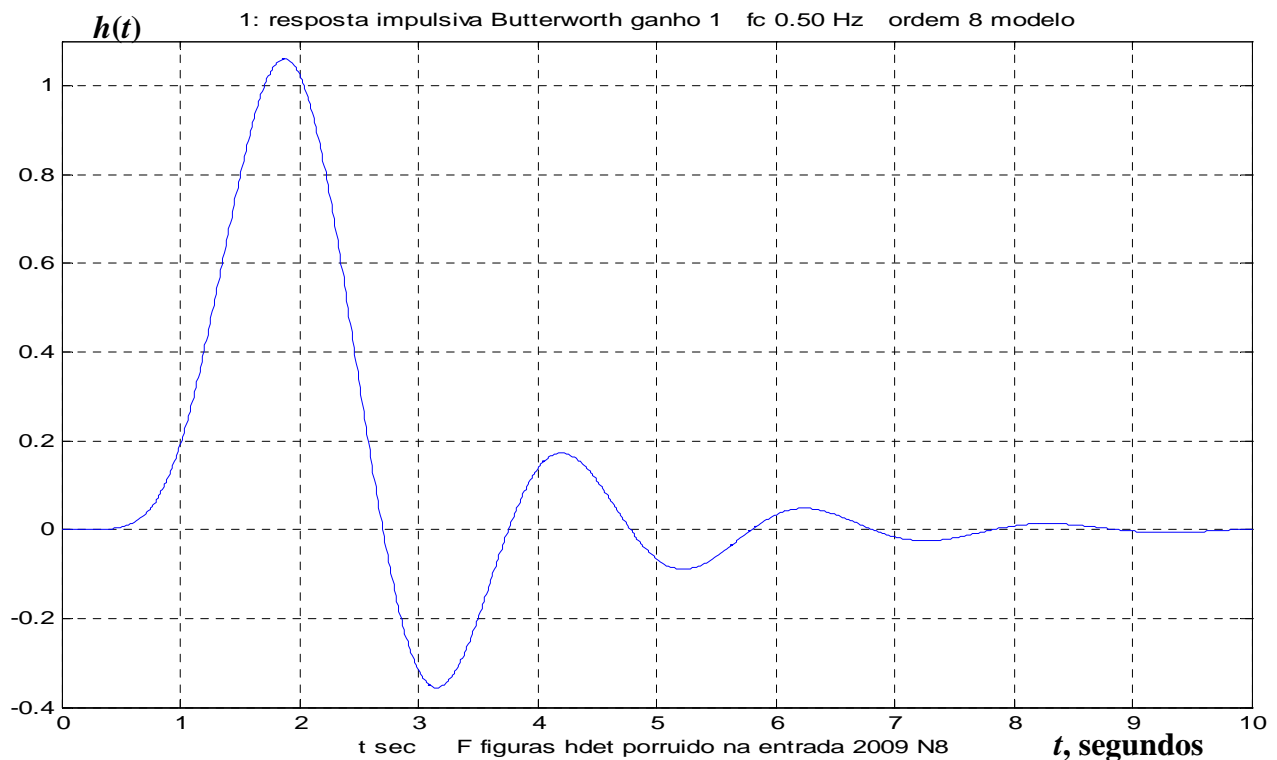


Figura 03.11.

Trabalhou-se com **100 amostras/s** dessa função.

Como entrada $x(t)$ tomaram-se seqüências de números aleatórios e independentes, de comprimentos variáveis, também com **100 amostras por segundo**, escolhidos de distribuição Gaussiana, com o propósito de se compararem os resultados, isto é, confrontar o $h(t)$ real – neste caso conhecido – com o obtido pela correlação cruzada entre a entrada e a saída.

Figuras geradas pelo programa MatLab

F_figuras_hdet_porruido_na_entrada_2009_N8.m

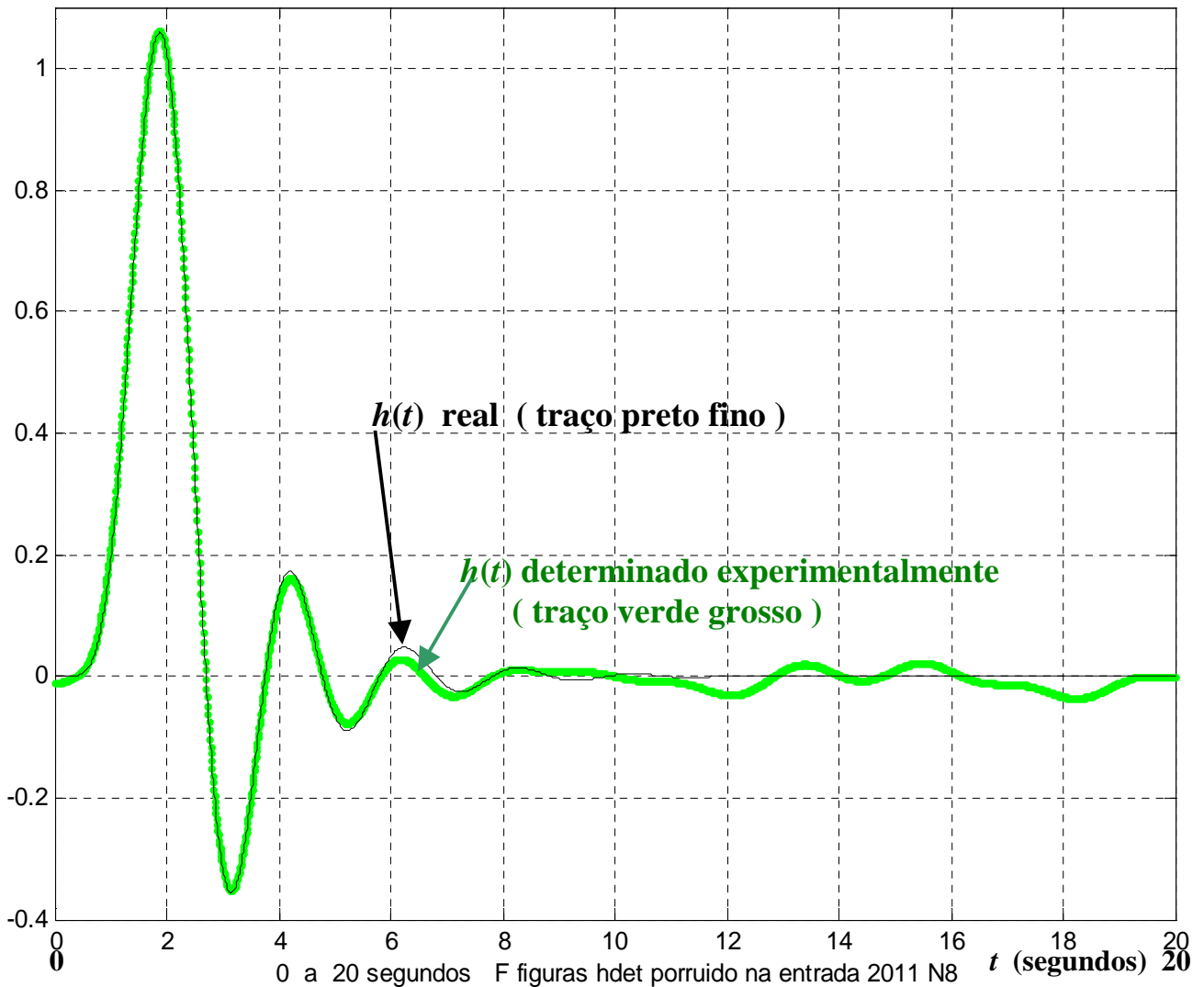
Como foi usado ruído gaussiano com 100 amostras independentes por segundo, esse ruído tem espectro plano até 50 Hz, muitíssimo maior que a banda ocupada pelo sistema em estudo.



Traço verde grosso: Resposta impulsiva determinada pelo método descrito, usando entrada constituída de 500.000 amostras independentes (tomadas a cada 0,01 s) de ruído Gaussiano com desvio padrão = 1 V, potência média 1 V^2 , banda 50 Hz, e portanto $\eta/2 = 0,01 \text{ V}^2/\text{Hz}$. (duração da entrada: 5.000 s)

Traço preto fino: Resposta impulsiva real, para comparação.

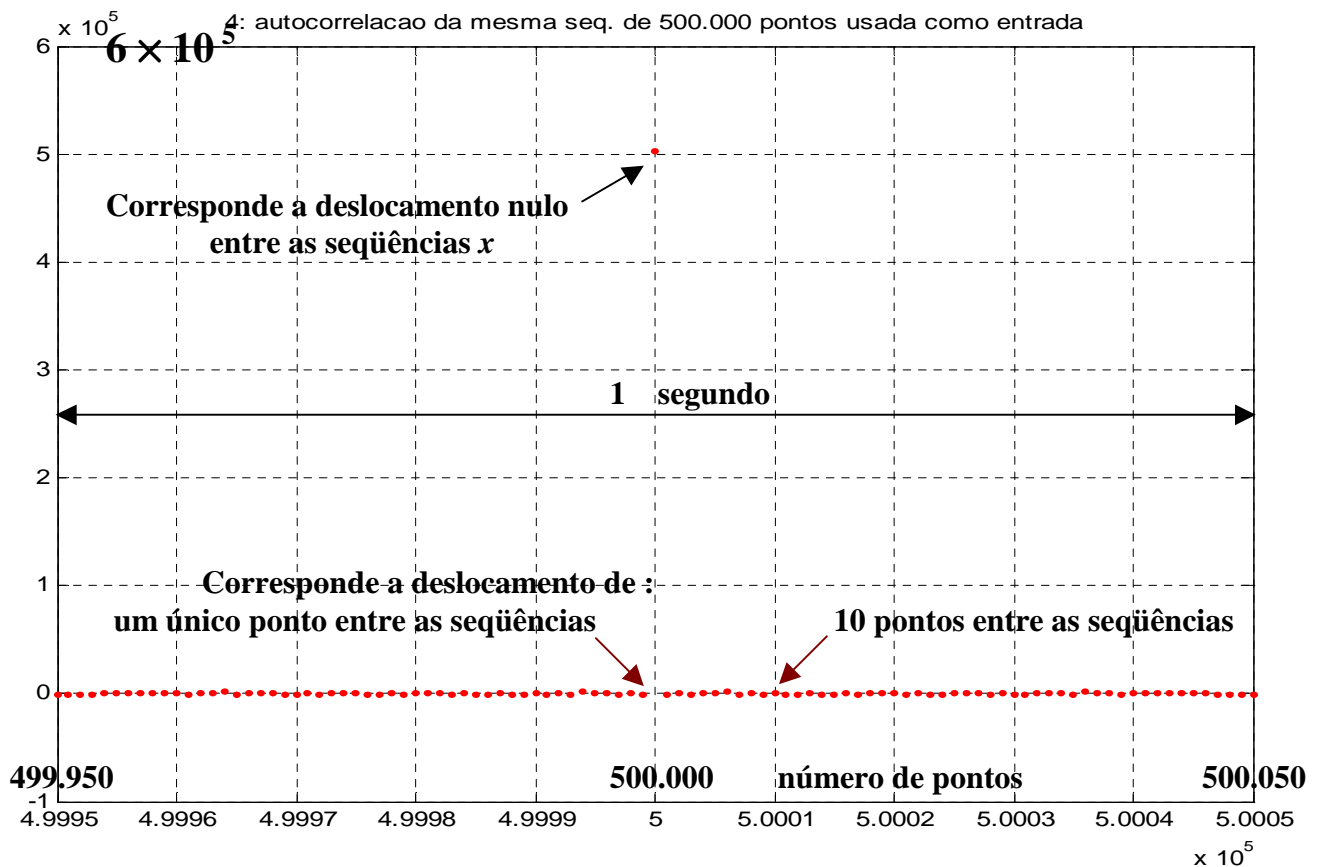
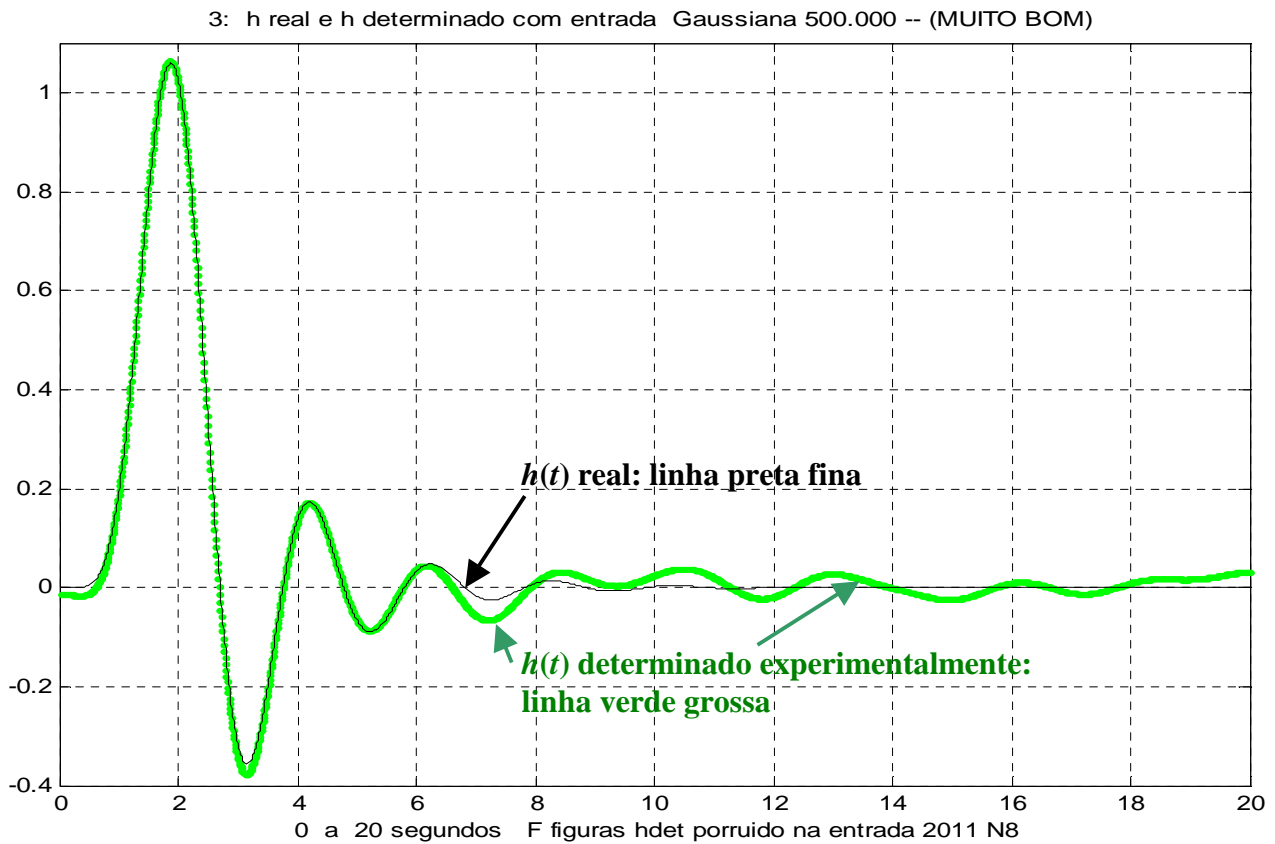
3: h real e h determinado com entrada Gaussiana 500.000 -- (MUITO BOM)



Observe que as estimativas de $h(t)$ podem diferir apreciavelmente nas pequenas amplitudes. Este fato é bem evidenciado ao usar diferentes realizações da seqüência (pseudo-) aleatória de amostras do ruído Gaussiano. – compare o gráfico desta página com o da seguinte.



Repetição, utilizando uma **outra** seqüência aleatória de **500.000** pontos independentes de distribuição Gaussiana, da qual é mostrada também a parte da função de autocorrelação correspondente a pequenos deslocamentos das seqüências x de entrada.

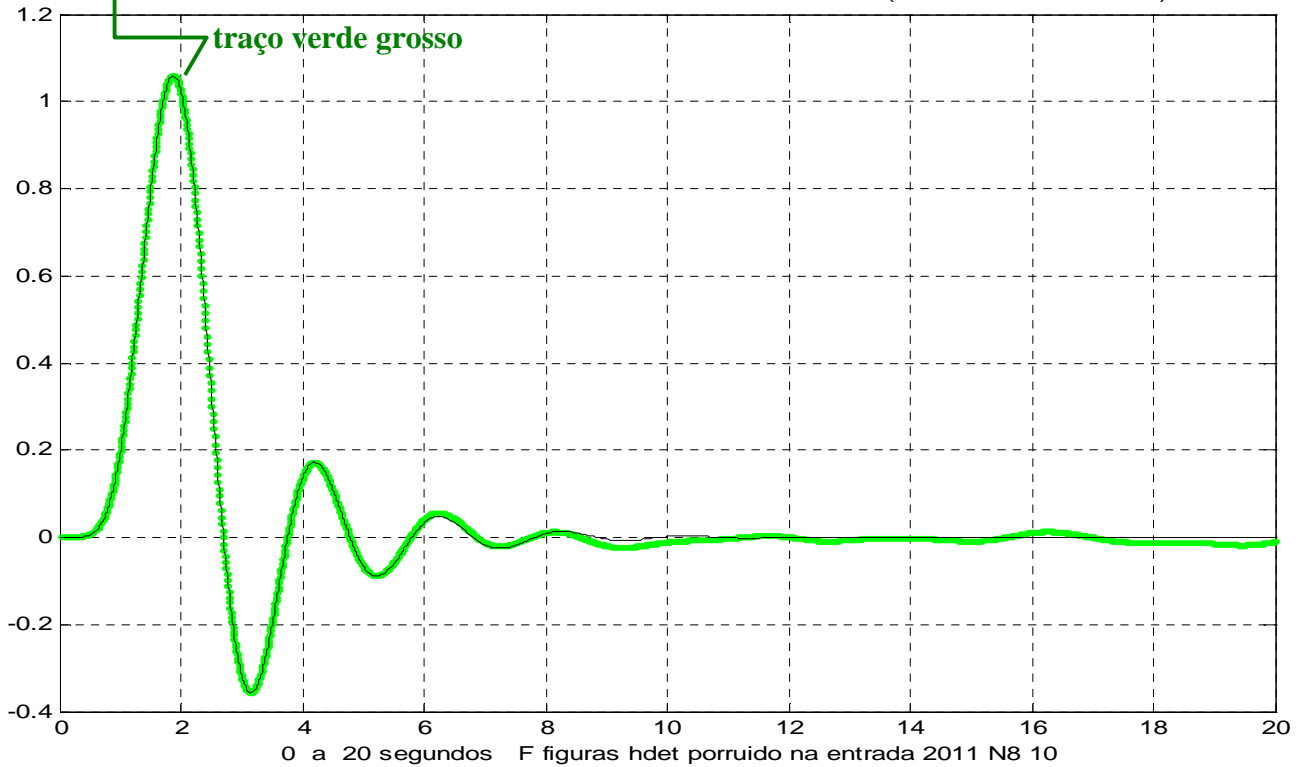




Por sugestão do Prof. Bacalá, foi tomada a média das estimativas obtidas com seqüências aleatórias mais curtas:

média de 10 respostas impulsivas, obtidas com entradas aleatórias de comprimento 10^5 :

3: h real e h determinado com entrada Gaussiana 100.000 -- (média de 10 destes)



média de 20 respostas impulsivas, obtidas com entradas aleatórias de comprimento 10^5 :

3: h real e h determinado com entrada Gaussiana 100.000 -- (média de 20 destes)





Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

EXERCÍCIOS ADICIONAIS — (sugestões de questões para prova)

1. Considere o par transformado já visto

$$x(t) \equiv \text{sgn}(t) \quad \leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

Confirme esse resultado diferenciando no tempo:

$$\frac{d x}{d t} = \dots \quad \leftrightarrow \quad \dots = \dots ?$$

Complete o par transformado

$$y(t) \equiv x(t) \times x(t) = \dots \quad \leftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{j\pi f} * \frac{1}{j\pi f}$$

Conclua qual o resultado da convolução: $\frac{1}{j2\pi f} * \frac{1}{j2\pi f} = \dots$

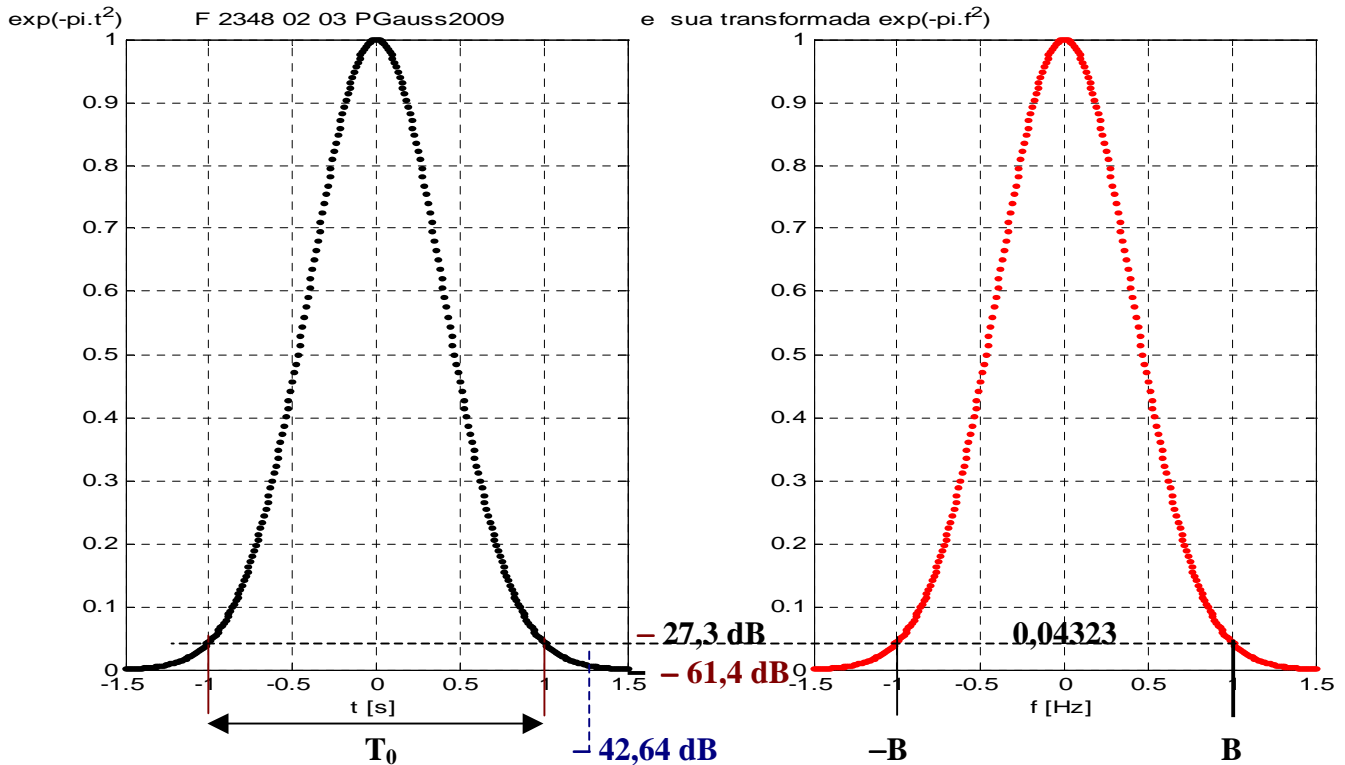
2. Considere as transformadas do degrau unitário e do seu quadrado. Efetue a convolução em frequência e **verifique o resultado.**:

$$g(t) \equiv u(t) \quad \leftrightarrow \quad G(f) = \dots$$

$$u(t) \times u(t) = \dots \quad \leftrightarrow \quad G(f) * G(f) = \dots$$
$$= \dots$$



Sobre a “largura” do pulso Gaussiano e a banda ocupada; considerando tanto a largura como a banda ocupada como sendo aquela em que a magnitude cai para um mesmo valor.



Na Figura está ilustrada a relação entre T_0 e B para uma atenuação de 27,3 dB. A Tabela seguinte mostra valores para outras atenuações.
 atenuação (dB)

t ou f (normalizado)	amplitude	atenuação (dB)	produto $T_0 \times 2B$	duração $T_0 = (1/B) \times$
1	0,04323	27,29	4 = 2 ²	2
1,2107	0,0100	40	5,863	2,932 \cong 3
1,25	0,00738	42,64	6,25 = 2,5 ²	3,125
1,4142	0,00187	54,58 \cong 55	8	4
1,5	0,00085	61,4	9 = 3 ²	4,5
1,581	0,00039	68,22	10	5
1,75	0,000067	83,5	12,25 = 3,5 ²	6,125

As Figuras seguintes comprovam o fato que a filtragem de um pulso por um filtro ideal que mantenha a “banda essencial” desse pulso conserva “essencialmente” o pulso, isto é, comporta-se como um filtro passa-tudo.

Nos exemplos foram experimentadas, sucessivamente, como “bandas essenciais” aquelas que eliminam as componentes espectrais abaixo de: -27,3 dB, -42,6 dB, -61,4 dB e -83,5 dB. Este último é, de fato, muito adequado: a diferença entre os pulsos na entrada e na saída do filtro são menores do que -98 dB do pico. Vale notar que, considerando os espectros, essa conclusão não surpreende. Entretanto, as formas de onda no tempo podem ser inesperadas: um sinc com apenas 12 cruzamentos de zero no suporte do pulso se comporta como um impulso (!) – ver página 28. Este fato deve-se à rapidez com que caem as amplitudes do pulso gaussiano e seu espectro.

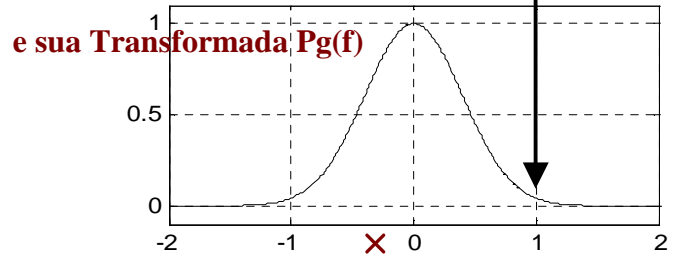
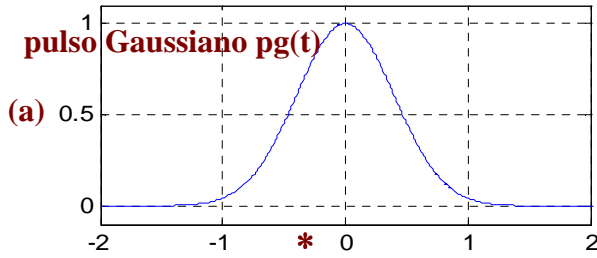
O mesmo efeito é também observado com pulsos cujos espectros caem muito mais lentamente, mas neste caso o sinc adequado se “parece” mais com um impulso.



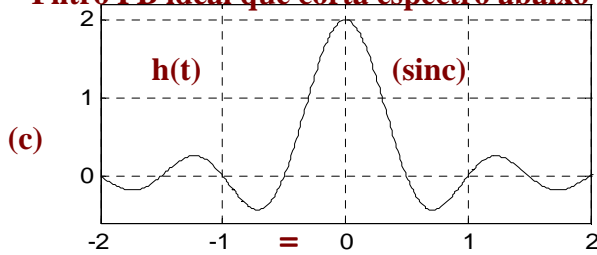
Filtro que elimina componentes espectrais do pulso gaussiano abaixo de $-27,3$ dB muito bom daqui em diante
 abaixo de $-27,3$ dB

1. pulso gaussiano filtrado $-27,3$ dB

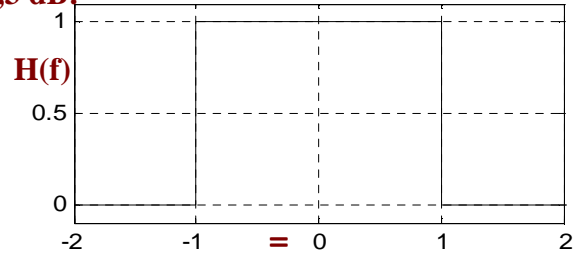
F 2348 02 031 PGauss2012



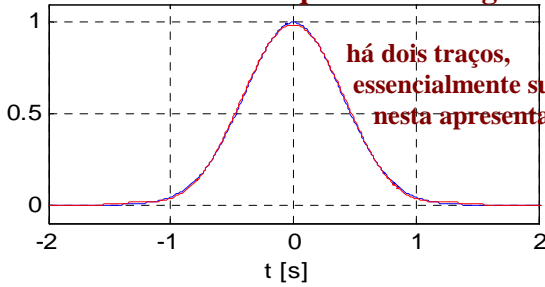
Filtro PB ideal que corta espectro abaixo de $-27,3$ dB:



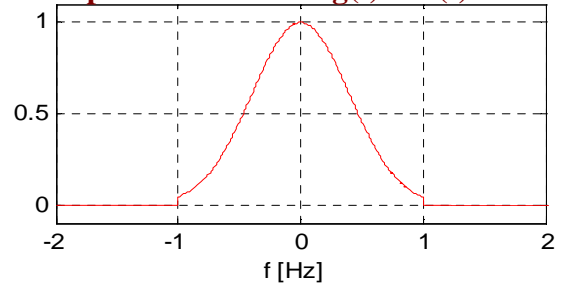
\leftrightarrow



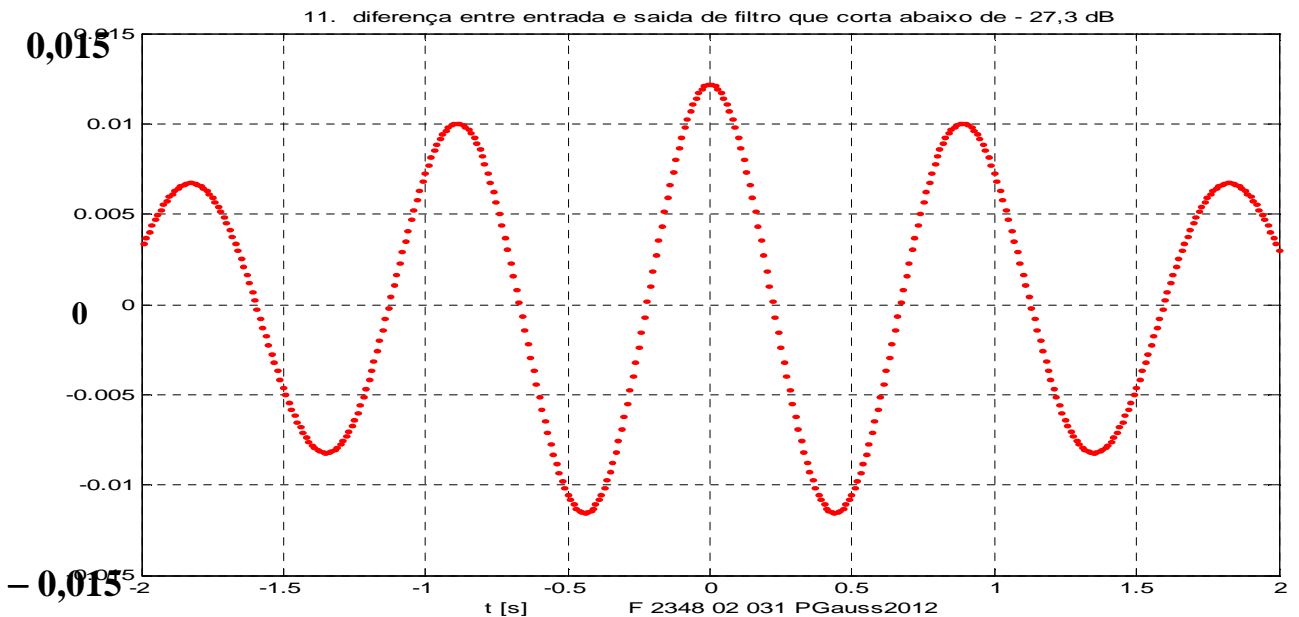
entrada e saída do filtro quase indistinguíveis:



espectro da saída: $Pg(f) \times H(f)$



A diferença entre a entrada e a saída do filtro é mostrada em escala expandida:



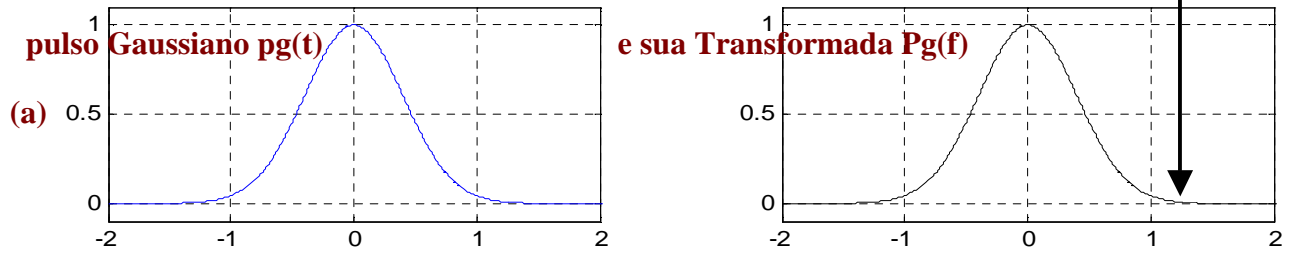
Em conclusão, o **sinc** indicado em (c) comporta-se, para o pulso gaussiano de (a), **aproximadamente** como um impulso unitário.



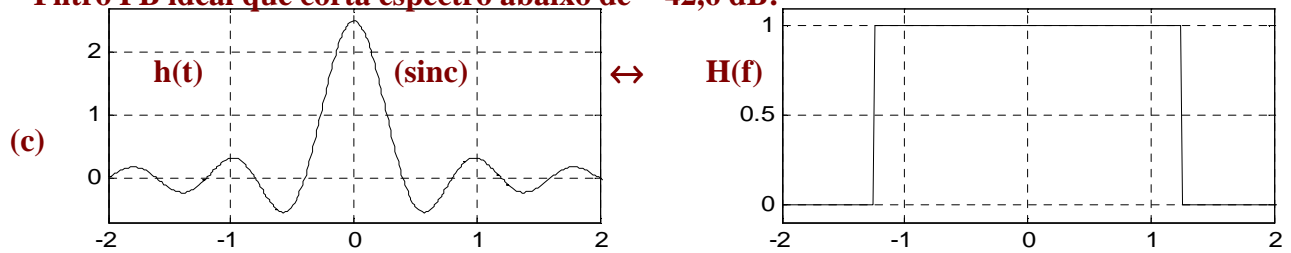
Filtro que elimina componentes espectrais do pulso gaussiano abaixo de $-42,6$ dB

2.pulso gaussiano filtrado - 42,6 dB

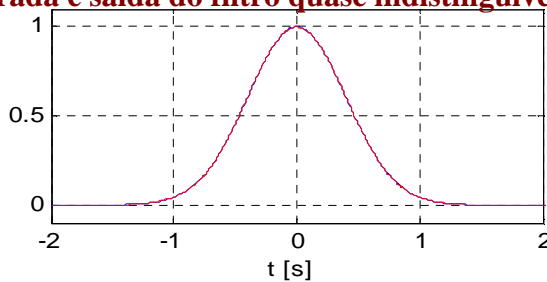
F 2348 02 032 PGauss2012



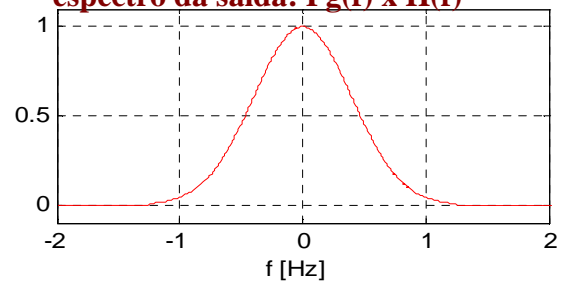
Filtro PB ideal que corta espectro abaixo de $-42,6$ dB:



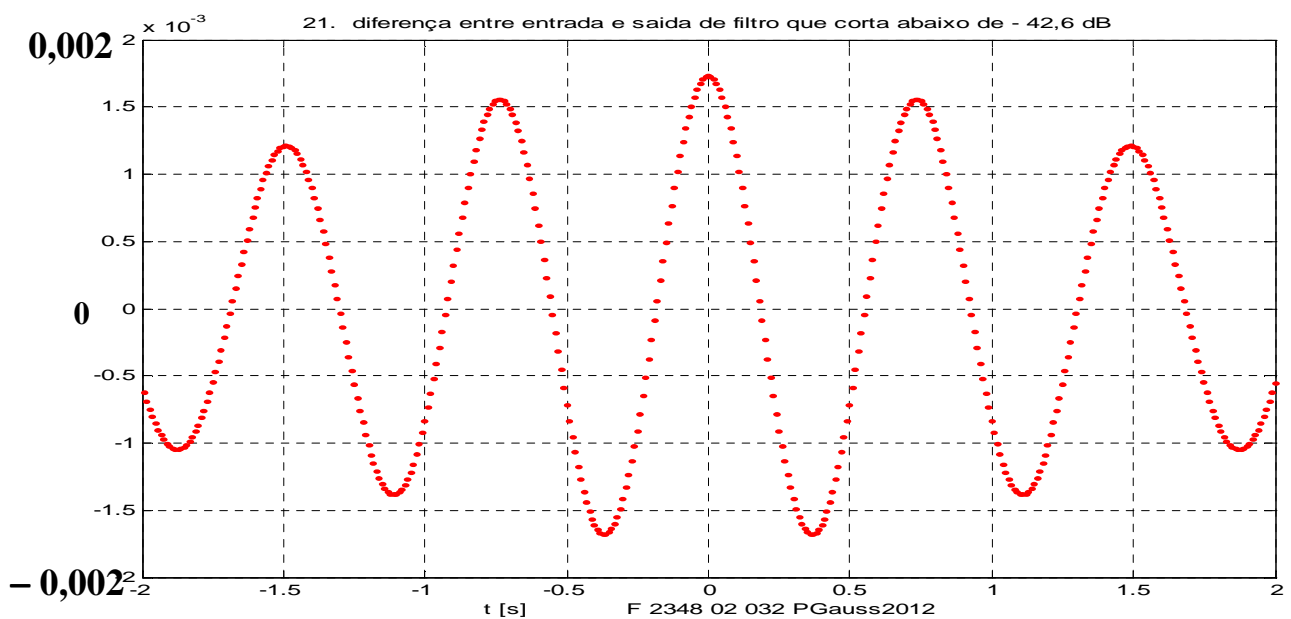
entrada e saída do filtro quase indistinguíveis:



espectro da saída: $Pg(f) \times H(f)$



A diferença entre a entrada e a saída do filtro é mostrada em escala mais expandida:



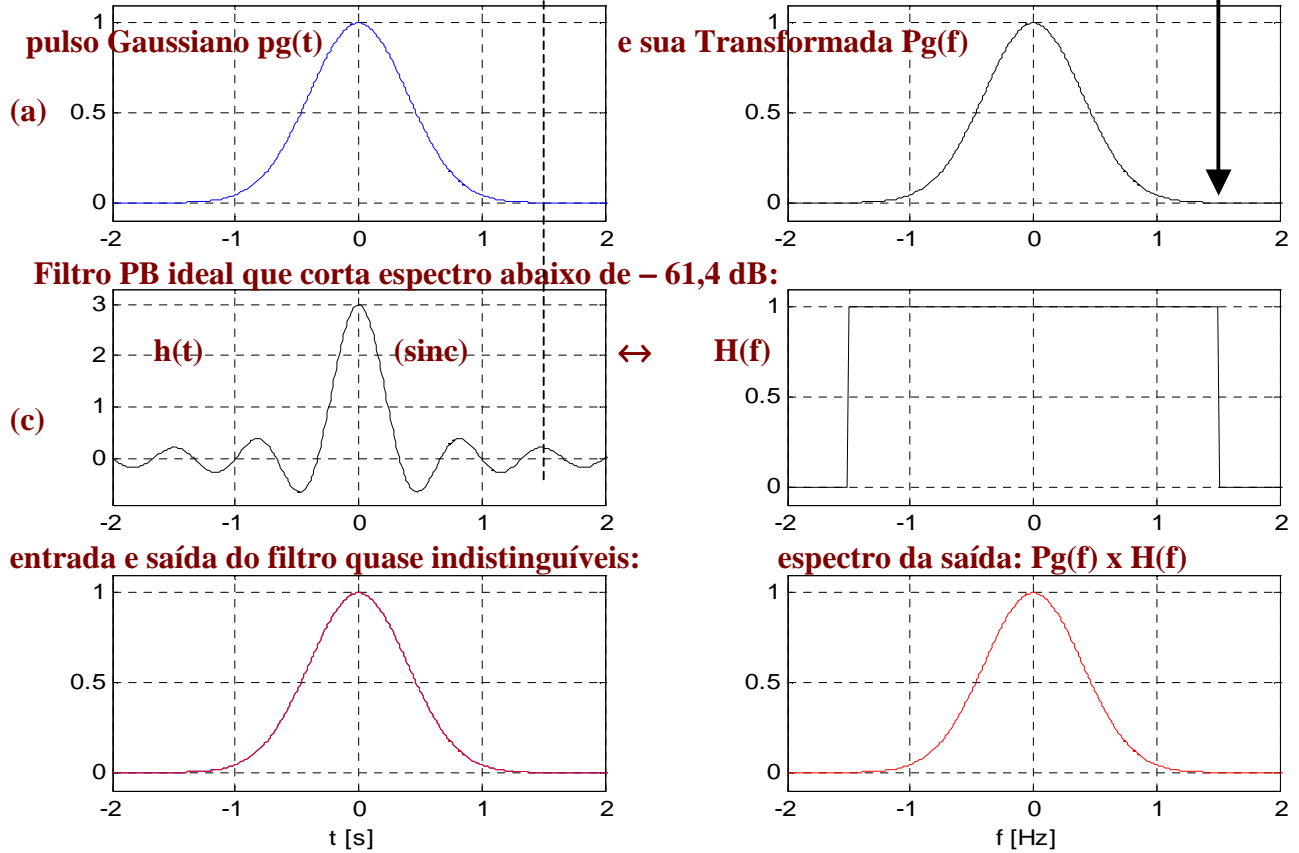
O **sinc** indicado em (c) comporta-se, para o pulso gaussiano de (a), *mais aproximadamente* como um impulso unitário.



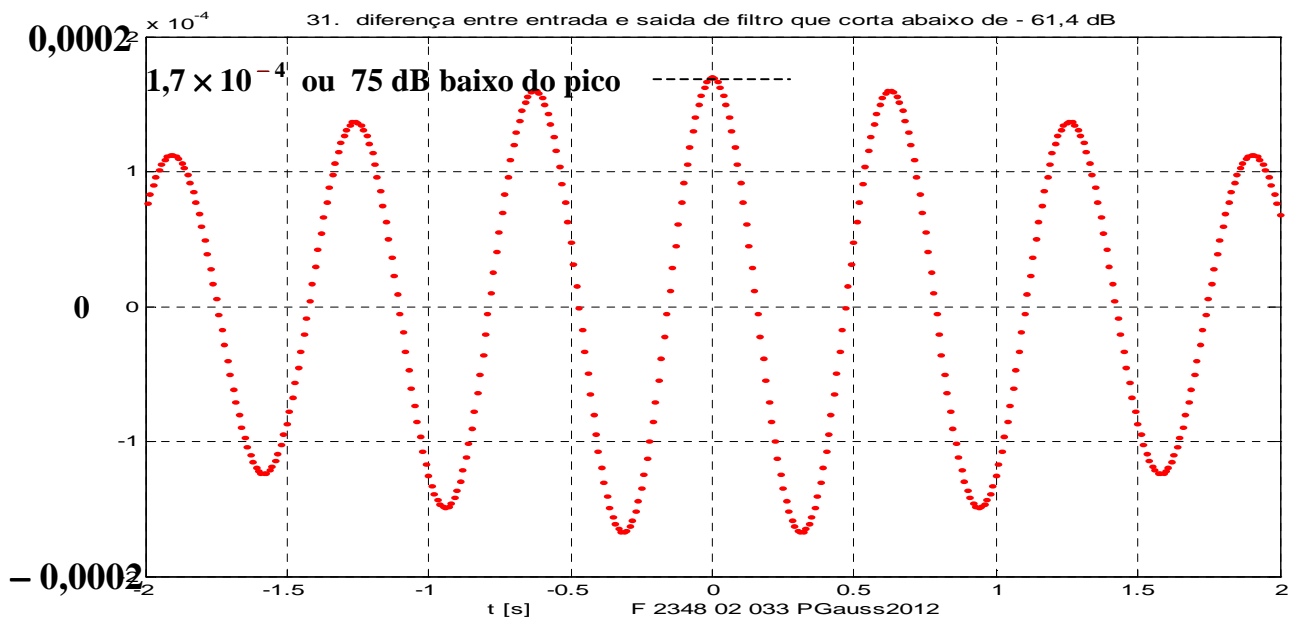
Aumentando mais a largura do FPB ideal, que agora elimina apenas as componentes espectrais abaixo de $-61,4$ dB:

3. pulso gaussiano filtrado - 61,4 dB

F 2348 02 033 PGauss2012



A diferença entre a entrada e a saída do filtro é mostrada em escala muito mais expandida para enfatizar a grande semelhança entre elas:



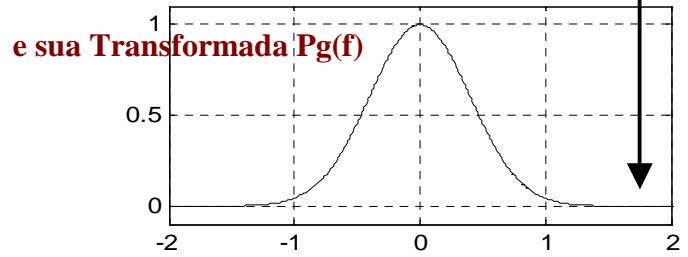
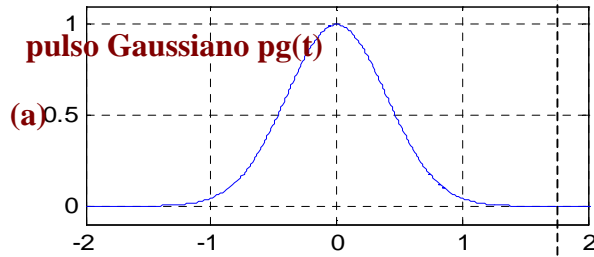
O sinc indicado em (c) comporta-se, para a convolução com o pulso gaussiano de (a), muito aproximadamente como um impulso unitário.



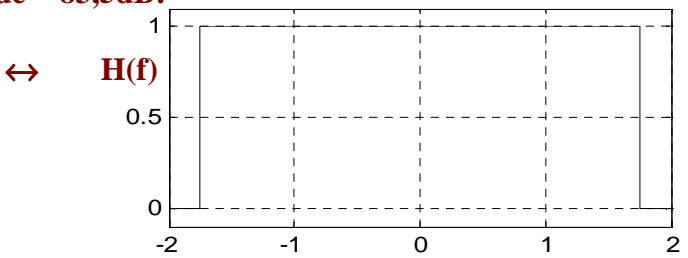
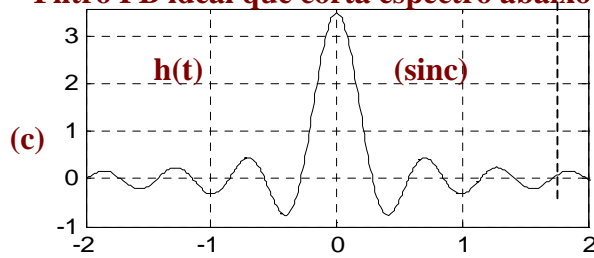
Finalmente, filtrando o pulso gaussiano com um FPB ideal que elimina as componentes espectrais abaixo de $-83,5\text{dB}$:

3. pulso gaussiano filtrado - 83,5 dB

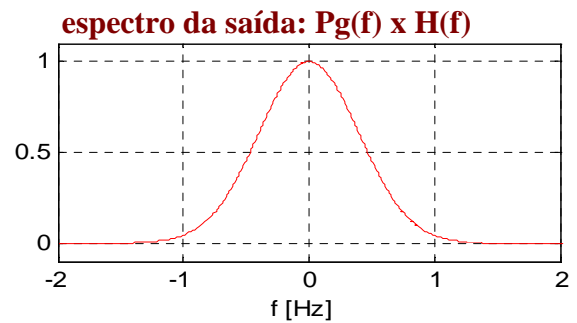
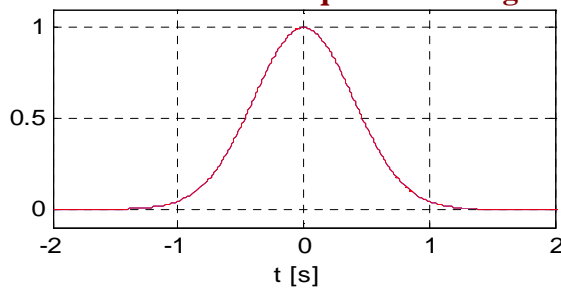
F 2348 02 038 PGauss2012



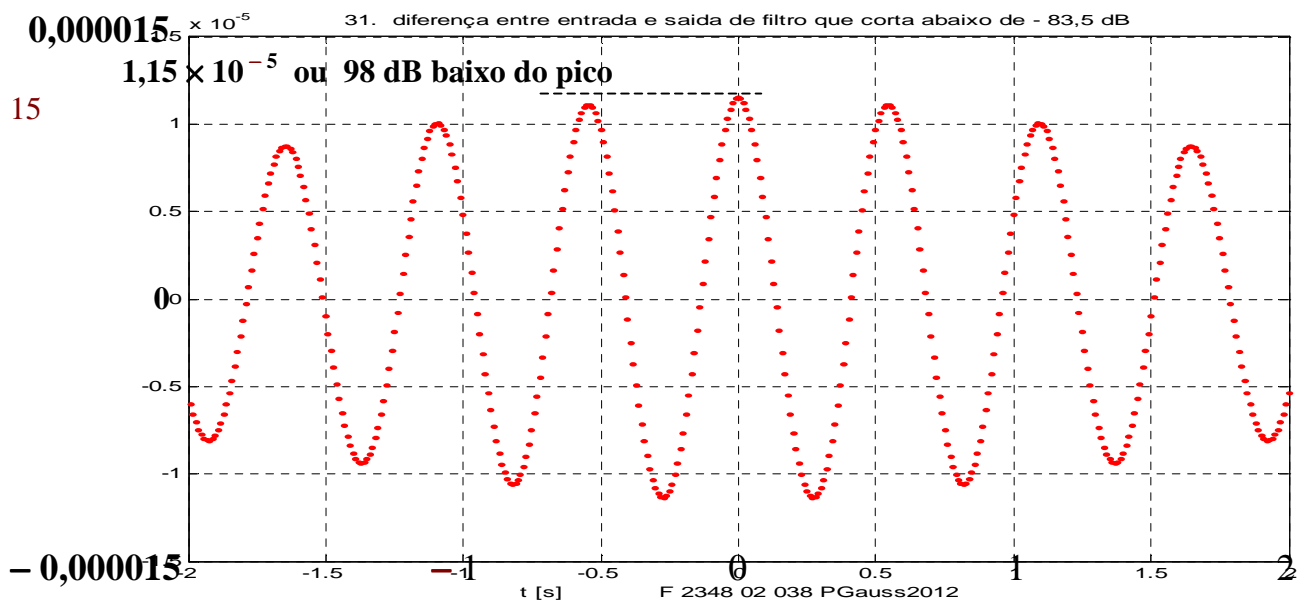
Filtro PB ideal que corta espectro abaixo de $-83,5\text{dB}$:



entrada e saída do filtro quase indistinguíveis:



A diferença entre a entrada e a saída do filtro é mostrada abaixo, em escala muitíssimo mais expandida para enfatizar a enorme semelhança entre elas:

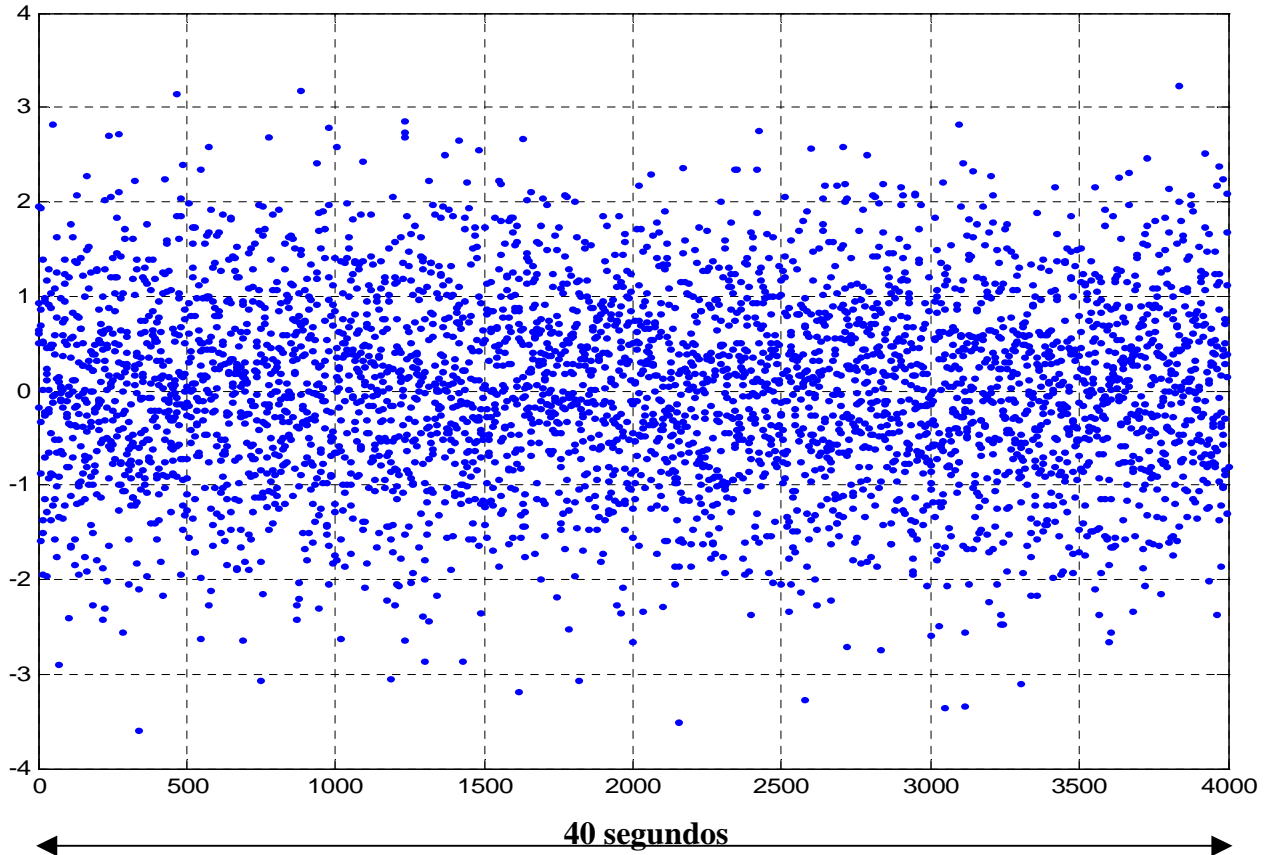


Conclusão: O sinc mostrado em (c) comporta-se, para a convolução com o pulso gaussiano de (a), muito aproximadamente como um impulso unitário.

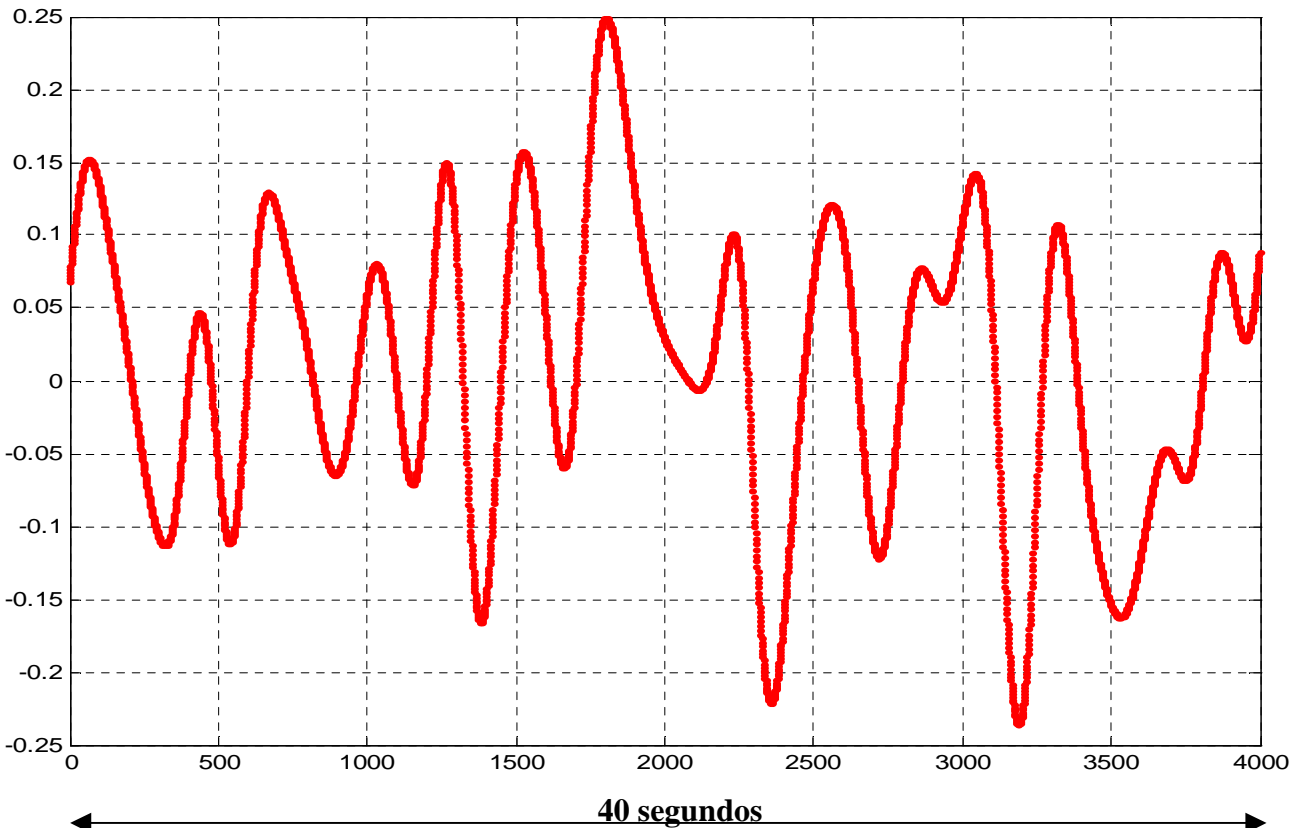


Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

Adendo interessante, referente ao procedimento para encontrar $h(t)$ com uso de seqüências aleatórias: aqui x é uma seqüência de 500.000 amostras independentes de ruído gaussiano de rms = 1
4.000 valores de x , espaçados de 0,01 segundo: de F figuras hdet porruido na entrada 2012

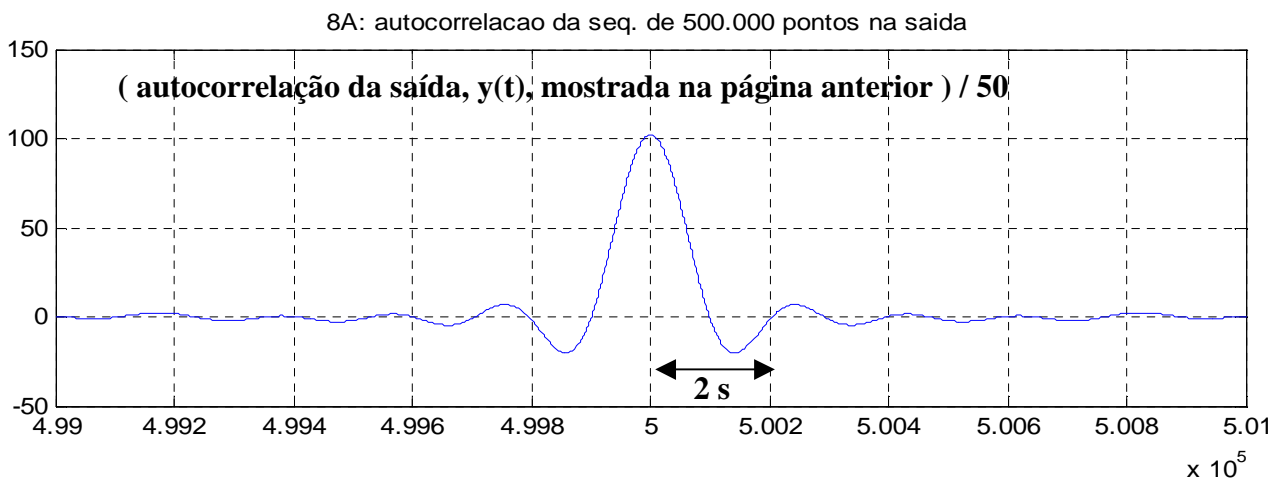
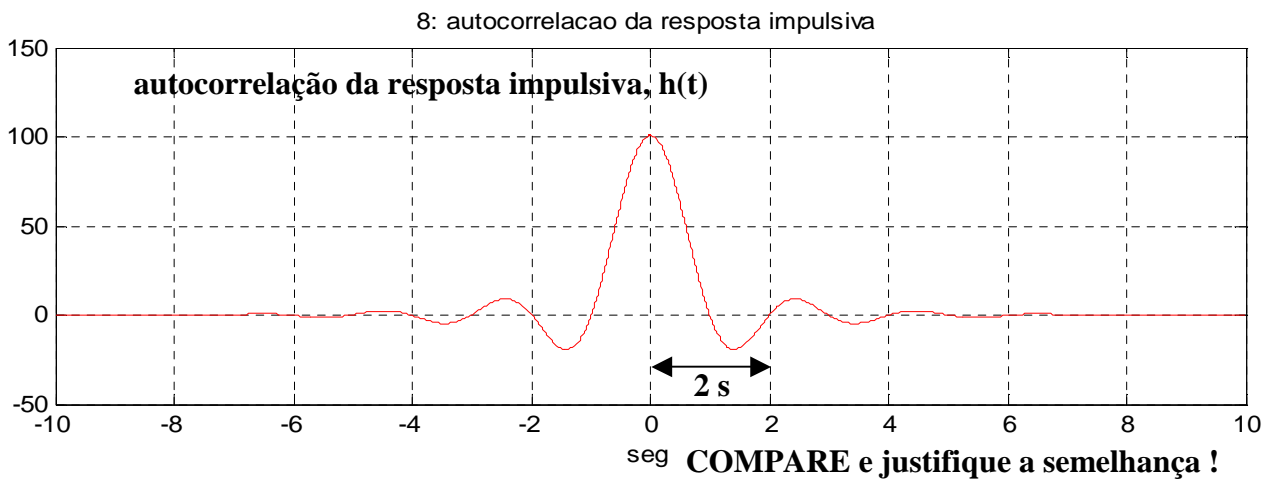
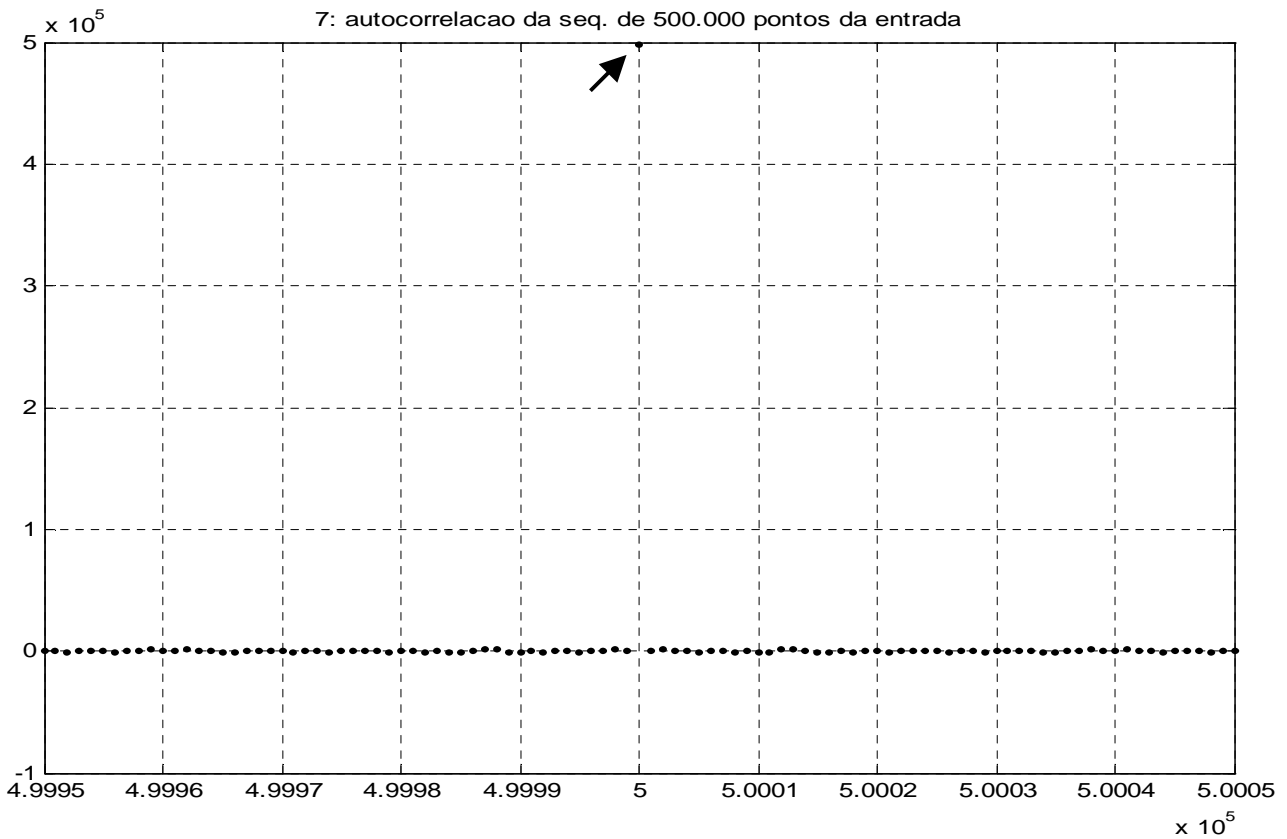


4.000 valores da saída $y = x * h$: h é a resposta impulsiva do mesmo Butterworth



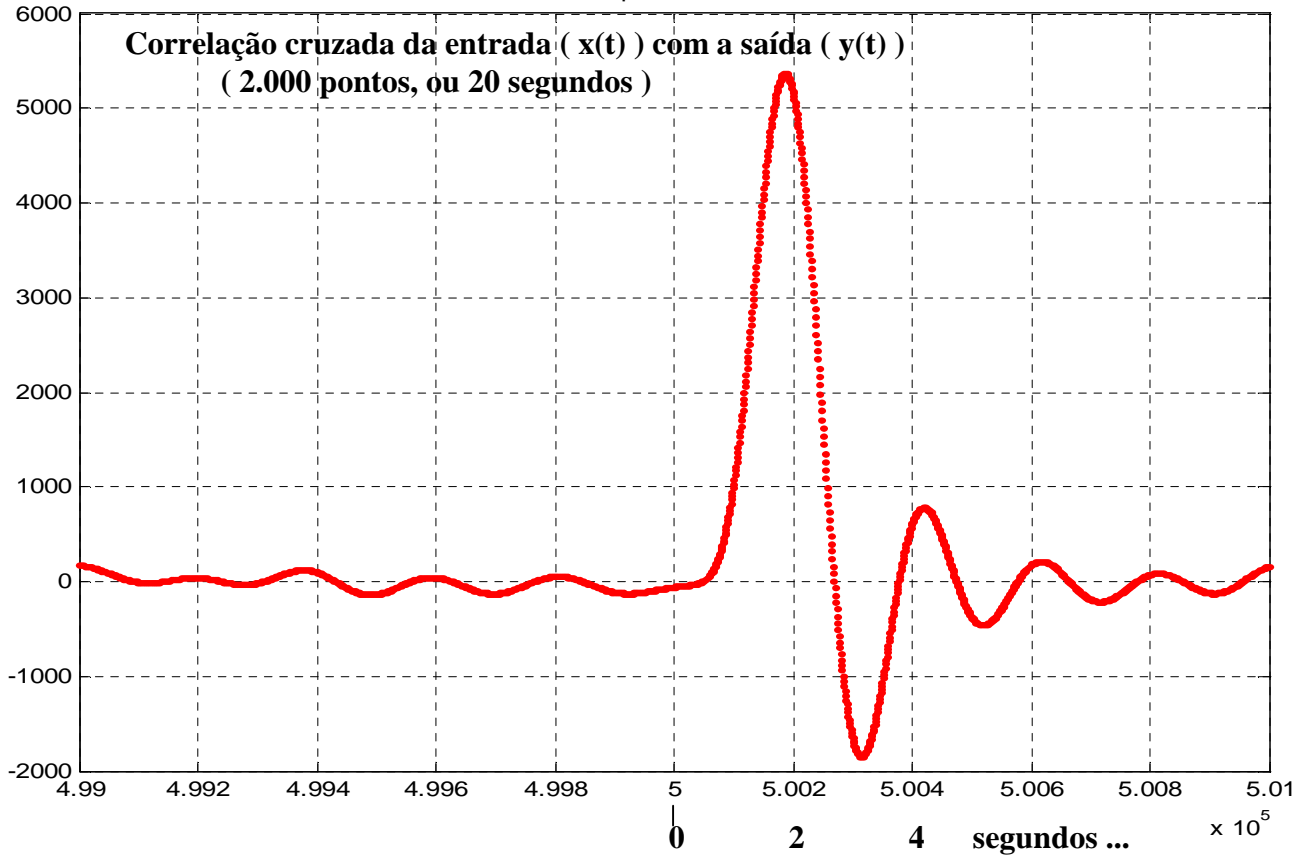


Autocorrelação do sinal x (entrada): aqui mostrados 100 pontos (1 segundo)





9: correlacao da seq. de entrada com a da saida



6: h real e h determinado com entrada Gaussiana 500.000 -- (MUITO BOM)





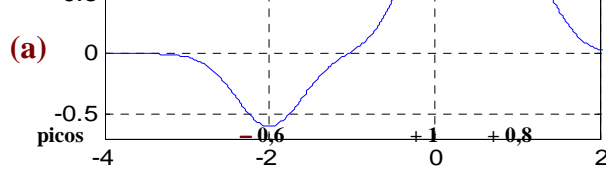
Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

Filtrando uma soma de 3 pulsos gaussianos com um FPB ideal que elimina as componentes espectrais abaixo de $-61,4$ dB:

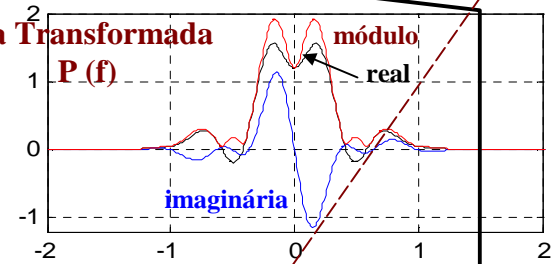
3. pulso gaussiano filtrado - 61,4 dB

F 2348 02 036 PGauss2012

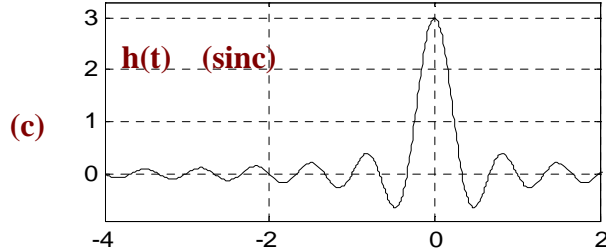
soma de 3 pulsos Gaussianos de mesma largura, $p(t)$



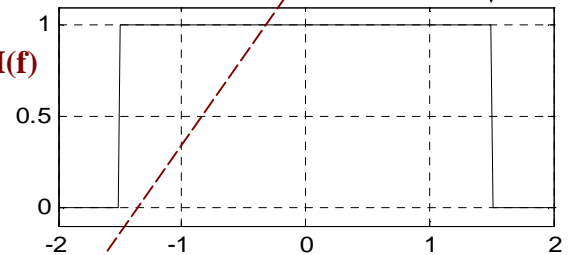
e sua Transformada $P(f)$



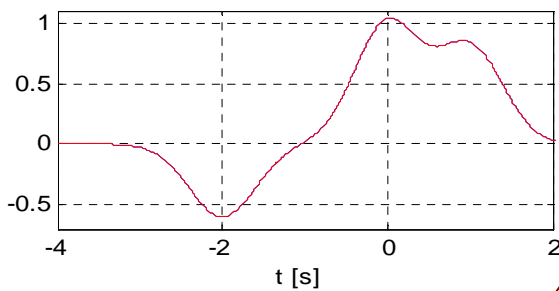
Filtro PB ideal que corta espectro abaixo de $-61,4$ dB:



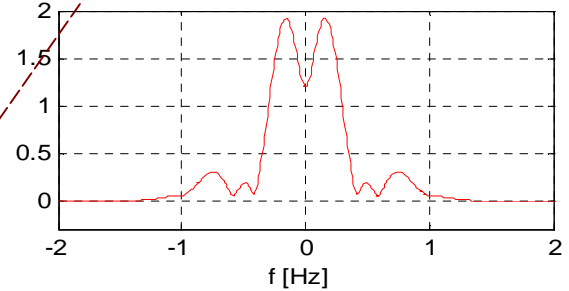
$H(f)$



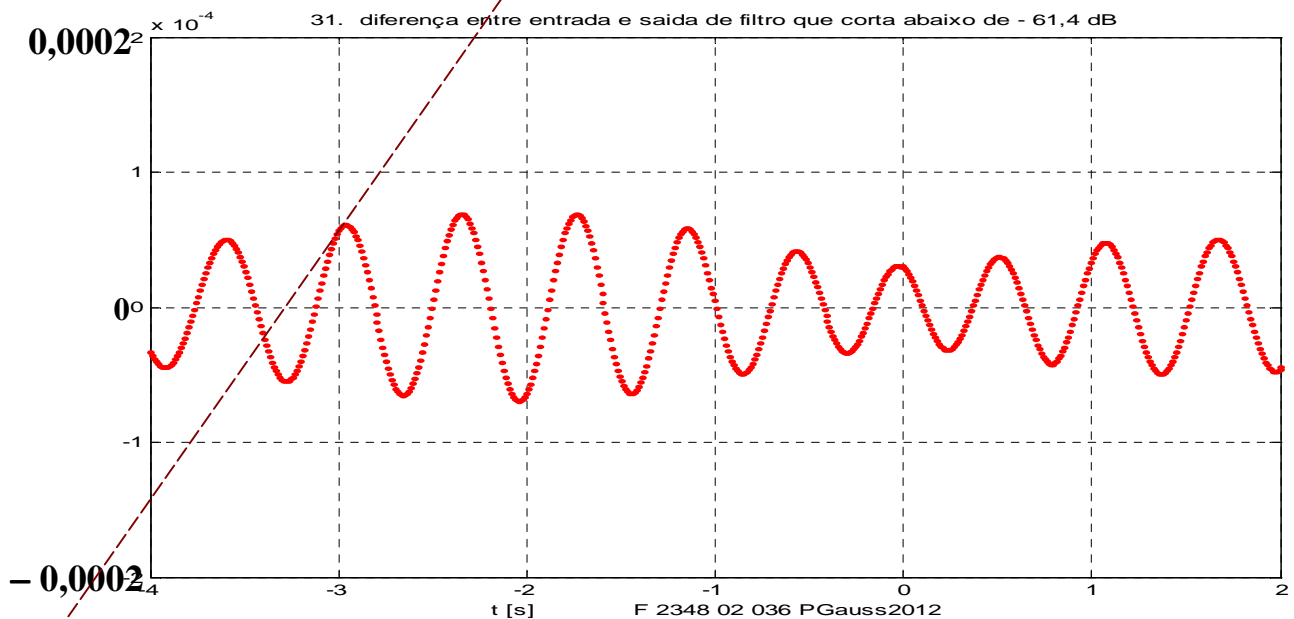
entrada e saída do filtro quase indistinguíveis:



espectro da saída: $P(f) \times H(f)$



A diferença entre a entrada e a saída do filtro é mostrada em escala muito mais expandida para enfatizar a grande semelhança entre elas:



O sinc indicado em (c) comporta-se, para a soma de pulsos gaussianos de (a), muito aproximadamente como um impulso unitário.



Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

O que se segue já foi substituído por versão mais didática, nas páginas anteriores.

Na página seguinte são apresentados gráficos :

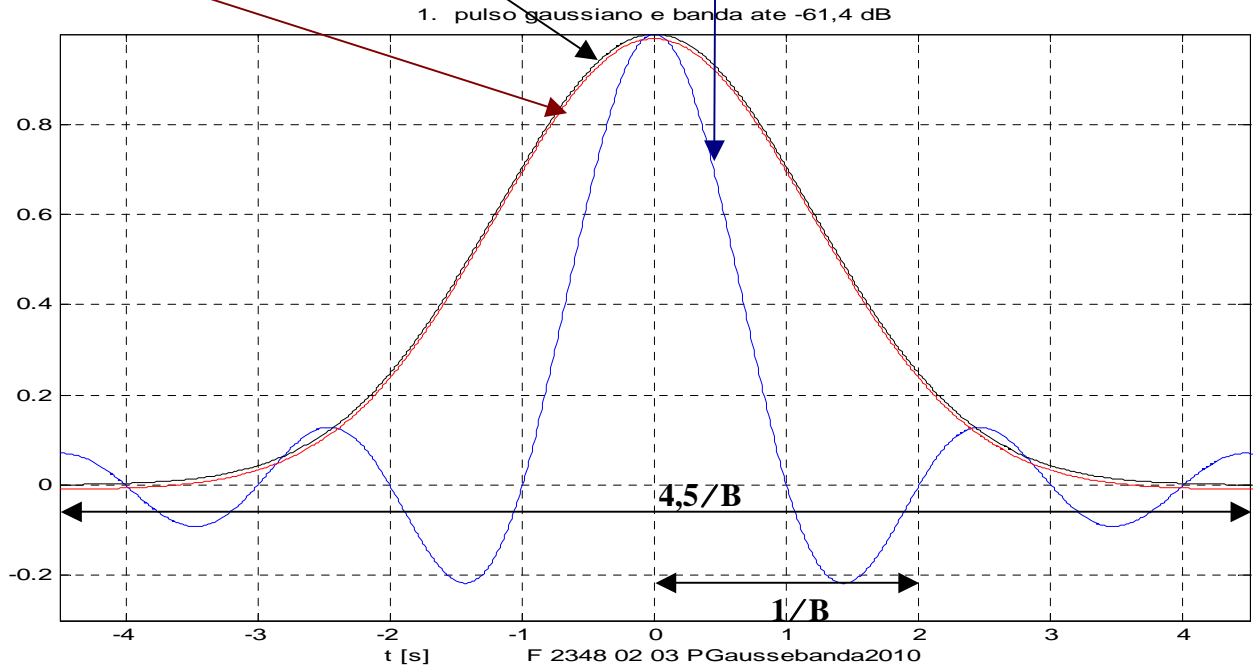
1. Do sinc de banda B, isto é, $\text{sinc}(t)$ (com $B=0,5$)
Do pulso gaussiano que cabe nessa banda (dentro da atenuação de **61,4 dB**): $t_g=t/3$ e
A convolução do pulso com esse sinc – esses dois últimos são indiscerníveis.
2. Do mesmo sinc de banda B, isto é, $\text{sinc}(t)$ (com $B=0,5$)
Do pulso gaussiano que cabe nessa banda (dentro da atenuação de **42,64 dB**): $t_g=t/2,5$ e
A convolução do pulso com esse sinc – esses dois últimos são também muito próximos.



$h = \text{sinc}$ de banda $B=0,5$ Hz, isto é, $\text{sinc}(t)$

$pg =$ pulso gaussiano que cabe nessa banda até atenuação de **61,4 dB**

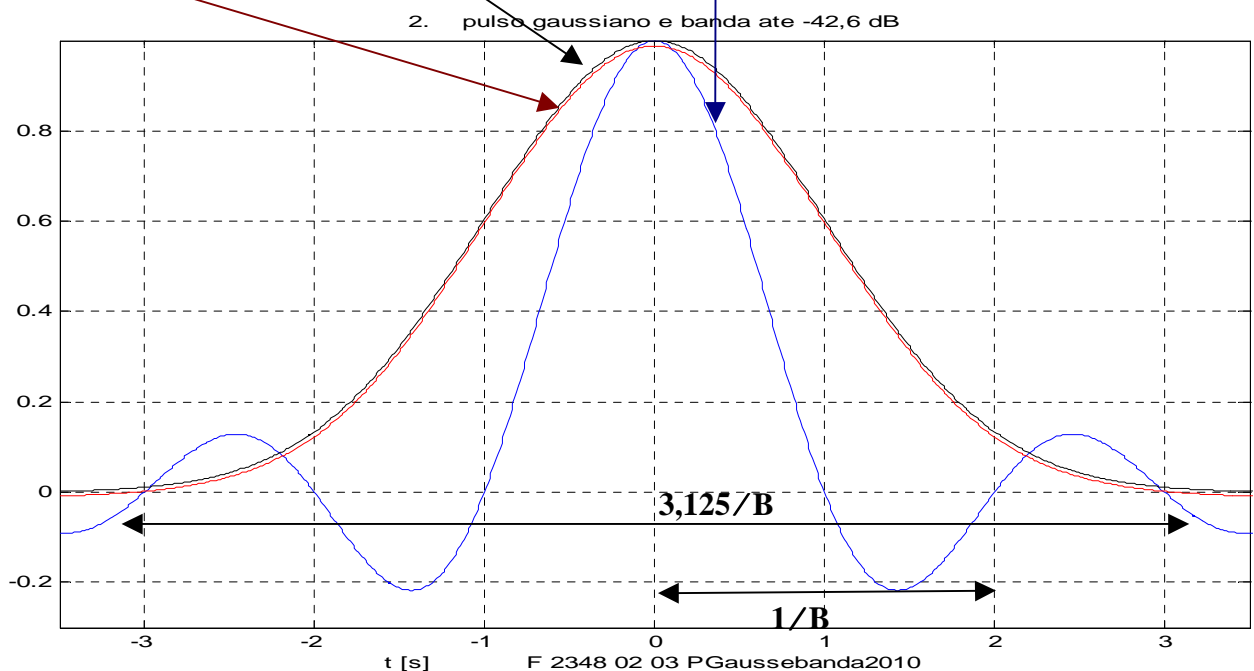
$z = h * pg$ aqui deslocado de $-0,01$ para melhor evidenciar grande semelhança com pg
($\therefore z$ essencialmente $\equiv pg$)



$h = \text{sinc}$ de banda $B=0,5$ Hz, isto é, $\text{sinc}(t)$

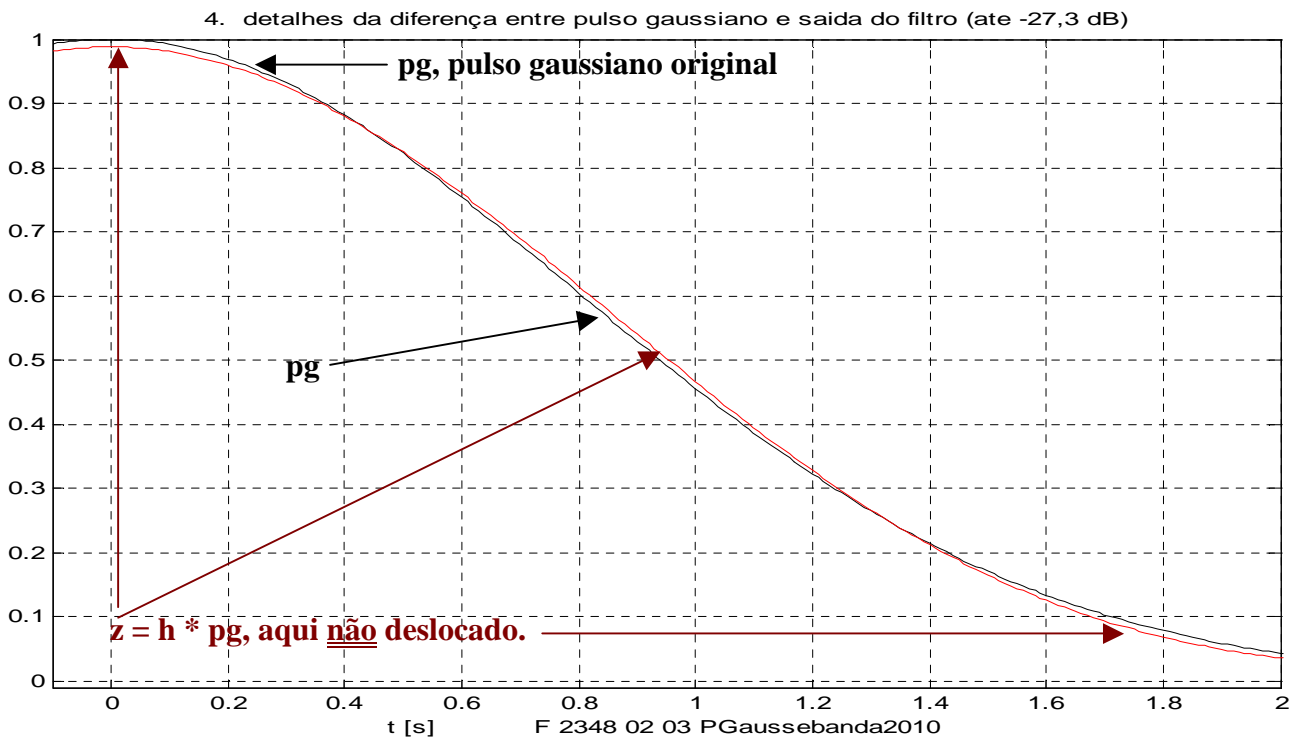
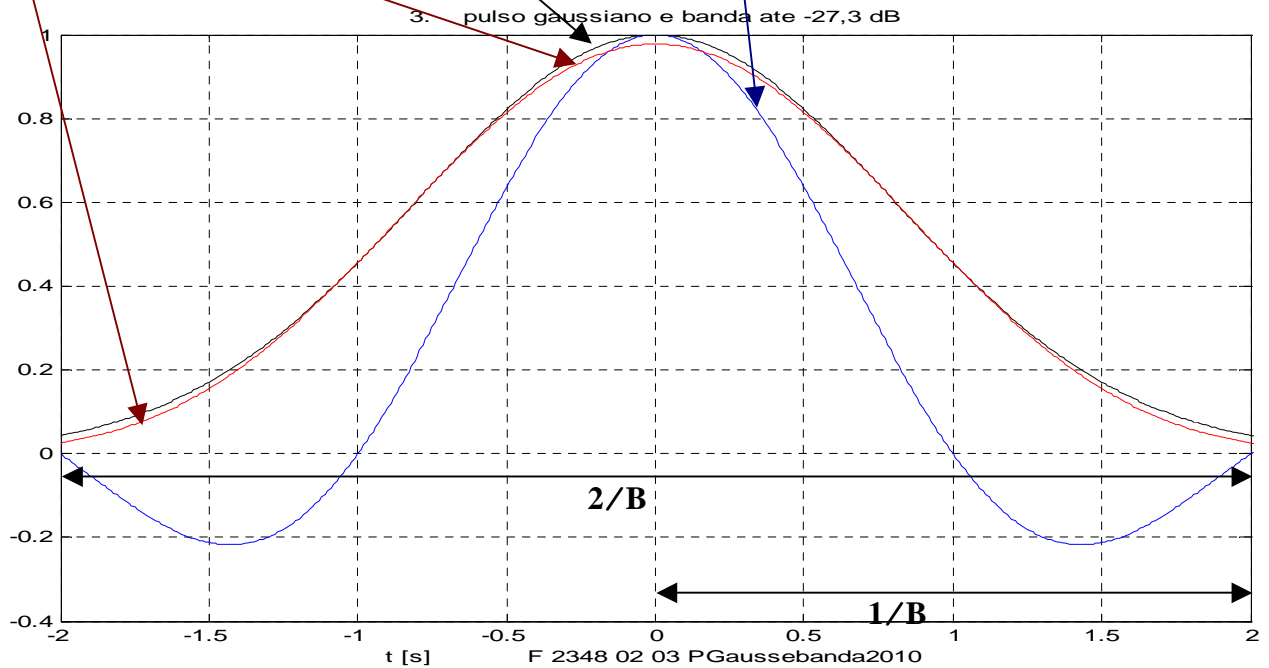
$pg =$ pulso gaussiano que cabe nessa banda até atenuação de **42,6 dB**

$z = h * pg$ aqui deslocado de $-0,01$ para melhor evidenciar grande semelhança com pg
($\therefore z$ ainda essencialmente $\equiv pg$)





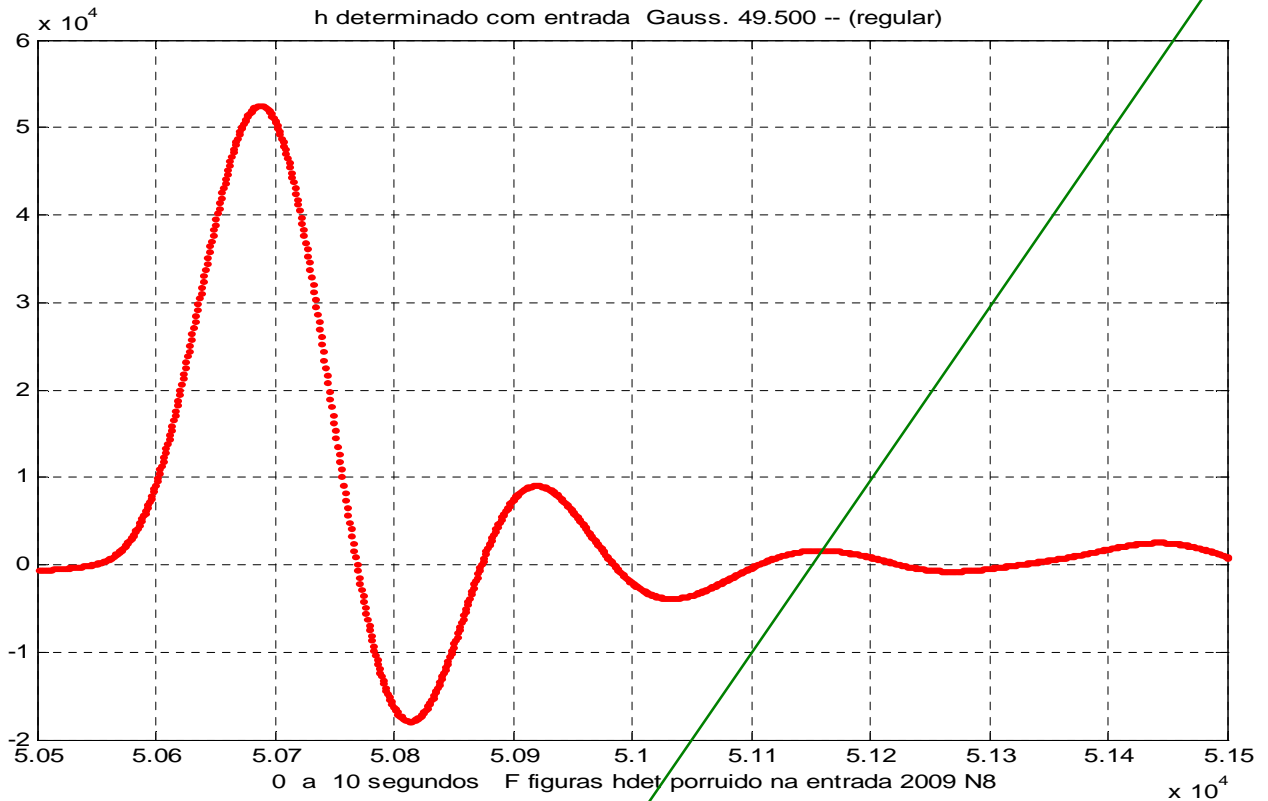
$h = \text{sinc}$ de banda $B=0,5$ Hz, isto é, $\text{sinc}(t)$
 $pg =$ pulso gaussiano que cabe nessa banda até atenuação de **27,3 dB**
 $z = h * pg$ aqui deslocado de $-0,01$ para melhor ilustrar diferenças com pg
(neste caso já se notam diferenças entre z e o pulso original, pg)
– ver mais detalhes na figura abaixo –



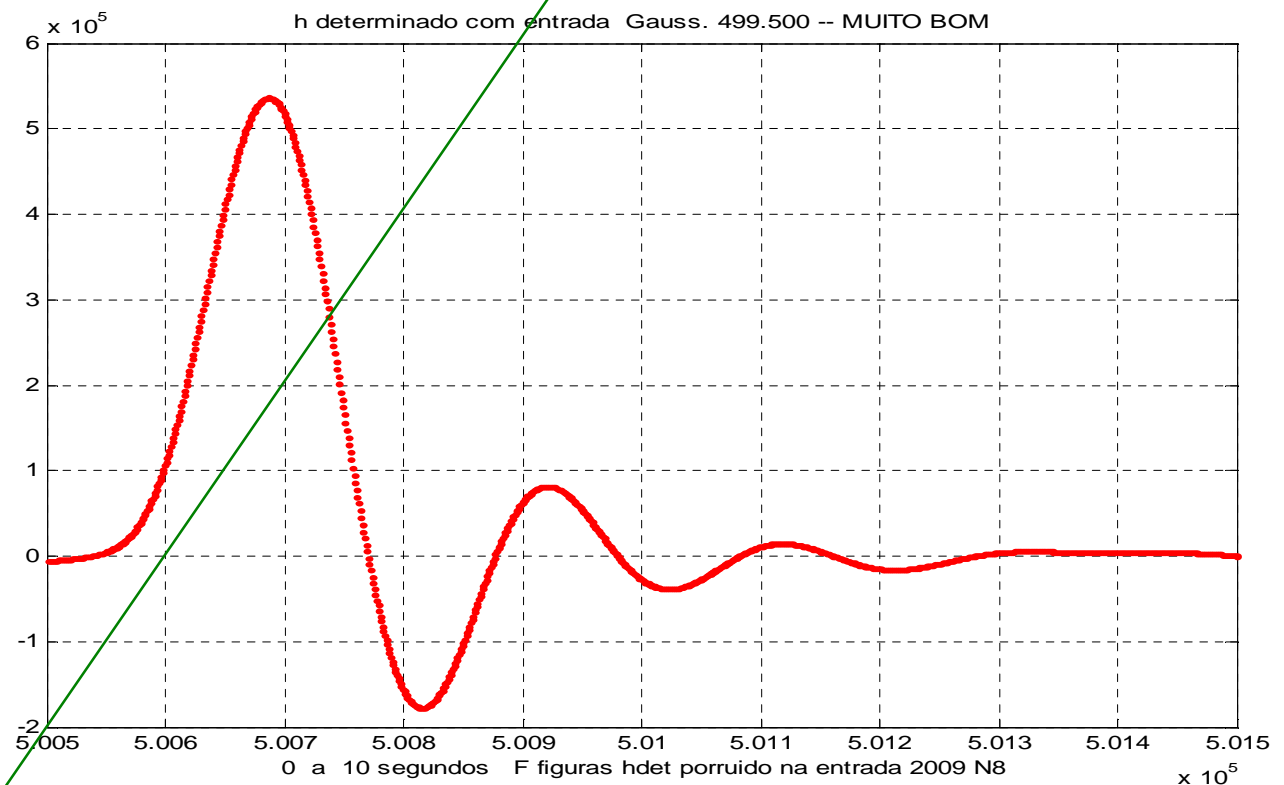
A conclusão é que uma banda B acomoda bem um pulso gaussiano de largura $\geq 3 (1/B)$.
(ver Figura correspondente a atenuação 42 dB)



Resposta impulsiva determinada pelo método descrito, usando entrada constituída de 49.500 amostras independentes de ruído Gaussiano com desvio padrão = 1 V, potência média 1 V^2 , banda 50 Hz, e portanto $\eta/2 = 0,01 \text{ V}^2/\text{Hz}$.



Resposta impulsiva determinada pelo método descrito, usando agora entrada constituída de 499.500 amostras independentes de ruído Gaussiano com desvio padrão = 1.



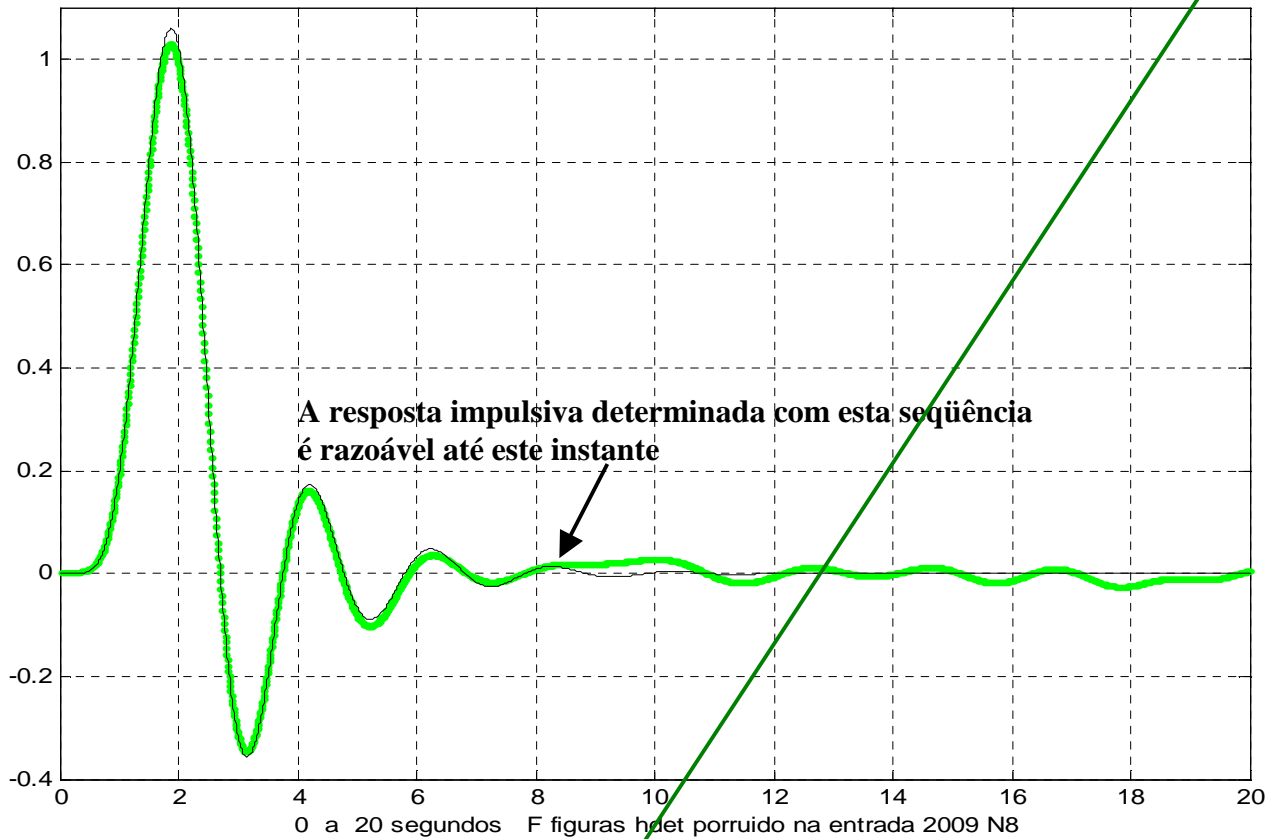


Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

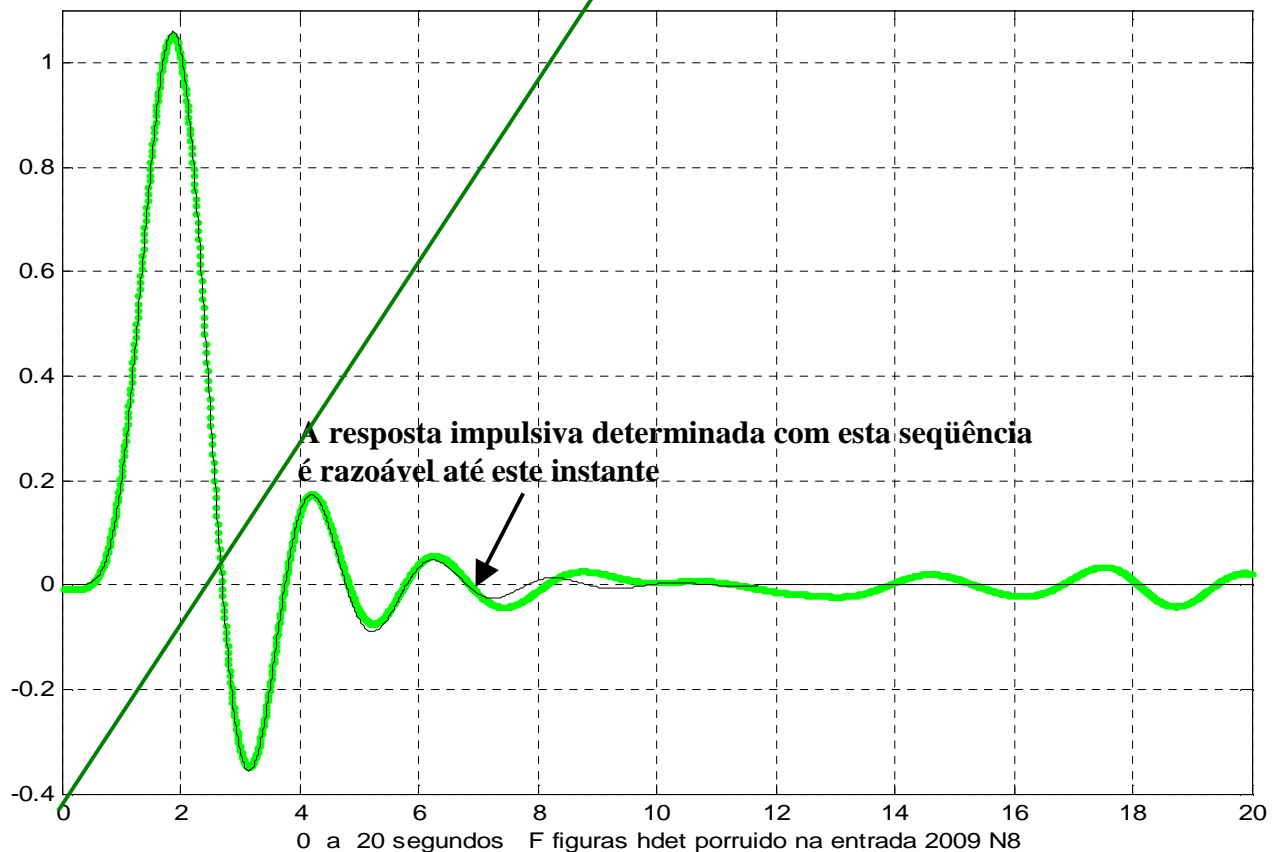
Os exemplos seguintes foram executados tomando a resposta impulsiva entre 0 e 20 segundos, e duas diferentes realizações das seqüências aleatórias, ambas com comprimento 498.500. Observe que as estimativas de $h(t)$ podem diferir nas pequenas amplitudes.

Talvez não incluir...

h real e h determinado com entrada Gaussiana 498.500 -- (MUITO BOM)

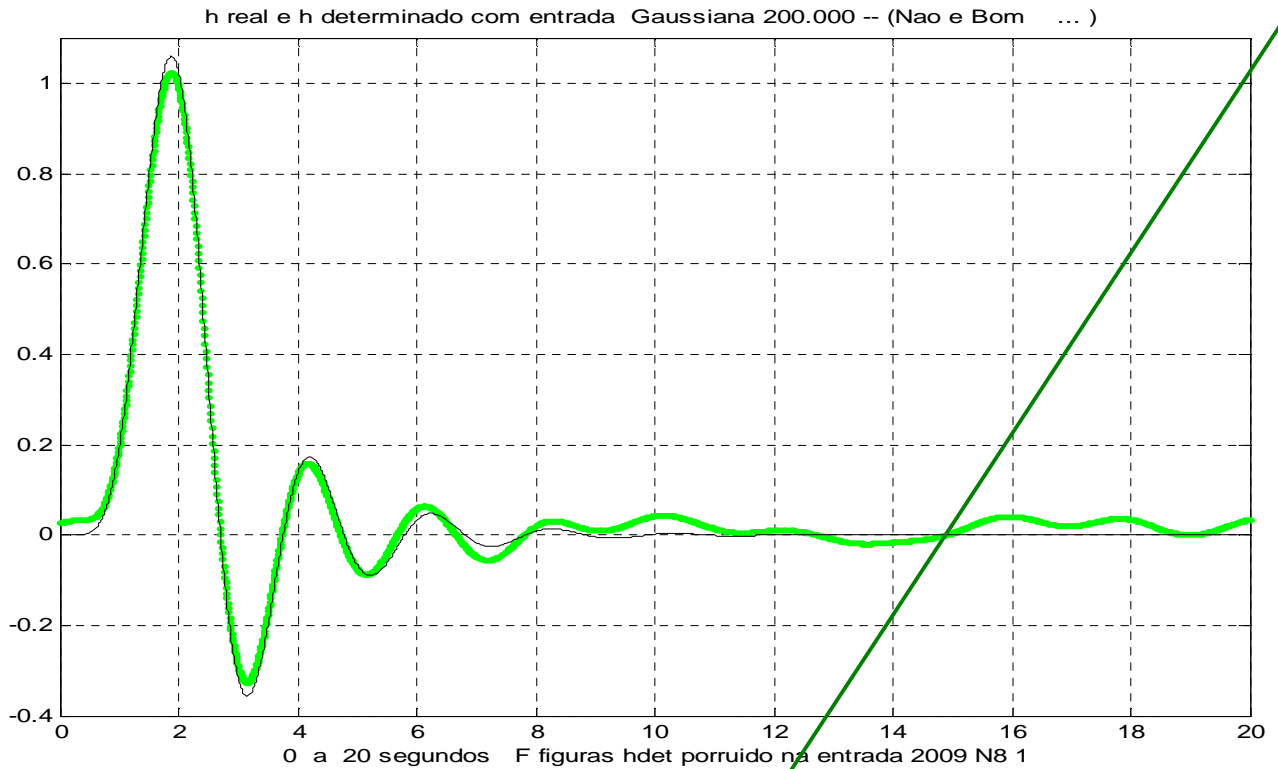


h real e h determinado com entrada Gaussiana 498.500 -- (MUITO BOM)

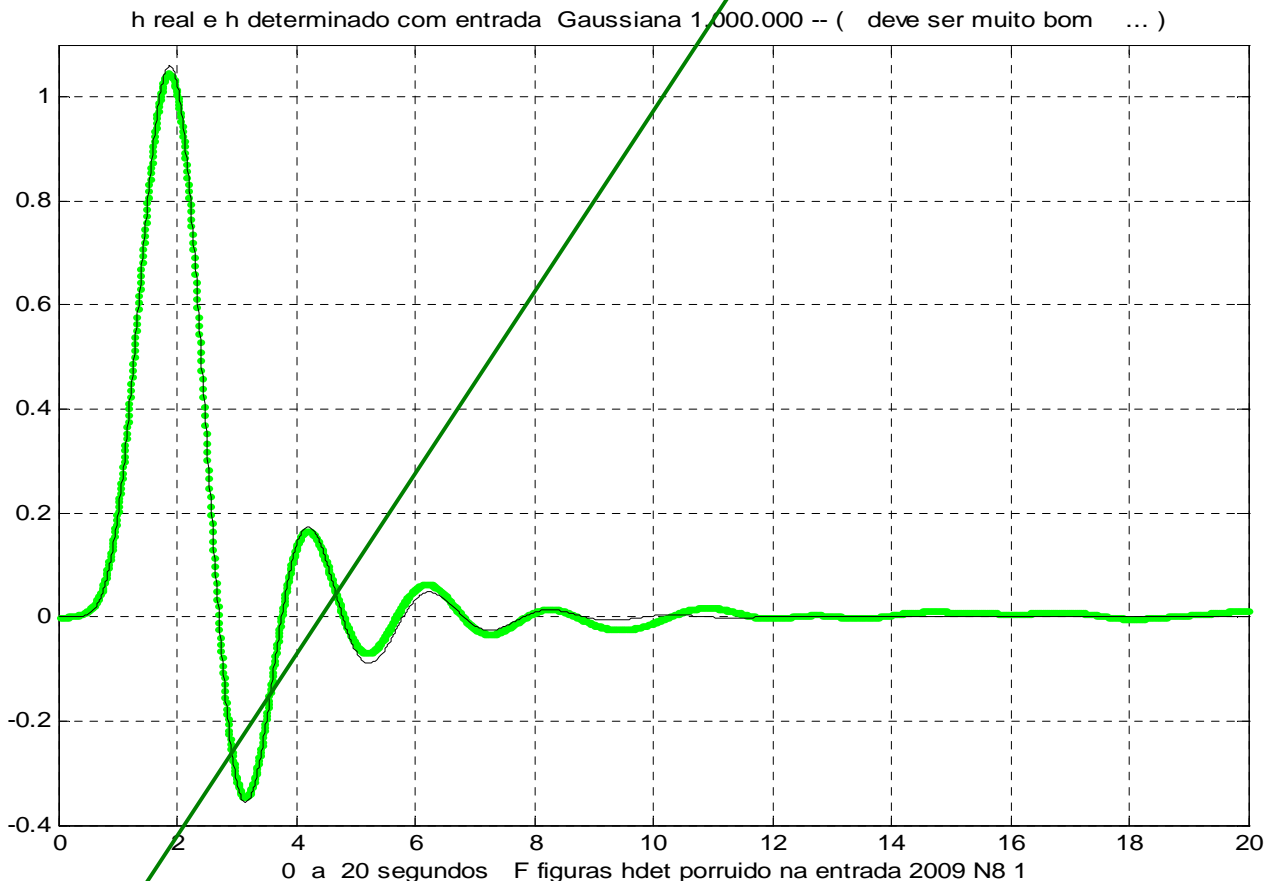




Exemplo com seqüência aleatória de comprimento insuficiente:



Exemplo com seqüência aleatória de comprimento adequado (10^6 !!):





Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

Uma aplicação do pente de impulsos e da convolução: Primeiro critério de Nyquist para evitar IES

Deseja-se enviar f_0 números quaisquer a_k por segundo, o que é conseguido transmitindo, a cada $T_0 (=1/f_0)$, um pulso $[a_k p(t)]$. É claro que a determinação das amplitudes a_k recebidas será isenta de interferência entre símbolos – IES – se a detecção das amplitudes do sinal recebido for feita por amostragem síncrona em $t=k T_0$, e o pulso utilizado tiver amplitude não nula em apenas um desses instantes, que chamaremos $t=0$. Desse modo, em cada instante detecta-se um pulso de cada vez, pois todos os outros assumem amplitude nula. **Deixar só para A05, como já está lá, na pág. 10.**

Especifica-se então que o pulso $p(t)$ tenha os seguintes valores nos instantes discretos de amostragem:

$$p(k T_0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & |k| = 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad [1]$$

Após amostragem

Mostraremos que esse pulso não é único, e que existe um só pulso com essa propriedade e com a mínima banda possível ($=f_0/2$). Para isso, partindo do par transformado (ainda desconhecido) $p(t) \leftrightarrow P(f)$, amostramos $p(t)$ multiplicando-o pelo pente unitário de período T_0 , a fim de

evidenciar as amplitudes especificadas:

$$p(t) \times \sum_k \delta(t - kT_0) = \sum_k p(kT_0) \cdot \delta(t - kT_0) = \delta(t)$$

Ao produto no tempo corresponde a convolução dos respectivos espectros:

$$\begin{matrix} \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ P(f) * f_0 \sum_n \delta(f - nf_0) & = & f_0 \sum_n P(f - nf_0) \end{matrix}$$

Obtém-se portanto o par transformado $\delta(t) \leftrightarrow f_0 \sum_n P(f - nf_0)$.

Como $\delta(t) \leftrightarrow 1$, segue-se que $\sum_n P(f - nf_0) = 1/f_0 = T_0$, [2]

isto é, a soma de $P(f)$ com suas réplicas deslocadas de $\pm T_0, \pm 2T_0$, etc., produz uma constante de valor T_0 . Constata-se então que o pulso de mínima banda possível – que chamaremos pulso básico do 1o. critério de Nyquist, $p_1(t) \leftrightarrow P_1(f)$ - deve ter espectro

$$P_1(f) = T_0 \Pi(f/f_0) \quad (\text{pulso de energia} = T_0),$$

isto é, deve ser uma constante, T_0 , para $|f| < f_0/2$. De fato, para qualquer outro pulso de banda menor, a equação [2] não poderia ser satisfeita, pois a somatória indicada no 1o. membro produziria falhas em torno das frequências $\pm(f_0/2 + nf_0)$. Conclui-se que

$$p_1(t) = \text{sinc}(t/T_0) \quad (\text{pulso de energia} = T_0)$$

A Figura 12 ilustra as operações acima descritas.

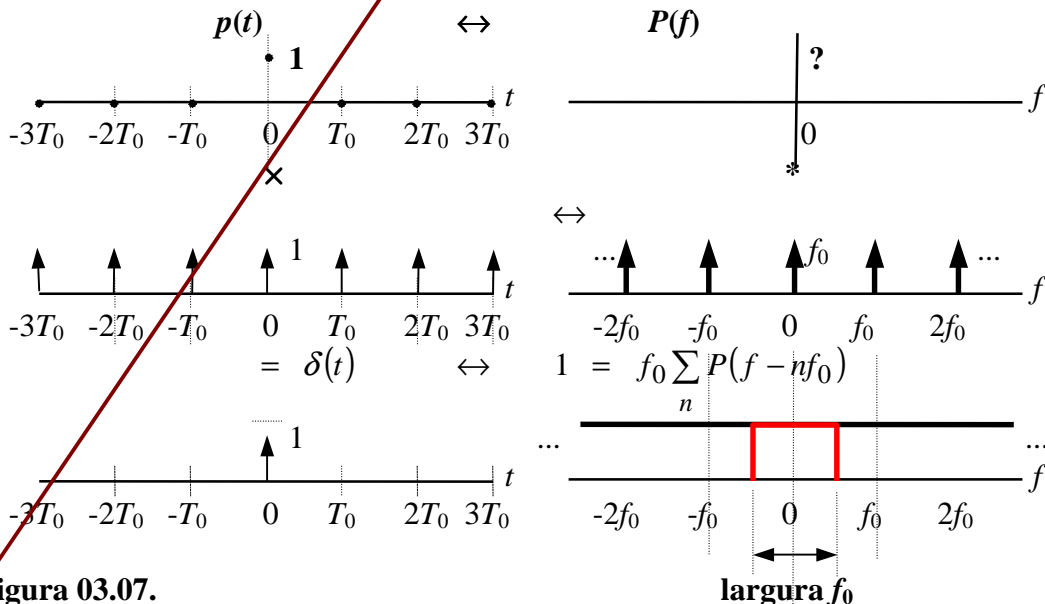


Figura 03.07.

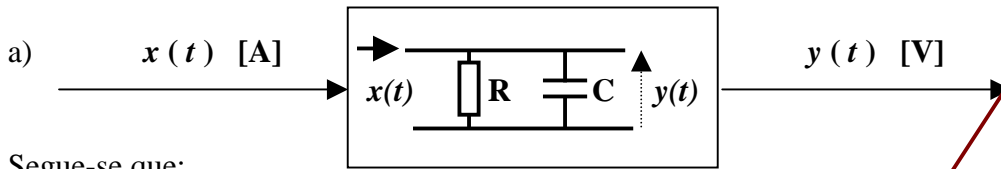


Direitos autorais reservados. É proibida a reprodução não expressamente autorizada.

não foi incluído em 2006 mas pode ser útil – reconsiderar para. Esta página é = à 6 desta aula.

Observação sobre unidades na resposta impulsiva – desnecessário...

A fim de apreciar adequadamente as unidades referentes à resposta impulsiva e a convolução, é útil analisar o exemplo específico que se segue. Considere então o sistema abaixo, em que a entrada é uma corrente [A] e a saída é uma tensão [V]:



Segue-se que:

$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

isto é uma corrente impulsiva unitária, ou seja, de 1 Coulomb [C], ou [A.s] produz saída, em [V/C] ou [V/A.s] - e não [V] ! para sistema fixo, impulso aplicado em $t = \alpha$ produz resposta igualmente atrasada :

$$\delta(t - \alpha) \Rightarrow h(t - \alpha)$$

sendo sistema linear:

$$c \cdot \delta(t - \alpha) \Rightarrow c \cdot h(t - \alpha)$$

escolhendo a constante arbitrária c como $x(\alpha) \cdot d\alpha$, isto é, impulso de corrente com carga $x(\alpha) \cdot d\alpha$, segue-se

$$\underbrace{x(\alpha)}_{[A]} \cdot \underbrace{d\alpha}_{[s]} \cdot \delta(t - \alpha) \Rightarrow \underbrace{x(\alpha)}_{[A]} \cdot \underbrace{d\alpha}_{[C]} \cdot \underbrace{h(t - \alpha)}_{[V/C]} = \underbrace{x(\alpha) \cdot d\alpha}_{[C]} \cdot \underbrace{h(t - \alpha)}_{[V]}$$

ou seja,

isto é, **impulso de corrente com carga** $x(\alpha) \cdot d\alpha$ [C], aplicado em $t = \alpha$ -

Note que o **produto** $x(\alpha) \cdot d\alpha \cdot \delta(t - \alpha)$ tem ainda dimensão de [C] – $x(\alpha) \cdot d\alpha$ permanece com unidades [C] e o $\delta(t - \alpha)$ se torna adimensional.

Finalmente, integrando para incluir as contribuições devidas a todos os valores possíveis da variável α , isto é, somando os efeitos de todas as cargas elementares $x(\alpha) \cdot d\alpha$, que excitaram o sistema em todos os possíveis instantes α

aqui ainda há problemas com a unidade do impulso de excitação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\alpha)}_{[A]} \cdot \underbrace{\delta(t - \alpha)}_{[s]} d\alpha \equiv \underbrace{x(t)}_{[A]} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\alpha)}_{[A]} \cdot \underbrace{h(t - \alpha)}_{[V/C]} d\alpha = \underbrace{y(t)}_{[V]}$$

Passando agora às correspondentes transformadas de Fourier:

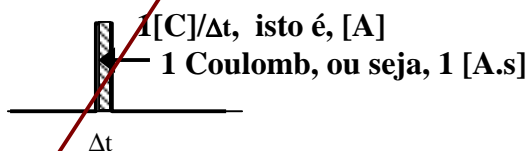
$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow y(t) \leftrightarrow Y(f)$$

[A] [A/Hz] [V] [V/Hz]

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow h(t) \leftrightarrow H(f)$$

[A] [A/Hz] [V/C] [(V/C)/Hz]

Lembrando que $\delta(t)$ tem **área unitária**:



$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$\frac{V}{Hz} = \frac{A}{Hz} \cdot \frac{V/C}{Hz} = \frac{A}{Hz} \cdot \frac{V \cdot s}{C} \quad \text{ok}$$