

MARCIO EISENCRAFT

**SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINAIS
CAÓTICOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de Mestre
em Engenharia.

São Paulo
2001

MARCIO EISENCRAFT

**SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINAIS
CAÓTICOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de Mestre
em Engenharia.

Área de Concentração:
Sistemas Eletrônicos

Orientador:
Max Gerken

São Paulo
2001

Eisencraft, Marcio

Sistemas de Comunicação Utilizando Sinais Caóticos.
São Paulo, 2001.

139p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Telecomunicações e Controle.

1. Sistemas de Comunicação 2. Caos - Aplicações
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Telecomunicações e Controle II.t

A Georg Cantor e seus infinitos infinitos que inspiraram meus estudos desde o início.

A vida é um moinho!

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Max Gerken pelo incentivo e pela coragem de investir neste trabalho. Aos meus pais e irmãos pelo apoio e paciência. Ao meu avô Fichel (em memória) e à minha avó Rê por serem tão especiais. Aos meus amigos e colegas por tudo o que vocês representam para mim.

Sumário

Símbolos Utilizados	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Caóticos e a Engenharia de Telecomunicações	2
1.1.1 O sistema proposto por Cuomo e Oppenheim	3
1.1.2 O método de projeto de Wu e Chua e o sistema associado . .	3
1.1.3 O sistema digital proposto por Ushio	4
2 Sistemas e sinais caóticos	6
2.1 Definições Preliminares	6
2.1.1 Sistemas de tempo discreto	6
2.1.2 Sistemas de tempo contínuo	7
2.2 Estabilidade	8
2.2.1 Estabilidade de ponto fixo	9
2.2.2 Estabilidade de órbita periódica	10
2.2.3 Estabilidade orbital	10
2.2.4 Estabilidade estrutural	11
2.3 Expoentes de Lyapunov	12
2.3.1 Sistemas de tempo discreto	12
2.3.2 Sistemas de tempo contínuo	16
2.4 Sistemas e sinais caóticos	18
2.4.1 Exemplos	19
3 O critério de sincronização de Pecora e Carroll	29
3.1 Sincronização em sistemas mestre-escravo	29
3.1.1 Expoentes de Lyapunov condicionados	32
3.2 Resultados experimentais	32
3.2.1 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov condicionados	34
3.2.2 Simulações computacionais do sincronismo	35
3.2.3 Sensibilidade da sincronização com relação ao descasamento dos parâmetros do mestre e do escravo	44

3.2.4	Complemento: Demonstração analítica do sincronismo para o sistema utilizando as equações de Lorenz	48
4	Sistemas de comunicação analógica utilizando sinais caóticos	50
4.1	O sistema de Cuomo e Oppenheim	50
4.2	O sistema de Wu e Chua	58
4.3	Influência de condições não-ideais de canal	66
4.3.1	Influência do ruído aditivo	66
4.3.2	Influência da limitação em banda do canal	70
4.4	Alternativas para melhorar o desempenho do sincronismo em condições não-ideais de canal	75
4.4.1	Resolvendo o problema da limitação em banda	75
4.4.2	Melhorando a resposta ao ruído no canal	82
5	O Sistema de comunicação digital “Chaotic Phase Shift Keying”	88
5.1	Sincronização caótica em tempo discreto	90
5.1.1	Sincronização em fase	90
5.1.2	Sincronização em anti-fase	91
5.1.3	Exemplos de sincronização em fase e em anti-fase	91
5.2	O CPSK	95
5.3	Comentários sobre a influência de condições não-ideais de canal . . .	102
5.3.1	Influência da limitação em banda do canal	102
5.3.2	Influência do ruído aditivo	106
6	Conclusões	110
	Apêndice A - Rotinas Computacionais	
	Apêndice B - Artigo Publicado	

Símbolos Utilizados

Resume-se aqui a simbologia utilizada mais freqüentemente ao longo deste trabalho.

Os vetores colunas são representados por caracteres minúsculos em **negrito**. As matrizes são representadas por caracteres maiúsculos também em **negrito**. Variáveis representando quantidades escalares são apresentadas em *itálico*.

O símbolo $f'(\cdot)$ utilizado no Capítulo 2, Seção 2.3, representa a derivada da função f com relação ao seu argumento. Nos capítulos seguintes, a utilização de variáveis seguidas do apóstrofo ($x'(t)$, $u'(n)$, etc.) refere-se sempre a variáveis do escravo (ou receptor) do sistema em questão.

A seguir, alguns símbolos especiais:

- N = Conjunto dos números naturais (inteiros não-negativos);
- R = Conjunto dos números reais;
- R_+ = Conjunto dos números reais não-negativos;
- m = Dimensão do espaço de fase;
- n = Índice de tempo discreto;
- t = Índice de tempo contínuo;
- $\dot{x}(t)$ = Derivada de x com relação a t ;
- $\|\cdot\|$ = Norma euclidiana;
- $f^k(\cdot)$ = k -ésima aplicação sucessiva de $f(\cdot)$;
- $Df(\cdot)$ = Matriz jacobiana de $f(\cdot)$;
- \mathbf{M}^t = Matriz transposta de \mathbf{M} ;
- f_a = Freqüência de amostragem;
- T_a = Período de amostragem;
- $E\{\cdot\}$ = Esperança ou valor médio.

Resumo

Sinais caóticos são determinísticos, aperiódicos e apresentam dependência sensível às condições iniciais. Esta dependência significa que o estado de dois sistemas caóticos idênticos, iniciados com condições cuja diferença seja arbitrariamente pequena estarão distantes no espaço de fase depois de um tempo finito.

Estes sinais podem ser interessantes para algumas áreas da Engenharia de Telecomunicações por apresentarem espectro de Fourier plano, dificuldade de previsão e serem facilmente confundíveis com ruído.

Devido à sensibilidade às condições iniciais pode parecer que o sincronismo de dois sistemas caóticos seja impossível. Porém, Pecora e Carroll mostraram que este sincronismo é possível desde que os sistemas obedeçam a certas condições necessárias e suficientes.

Este resultado deu um grande impulso para a geração de muitos trabalhos sobre sistemas de comunicação com detecção coerente utilizando sinais caóticos. Regra geral, eles apresentam um subsistema transmissor que gera um sinal caótico a partir do sinal de informação a ser transmitido e um subsistema receptor que consegue produzir um sinal sincronizado com o do transmissor e recuperar o sinal de informação. A literatura mostra que estes sistemas funcionam perfeitamente em condições ideais.

O objetivo principal deste trabalho é estudar de forma teórica e numérica o critério de sincronismo de Pecora e Carroll e alguns dos sistemas de comunicação utilizando sinais caóticos propostos na literatura, sobretudo o seu desempenho quando há introdução de ruído branco gaussiano na transmissão e o canal é limitado em frequência, casos pouco estudados. Mais especificamente, são analisados com certo detalhe os sistemas de comunicação analógica propostos por Cuomo e Oppenheim, por Wu e Chua e o sistema digital “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) proposto por Ushio.

Mostra-se que nas condições não-ideais citadas, esses sistemas têm desempenho muito pobre no que diz respeito à relação sinal-ruído na saída do receptor. Neste trabalho é apresentada uma solução para este problema no caso de transmissão em canal limitado em banda e é analisada uma proposta de melhoria para o caso de ruído no canal.

Conclui-se que, apesar de todas as propriedades interessantes do ponto de vista de comunicações que os sinais caóticos possuem, ainda é necessária muita pesquisa e desenvolvimento para que os sistemas com detecção coerente baseados neles possam concorrer, em situações práticas, com os sistemas em uso atualmente.

Abstract

Chaotic signals are deterministic, nonperiodic and exhibit sensitive dependence on initial conditions. This dependence means that the states of two identical chaotic systems started with two conditions whose difference is arbitrarily small will be distant in the phase space after a finite time.

These signals may be interesting in some Telecommunication Engineering fields because their Fourier spectrum is plane, they are difficult to predict and they are noise-like.

Due to the sensitive dependence on initial conditions, it may seem that the synchronism of two chaotic systems is impossible. However, as Pecora and Carroll have shown, this synchronism is possible if the systems satisfy some necessary and sufficient conditions.

This result has inspired the development of many communication systems based on coherent detection of chaotic signals. In general, they are composed of a transmitter subsystem that generates a chaotic signal depending on the information to be transmitted and a receptor subsystem that can generate a chaotic signal synchronized with the one on the transmitter and can recover the information signal. These systems are known to work well under ideal conditions.

The main objective of this work is to study, theoretically and numerically, Pecora and Carroll's criterion and some of the communication systems using chaotic signals proposed in the literature, specially their behavior when additive white gaussian noise is added to the transmitted signal and the channel is band-limited. Specifically, the analog communication systems proposed by Cuomo and Oppenheim, by Wu and Chua and the Chaotic Phase Shift Keying (CPSK) system proposed by Ushio are analyzed in some detail.

We show that when the mentioned non-ideal conditions are present the above systems have poor performance when considering the signal-to-noise ratio at the output of the receiver. In this work a solution is presented for the case of transmission over a bandlimited channel and a method for improving the results in the case of noisy channels is analyzed.

We conclude that, regardless all the potential properties chaotic signals may have for communication applications, research and development are still necessary so that systems based on them can surpass in practical situations the usual systems used nowadays.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo da teoria de sistemas caóticos e de algumas de suas aplicações em Engenharia de Telecomunicações. Serão estudados sistemas de comunicação propostos na literatura que utilizam sinais caóticos, considerando principalmente seu desempenho em condições em que o canal de comunicação não é ideal, o que aqui significa que ele é limitado em frequência e existe ruído adicionado ao sinal transmitido.

De forma sucinta, pode-se dizer que um sinal caótico é um sinal *determinístico*, *aperiódico* e que apresenta *dependência sensível às condições iniciais*, ou seja, se o sistema que o gerou for iniciado com uma condição ligeiramente diferente, o sinal obtido terá valores completamente distintos do sinal original depois de um certo tempo.

Li e Yorke [1] publicaram, em 1975, o primeiro trabalho em que aparece a palavra “caos” com o sentido matemático atual. Porém, o início do estudo dos sistemas e sinais caóticos pode ser localizado muito antes na história da Ciência.

Sistemas dinâmicos regidos por equações diferenciais vêm sendo estudados desde o século XVIII. A partir do trabalho fundamental escrito por Newton, essas equações foram utilizadas para descrever todo tipo de processo que se desenvolve continuamente no tempo. Nos séculos XVIII e XIX numerosas técnicas para encontrar soluções para essas equações foram desenvolvidas.

Porém, quase todos esses métodos funcionavam basicamente para equações lineares. Os casos não-lineares mostraram-se muito mais difíceis de serem resolvidos. Segundo os resultados daquela época, o comportamento assintótico de uma solução limitada, quando possível de ser encontrada com as técnicas de então, podia ser de três tipos:

- convergência para um ponto fixo; ou
- convergência para uma oscilação periódica; ou
- convergência para uma oscilação quasiperiódica. Este comportamento aparece quando no sistema em estudo existem várias frequências naturais incomensuráveis.

Esta situação só seria alterada em 1890 quando o matemático francês Henri Poincaré estudou o clássico problema dos três corpos [2]. Em seu trabalho, utilizando o conceito de *variedade* e análises qualitativas, Poincaré mostrou que as soluções assintóticas deste problema podem ser muito mais complexas do que as três possibilidades conhecidas na época. Estava descoberto o que hoje chamamos de *caos*.

Baseado no trabalho de Poincaré, principalmente no seu enfoque qualitativo e geométrico, algumas áreas da Matemática, como a topologia algébrica e geométrica nasceram e se desenvolveram durante o século XX. Porém, uma compreensão mais profunda da natureza das órbitas complicadas observadas por Poincaré só foi obtida na década de 1960.

Neste momento, aparecem artigos em duas frentes diferentes que colocam o assunto de novo em voga. Por um lado, o matemático americano Stephen Smale [3], utilizando *dinâmica simbólica*, mostra que o comportamento caótico pode ser entendido e analisado completamente. Seu trabalho foi seguido de muitos outros, como os dos brasileiros Jacob Palis [4] e Maurício M. Peixoto [5]. Por outro lado, Edward Lorenz [6] observa que mesmo modelos meteorológicos muito simples podem exibir *dependência sensível às condições iniciais*, que, como já foi dito, é característica de sistemas caóticos.

A partir daí, na década de 1970, apareceu um enorme número de artigos sobre dinâmica não-linear e suas aplicações nas mais diversas áreas. Trabalhos como o do ecologista Robert May [7] e do físico Mitchell Feigenbaum [8] entre muitos outros mostraram que o comportamento caótico aparece muito mais freqüentemente do que se esperava tanto na soluções das equações diferenciais e de diferenças quanto nos sistemas naturais que elas modelam.

Na década de 1980, a computação de alta velocidade surge como uma poderosa aliada dos pesquisadores na área de dinâmica não-linear. Um dos trabalhos mais importantes dessa época é sem dúvida o de Benoit Mandelbrot [9] e a sua *geometria fractal*. A pesquisa passa a ter um “componente experimental” e a possibilidade de “visualizar” resultados matemáticos bastante abstratos torna o assunto mais interessante e chama a atenção de pesquisadores de inúmeras áreas. Como conseqüência, o número de aplicações de sistemas não-lineares e caos cresce enormemente. Dezenas de exemplos dessas aplicações podem ser encontrados em [10].

1.1 Sistemas Caóticos e a Engenharia de Telecomunicações

Os sinais caóticos têm algumas propriedades interessantes do ponto de vista da Engenharia de Telecomunicações:

- *espectro de Fourier contínuo*, conseqüência imediata do fato de serem aperiódicos, extendendo-se, em geral, por uma larga faixa de freqüências. Essa característica leva a se pensar na aplicação desses sinais em sistemas que utilizem banda larga;

- *características temporais e no domínio da frequência muito parecidas com as de ruídos*, podendo ser confundidos com esses últimos. Assim, sinais caóticos poderiam ser utilizados para mascarar ou codificar de forma “segura” um sinal de informação;
- a dependência sensível às condições iniciais leva, de certa forma, a uma *imprevisibilidade* do sinal caótico. Essa imprevisibilidade significa que se as condições com que se inicia um sistema que gera uma órbita ou sinal caótico não são conhecidas exatamente (o que na prática é normalmente o caso), a incerteza sobre a localização desta órbita no espaço de fase aumenta com o tempo até se tornar da ordem de grandeza do próprio sinal. Assim, se um sistema caótico for iniciado com condições ligeiramente diferentes, ou mesmo se for simulado em sistemas físicos distintos, o sinal obtido assumirá valores completamente diferentes depois de um tempo de simulação suficientemente longo.

Porém, essa “imprevisibilidade” poderia ser um empecilho muito grande à utilização desses sinais em Telecomunicações, especialmente em aplicações relacionadas a transmissão/recepção de sinais, tema desse trabalho. Pelo que já foi dito, em situações práticas, não é possível, na grande maioria dos casos, gerar o mesmo sinal caótico em dois sistemas isolados entre si. Surge a questão: será possível obter sinais caóticos sincronizados em sistemas separados tendo sido transmitido somente uma parte do estado do primeiro para o segundo?

No início da década de 1990, Pecora e Carroll em seus artigos [11], [12] e [13] respondem afirmativamente esta questão. Utilizando *expoentes de Lyapunov*, eles apresentam condições necessárias e suficientes para que ocorra sincronismo entre dois sistemas em configuração mestre-escravo que geram sinais caóticos. Em seguida, muitos artigos são publicados propondo sistemas de comunicação utilizando esse tipo de sinal. Dentre esses trabalhos, três serão analisados detalhadamente nessa dissertação:

1.1.1 O sistema proposto por Cuomo e Oppenheim

O sistema de comunicação proposto por Cuomo e Oppenheim [14], [15], pesquisadores do Massachusetts Institut of Thecnology (MIT), talvez seja a idéia mais simples e imediata à luz do trabalho de Pecora e Carroll. Como será visto, esse sistema não apresenta resultados muito bons mesmo em situações ideais de canal.

1.1.2 O método de projeto de Wu e Chua e o sistema associado

O grupo do Laboratório de Pesquisa em Eletrônica e do Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia chefiado por Leon W. Chua é talvez o mais ativo desta área de pesquisa tendo publicado dezenas de artigos sobre comunicação utilizando sinais caóticos. Em 1983, Chua projetou o primeiro circuito eletrônico a gerar este tipo de sinal [16] e desde então seu grupo vem

publicando vários trabalhos sobre a utilização deste circuito em telecomunicações (por exemplo [17], [18], [19]).

Wu e Chua em [20] propuseram um método de projeto de sistemas caóticos sincronizantes mais simples do ponto de vista da Engenharia. Os expoentes de Lyapunov de uma órbita, necessários para a aplicação do critério de Pecora e Carroll, são difíceis de serem calculados em geral. Além disso, nesse mesmo trabalho, propõem um sistema de comunicação que não apresenta erro em condições ideais de canal diferentemente do que ocorre com o de Cuomo e Oppenheim. Entretanto, como é mostrado aqui, o desempenho degrada-se bastante em condições não-ideais, como com a limitação em banda de canal ou a adição de ruído na transmissão.

Nesta dissertação é proposta uma alteração que atenua bastante o problema da baixa relação sinal-ruído na saída do receptor que este sistema apresenta devido à limitação em banda do canal de transmissão. Essa alteração consiste na introdução de um filtro passa-banda tanto no transmissor quanto no receptor para limitar o espectro do sinal caótico a ser transmitido.

Já os problemas que este sistema apresenta quando o canal adiciona ruído ao sinal transmitido parecem ser mais difíceis de se resolver. É apresentada aqui uma idéia básica neste sentido baseada no artigo [21] que utiliza o sincronismo caótico para tentar estimar o ruído adicionado.

1.1.3 O sistema digital proposto por Ushio

Por fim, será analisado o sistema “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) proposto por Ushio [23]. Este sistema, ao contrário dos demais a serem detalhados, é utilizado para comunicações digitais e baseia-se em dois tipos de sincronismo: o sincronismo em fase e em contra-fase. Dois sistemas são ditos *sincronizados em fase* quando a diferença entre seus estados converge para zero e em *anti-fase* quando a soma de seus estados converge para zero.

Pelo próprio fato de ser digital este sistema mostra-se mais robusto do que os anteriores. Porém, também sofre com imperfeições no canal. Tanto que sistemas bem mais simples e tradicionais mostraram melhor desempenho em termos da taxa de erro de bit no receptor quando o canal é imperfeito.

Aqui será enfatizado o desempenho desses sistemas sob *condições não-ideais* o que aqui significa que há *ruído branco gaussiano aditivo* no canal de comunicação e *limitação da banda* do sinal transmitido. Essas situações são muito pouco tratadas na literatura, não só pela dificuldade matemática de uma análise teórica como também pelo fato de que os trabalhos publicados não vislumbrem ainda uma aplicação prática imediata desses sistemas.

A abordagem utilizada neste trabalho de mestrado é fundamentalmente numérica e experimental. As conclusões são quase sempre baseadas na literatura e em simulações computacionais utilizando o programa MATLAB [24].

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre caos e sistemas dinâmicos não-lineares. Esta revisão não pretende ser completa, abrangendo principalmente conceitos utilizados nos capítulos seguintes. A inclusão dessa revisão foi considerada importante primeiramente porque o assunto “caos” está ainda bastante distante dos cursos de graduação em Engenharia de Telecomunicações. Além disso, um tempo razoável da elaboração desse trabalho foi despendido com seu estudo.

No Capítulo 3 é detalhado o critério de sincronismo de sistemas caóticos estabelecido por Pecora e Carroll e base para todos os outros trabalhos na área de transmissão de informações utilizando sinais caóticos.

Nos Capítulos 4 e 5 são mostradas aplicações dos capítulos anteriores. O Capítulo 4 concentra-se nos sistemas de comunicação analógica de Cuomo e Oppenheim e Wu e Chua. Já o Capítulo 5 concentra-se no sistema digital CPSK de Ushio.

No Capítulo 6 são descritas as conclusões do trabalho. Seguem-se então as referências bibliográficas e um apêndice com a listagem dos programas utilizados nas simulações e outro com o artigo publicado pelo autor no XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações em Gramado em setembro de 2000.

Capítulo 2

Sistemas e sinais caóticos

O termo *órbita* ou *sinal caótico* não é fácil de ser definido. Prova disso é que até hoje não há uma definição globalmente aceita. Apesar disso, três características estão presentes em quase todas as tentativas: determinismo, aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais (DCI).

O objetivo deste capítulo é chegar a uma definição precisa e operacional de *sinal caótico*, tanto no caso discreto quanto no caso contínuo, para utilização no restante deste trabalho. Para tanto, ele foi dividido em quatro seções. Primeiramente, são estabelecidas definições preliminares para estabelecimento de notação. Na Seção 2.2 são apresentados os conceitos de estabilidade utilizados nesse trabalho. Em seguida, na Seção 2.3, são definidos os expoentes de Lyapunov, úteis para a quantificação da DCI. Finalmente, na Seção 2.4 é apresentada uma definição de sinal caótico válida tanto para o caso discreto quanto para o caso contínuo e são apresentados vários exemplos de sistemas que geram este tipo de sinal.

2.1 Definições Preliminares

Aqui serão estabelecidas algumas definições com o objetivo de formalizar os termos utilizados neste trabalho. Primeiramente, trata-se da nomenclatura empregada para sistemas de tempo discreto e depois para sistemas de tempo contínuo.

2.1.1 Sistemas de tempo discreto

Sistemas de tempo discreto são conhecidos por vários nomes diferentes como *relações recursivas*, *mapas iterados* ou simplesmente *mapas*. A notação básica a ser utilizada aqui para esse tipo de sistema está colocada na definição a seguir.

Definição 1 Seja $\mathbf{f}(\cdot)$ uma função cujo espaço de partida $U \subset R^m$ (domínio) é igual ao espaço de chegada (contra-domínio). A equação de diferenças $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, com $n \in N$, $\mathbf{x}_0 \in U$ representa um *sistema dinâmico de tempo discreto* ou *mapa*. A *órbita* ou *sinal* correspondente a \mathbf{x}_0 gerado a partir de $\mathbf{f}(\cdot)$ e \mathbf{x}_0 fixo é a função $\mathbf{x}(n, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ dada por $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$, em que $\mathbf{f}^n(\cdot)$ representa a n -ésima aplicação sucessiva de $\mathbf{f}(\cdot)$ e $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. O ponto \mathbf{x}_0 é chamado de *condição inicial*

de $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$. Quando não houver dúvidas sobre a condição inicial de uma órbita, ela será indicada simplesmente por $\mathbf{x}(n)$ ou \mathbf{x}_n . Um ponto \mathbf{c} é dito *ponto fixo* do mapa (ou de $\mathbf{f}(\cdot)$) se $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ e, portanto, $\mathbf{x}_n(\mathbf{c}) = \mathbf{c}, \forall n \in N$.

A periodicidade de uma órbita e conceitos relacionados são muito importantes no estudo de sistemas caóticos, já que a ausência de período é uma das principais características desses sinais. A seguir, define-se precisamente esses termos para o caso discreto.

Definição 2 Seja o mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ e \mathbf{e} um ponto do domínio de $\mathbf{f}(\cdot)$. O ponto \mathbf{e} é dito *eventualmente periódico* de período $k \in N$ para este mapa se para algum $n_* \in N$, $\mathbf{f}^{n+k}(\mathbf{e}) = \mathbf{f}^n(\mathbf{e})$ para todo $n \geq n_*$, e k é o menor natural que satisfaz essa condição. A órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{e})$ é dita *eventualmente periódica* de período k .

Definição 3 Seja o mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. Um ponto \mathbf{p} do domínio de $\mathbf{f}(\cdot)$ é dito *periódico* de período k se ele é eventualmente periódico de período k com $n_* = 0$. A órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{p})$ é dita *periódica* de período k .

Definição 4 Seja o mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, sendo $\mathbf{f}(\cdot)$ contínua e diferenciável. Uma órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{a})$ é dita *assintoticamente periódica* se ela converge para uma órbita periódica quando $n \rightarrow \infty$; ou seja, existe uma órbita periódica $\mathbf{x}_n(\mathbf{p})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{a}) - \mathbf{x}_n(\mathbf{p})\| = 0$. O ponto \mathbf{a} é dito *assintoticamente periódico*. Uma órbita (respectivamente, ponto) não assintoticamente periódica (periódico) será chamada de *aperiódica* (*aperiódico*).

Um outro conceito fundamental para o estudo de sinais caóticos é a *dependência sensível às condições iniciais* (DCI) definida a seguir [25]:

Definição 5 Seja $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ um mapa em $U \subset R^m$. Um ponto $\mathbf{x}_0 \in U$ tem *dependência sensível às condições iniciais* (DCI) se existe uma distância não-nula d tal que alguns pontos arbitrariamente próximos de \mathbf{x}_0 são eventualmente mapeados a pelo menos d unidades da imagem correspondente a \mathbf{x}_0 . Mais precisamente, existe $d > 0$ tal que qualquer vizinhança $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < d\}$ de \mathbf{x}_0 contém pelo menos um ponto \mathbf{x}_* tal que $\|\mathbf{f}^{n_*}(\mathbf{x}_*) - \mathbf{f}^{n_*}(\mathbf{x}_0)\| \geq d$ para algum $n_* \in N$. Nessas condições a órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ tem DCI.

2.1.2 Sistemas de tempo contínuo

A definição a seguir resume a notação a ser utilizada aqui para os sistemas de tempo contínuo.

Definição 6 Seja $\mathbf{g}(\cdot)$ uma função contínua e diferenciável definida num conjunto compacto¹ $M \subset R^m$. Para $\mathbf{x} \in M$ a equação $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ representa um *sistema dinâmico de tempo contínuo*. A órbita ou *sinal* correspondente a $\mathbf{x}_0 \in M$ gerado a

¹Para subconjuntos de um espaço euclidiano, um conjunto M é compacto quando é fechado e limitado.

partir de $g(\cdot)$ e \mathbf{x}_0 é a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ do problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ para $t \in R_+$. O ponto \mathbf{x}_0 é chamado de *condição inicial* da órbita. Quando não houver dúvidas sobre a condição inicial, uma órbita será indicada simplesmente por $\mathbf{x}(t)$. Um ponto \mathbf{c} é dito *ponto fixo* se $\mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{x}(t, \mathbf{c}) = \mathbf{c}, \forall t \in R_+$.

Note-se que as restrições sobre $\mathbf{g}(\cdot)$ e M na definição são suficientes para garantir que o problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ tenha solução para $\forall t \in R$.

As definições relacionadas à periodicidade para sistemas contínuos, equivalentes àquelas para sistemas discretos, são:

Definição 7 Seja o sistema de tempo contínuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ e \mathbf{e} um ponto do domínio de $\mathbf{g}(\cdot)$. O ponto \mathbf{e} é dito *eventualmente periódico* de período T para este sistema se para algum $t_* \in R_+$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{e}) = \mathbf{g}(t + T, \mathbf{e})$ para todo $t \geq t_*$, e T é o menor número real positivo que satisfaz essa condição. A órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{e})$ é dita *eventualmente periódica* de período T .

Definição 8 Seja o sistema de tempo contínuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Um ponto \mathbf{p} do domínio de $\mathbf{g}(\cdot)$ é dito *periódico* de período T se ele é eventualmente periódico de período T com $t_* = 0$. A órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ é dita *periódica* de período T .

Definição 9 Seja o sistema de tempo contínuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Uma órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{a})$ é dita *assintoticamente periódica* se ela converge para uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$; ou seja, existe uma órbita periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{p})\| = 0$. O ponto \mathbf{a} é dito *assintoticamente periódico*. Uma órbita (respectivamente, ponto) não assintoticamente periódica (periódico) será chamada de *aperiódica* (*aperiódico*).

Da mesma forma que para sistemas discretos, pode-se definir DCI para sistemas contínuos:

Definição 10 Seja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ um sistema de tempo contínuo. Um ponto \mathbf{x}_0 do domínio de $\mathbf{g}(\cdot)$ tem *dependência sensível às condições iniciais* (DCI) se existe $d > 0$ tal que qualquer vizinhança $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < d\}$ de \mathbf{x}_0 contém pelo menos um ponto \mathbf{x}_* tal que $\|\mathbf{g}(t_*, \mathbf{x}_0) - \mathbf{g}(t_*, \mathbf{x}_*)\| \geq d$ para algum $t_* > 0$. Nessas condições a órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ tem DCI.

2.2 Estabilidade

Serão tratados aqui os conceitos de estabilidade para um ponto fixo, para uma órbita periódica, para uma órbita genérica e a estabilidade estrutural de um sistema que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para chegar às definições apresentadas aqui, foi realizada uma pesquisa em várias referências clássicas da área de sistemas dinâmicos lineares e não-lineares como [26], [27], [28], [29], [30] e [31]. Adotou-se aquelas que se mostraram mais usuais e ao mesmo tempo úteis para o que segue.

2.2.1 Estabilidade de ponto fixo

Os conceitos de estabilidade para ponto fixo em sistemas contínuos e em sistemas de tempo discreto são equivalentes. Nas definições a seguir, utiliza-se a notação de sistemas contínuos, mas, para obter as respectivas definições para tempo discreto, basta trocar os índices temporais. Essas definições são baseadas nas referências [10] e [26].

Definição 11 Um ponto fixo \mathbf{c} de um sistema de tempo contínuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ é um *atrator* se existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ com $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}\| < \delta$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{c}$.

Como mostrado esquematicamente na Figura 2.1(a), as trajetórias que se iniciam próximas de um atrator podem sair de suas proximidades a curto prazo, porém, devem aproximar-se dele a longo prazo.

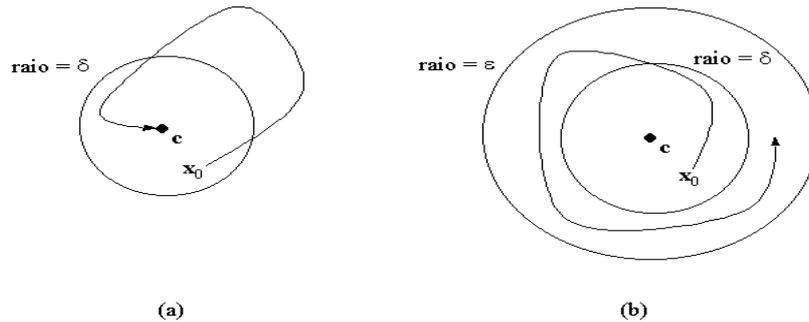


Figura 2.1: Diagrama esquemático do comportamento de uma órbita próxima (a) de um ponto fixo atrator (b) de um ponto fixo estável segundo Lyapunov.

Definição 12 Um ponto fixo \mathbf{c} é *estável segundo Lyapunov* se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{c}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ sempre que $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}\| < \delta$.

Assim, as trajetórias que se iniciam próximas de um ponto fixo estável segundo Lyapunov devem permanecer nas proximidades desse ponto para todo $t \geq 0$, não convergindo, necessariamente, para ele. Essa situação é mostrada esquematicamente na Figura 2.1(b).

Definição 13 Um ponto fixo \mathbf{c} é *assintoticamente estável* se é atrator e estável segundo Lyapunov.

Portanto, as trajetórias próximas de um ponto fixo assintoticamente estável além de convergirem para ele, permanecem o tempo todo numa vizinhança sua.

Definição 14 Um ponto fixo \mathbf{c} é *instável* se não é atrator e nem estável segundo Lyapunov.

2.2.2 Estabilidade de órbita periódica

Se uma órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{p})$ é periódica de período k para o mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, \mathbf{p} é um ponto fixo do mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_n)$. Assim, a análise da estabilidade da órbita periódica $\mathbf{x}_n(\mathbf{p})$ pode ser feita através da análise da estabilidade do ponto fixo \mathbf{p} do sistema $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_n)$, que já foi definida.

No caso contínuo, a estabilidade de órbitas periódicas, incluindo ciclos limites, é determinada com a utilização de uma *seção de Poincaré* [26]. A estabilidade desta órbita será determinada pela estabilidade do ponto fixo correspondente no *mapa de Poincaré*.

2.2.3 Estabilidade orbital

A estabilidade de uma órbita é definida aqui para o caso contínuo. Novamente, é possível definir o análogo para tempo discreto mudando-se o índice temporal contínuo para um índice discreto.

O conceito de estabilidade orbital que será útil nas próximas seções é a *estabilidade segundo Lyapunov* [32] definida como se segue:

Definição 15 Seja a órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ e S um conjunto aberto tal que $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in S$ para todo $t > 0$. Esta órbita é dita *estável segundo Lyapunov* se:

1. existe um $b_1 > 0$ tal que os pontos da imagem de qualquer órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}_0)$ pertencem a S sempre que sua condição inicial satisfazer $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| \leq b_1$.
2. dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon; \mathbf{x}_0)$, $0 < \delta \leq b_1$, tal que $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$ implica em $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{y}_0)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Outra definição importante para os capítulos seguintes é a de *estabilidade assintótica segundo Lyapunov*:

Definição 16 A órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ é dita *assintoticamente estável segundo Lyapunov* se 1. e 2. são satisfeitas e existe um $\delta = \delta(\mathbf{x}_0)$, $0 < \delta \leq b_1$ tal que $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$ implica em $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{y}_0)\| = 0$.

Deve-se ressaltar que essas definições de órbitas estáveis (segundo Lyapunov) são bastante restritivas deixando de fora muitas órbitas que a intuição leva a chamar de estáveis. Além disso, esta definição de estabilidade não é invariante a mudanças de coordenadas.

Por exemplo, seja o sistema dinâmico bi-dimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \dot{y} = x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.1)$$

As soluções deste sistema são dadas por

$$\begin{cases} x = c \cos(ct + d) \\ y = c \sin(ct + d) \end{cases} \quad (2.2)$$

sendo c e d constantes arbitrárias.

Estas órbitas representam circunferências concêntricas em torno da origem no espaço de fase. Com exceção da órbita $x = 0, y = 0$ todas as outras são instáveis segundo Lyapunov já que a velocidade com que as circunferências são percorridas depende das condições iniciais e, mesmo que elas sejam próximas, estarão distantes no espaço de fase depois de um tempo. No entanto, trocando-se as variáveis x, y por r e d segundo a relação

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \theta = rt + d, \quad (2.3)$$

O sistema (2.2) é transformado em

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{d} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

cujas soluções $r = c_1, d = c_2$, com c_1 e c_2 sendo constantes arbitrárias são todas estáveis. Isto porque escolhidas duas condições iniciais próximas, as respectivas órbitas não se distanciam no espaço de fase. Os raios e fases iniciais (r e d) das circunferências não são alterados no tempo pelo sistema.

Pode-se definir a estabilidade de uma órbita de uma forma mais genérica de forma que casos como o sistema (2.2) resulte estável independente da escolha das coordenadas que o descrevem [32]. Por exemplo, definindo-se a distância de um ponto \mathbf{y} a uma órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ como

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \inf \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|, \forall t \geq 0 \} \quad (2.5)$$

e o tubo de raio ϵ da órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ como

$$S(\epsilon, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \{ \mathbf{y} \mid d(\mathbf{y}, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) < \epsilon \} \quad (2.6)$$

pode-se tomar as seguintes definições

Definição 17 A órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ é estável se dado $b > 0$, existe um $b_1(b)$ tal que se $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < b_1$ então $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in S(b, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$.

Definição 18 A órbita $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ é assintoticamente estável se ela é estável e existe $\delta > 0$ com $0 < \delta < b_1$ tal que se $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t_1, \mathbf{y}_0)\| = 0$.

Com essas definições, o sistema (2.2) será sempre estável já que a estabilidade independe da parametrização do sistema (independe do tempo t).

Nas próximas seções e capítulos, quando fizer-se referência à estabilidade orbital, estaremos sempre nos referindo à estabilidade segundo Lyapunov.

2.2.4 Estabilidade estrutural

A *estabilidade estrutural* é conceitualmente diferente das definições de estabilidade vistas anteriormente. Enquanto nessas últimas a estabilidade é investigada perturbando-se as condições iniciais, para a estabilidade estrutural interessa a robustez das órbitas sob uma perturbação dos parâmetros da equação diferencial que define o sistema [34]:

Definição 19 Um sistema é denominado *estruturalmente estável* se para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o define, o conjunto das órbitas resultantes é topologicamente equivalente² àquele das equações sem a perturbação.

Uma definição mais detalhada desse conceito juntamente com as condições necessárias para o seu aparecimento (Teorema de Peixoto), pode ser encontrada, por exemplo, em [35].

2.3 Expoentes de Lyapunov

A dependência sensível às condições iniciais (DCI), como já foi dito, é uma característica fundamental para a definição de sinal caótico. Porém, valendo-se apenas das Definições 5 e 10, respectivamente para sistemas de tempo discreto e sistemas de tempo contínuo, é muito difícil verificar esta propriedade para uma dada órbita, exceto em casos excepcionais.

Os expoentes de Lyapunov, que como será visto, representam uma taxa de divergência exponencial entre duas órbitas suficientemente próximas possibilita a verificação da DCI de forma operacional. Daí a importância aqui do estudo de sua definição e de métodos numéricos para o seu cálculo. Além disso, na Seção 3.2, esses expoentes serão utilizados para determinar a estabilidade assintótica das órbitas de um sistema não-linear.

Inicialmente, serão tratados os expoentes de Lyapunov para os sistemas de tempo discreto. Em seguida, será analisado o caso contínuo.

2.3.1 Sistemas de tempo discreto

Sistemas unidimensionais O comportamento das órbitas do sistema dinâmico de tempo discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ nas proximidades de um ponto fixo é fortemente influenciado pela derivada de $f(\cdot)$ nesse ponto. Por exemplo, se c é um ponto fixo de $f(\cdot)$ e $f'(c) = l > 1$, então toda órbita $x_n(x_0)$ com x_0 próximo de c afasta-se de c com uma *taxa multiplicativa de aproximadamente l por iteração*, até se mover para significativamente longe de c . Isto pode ser visto pela expansão de Taylor de $f(x_0)$ em torno de c :

$$\begin{aligned} f(x_0) &\approx f(c) + f'(c)(x_0 - c) \Rightarrow f(x_0) - f(c) \approx f'(c)(x_0 - c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x_0) - c| \approx l|x_0 - c|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para um ponto periódico p de período k , esta mesma informação pode ser obtida olhando-se a derivada da k -ésima iteração de $f(\cdot)$ já que p é ponto fixo de $f^k(\cdot)$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} f^{k'}(p) &= f'(f^{k-1}(p)) \cdot f'(f^{k-2}(p)) \cdot f'(f^{k-3}(p)) \cdot \dots \cdot f'(p) \Rightarrow \\ \underline{f^{k'}(p)} &= \underline{f'(x_{k-1}(p)) \cdot f'(x_{k-2}(p)) \cdot f'(x_{k-3}(p)) \cdot \dots \cdot f'(p)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

²Dois conjuntos de órbitas são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo (função contínua com inversa contínua) que leva um no outro preservando a orientação das trajetórias. Mais detalhes podem ser obtidos, por exemplo, no Capítulo 1 de [29].

ou seja, $f^{k'}(p)$ é o produto das derivadas de $f(\cdot)$ calculadas nos k pontos distintos da imagem da órbita $x_n(p)$. Suponha que esse produto seja $l > 1$. Pelo mesmo raciocínio utilizado para pontos fixos, uma órbita com condição inicial próxima de p separa-se de $x_n(p)$ a uma taxa de aproximadamente l depois de k iterações. Faz sentido então descrever a *taxa multiplicativa média* de separação entre as duas órbitas como sendo $L = l^{\frac{1}{k}}$ por iteração.

O número de Lyapunov é uma generalização das taxas obtidas acima para o caso em que os pontos não são necessariamente periódicos dando uma *estimativa da taxa multiplicativa* de separação entre duas órbitas próximas *por iteração*. Sua definição é a seguinte:

Definição 20 Seja o mapa unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$. Se $f(\cdot)$ for diferenciável nos pontos da imagem da órbita $x_n(x_0)$, o seu *número de Lyapunov* é

$$L(x_n) = \lim_{i \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| \cdot |f'(x_1)| \cdot \dots \cdot |f'(x_i)|)^{\frac{1}{i}} \quad (2.9)$$

se o limite existir. O *expoente de Lyapunov* $h(x_n)$ é definido como

$$h(x_n) = \ln(L(x_n)), \quad (2.10)$$

se $L(x_n)$ existir. Como, para sistemas determinísticos, a cada condição inicial está associada uma única órbita, as definições de número e expoente de Lyapunov podem ser associadas às condições iniciais das órbitas de um dado mapa. Assim, $L(x_n(x_0)) = L(x_0)$ e $h(x_n(x_0)) = h(x_0)$.

Segue da definição que o número de Lyapunov de um ponto fixo c de um mapa $x_{n+1} = f(x_n)$ é $|f'(c)|$ e o expoente de Lyapunov de um ponto periódico $p = x_0$ de período k desse mesmo mapa é

$$h(x_0) = \frac{\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_{k-1})|}{k}. \quad (2.11)$$

A Definição 19 permite algumas considerações sobre estabilidade:

- Um ponto fixo ou uma órbita periódica que tenha expoente de Lyapunov negativo será assintoticamente estável pelo argumento apresentado na equação (2.7), já que neste caso $l < 1$;
- Por esta mesma equação, conclui-se que expoente de Lyapunov nulo implica em estabilidade segundo Lyapunov mas não estabilidade assintótica e expoente de Lyapunov positivo indica que o ponto fixo ou a órbita periódica é instável.

Estes fatos são muito importantes por causa do seguinte teorema, cuja demonstração é apresentada em [25]:

Teorema 1 Seja o mapa $x_{n+1} = f(x_n)$. Se a órbita $x_n(x_0)$ satisfaz $f'(x_i) \neq 0$ para todo $i \in N$ e é assintoticamente periódica tendo como limite a órbita periódica $x_n(p)$, então as duas órbitas têm expoentes de Lyapunov idênticos, assumindo que ambos estejam definidos.

Conclui-se assim que se uma órbita possui expoente de Lyapunov positivo ela não pode ser assintoticamente periódica tendo como limite uma órbita periódica assintoticamente estável ou convergir para um ponto fixo assintoticamente estável. Assim, restam poucas possibilidades para esse tipo de órbita:

- ou ela é assintoticamente periódica convergindo para uma órbita periódica instável, caso pouco provável em geral; ou
- ela é *aperiódica*.

Essa conclusão é fundamental para a classificação de uma órbita como “caótica” como será visto mais adiante.

Sistemas m -dimensionais Em sistemas discretos m -dimensionais, a cada órbita estão associados m expoentes de Lyapunov definidos da seguinte forma [25]:

Definição 21 Seja o mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ com $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável e seja $\mathbf{J}_i = \mathbf{Df}^i(\mathbf{x}_0)$ o jacobiano de $\mathbf{f}^i(\cdot)$ calculado em \mathbf{x}_0 . Para $j = 1, 2, \dots, m$, seja r_i^j o comprimento do j -ésimo maior eixo do elipsóide $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$ para uma órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 em que \mathbf{E} é uma esfera de raio unitário em torno de \mathbf{x}_0 . Então r_i^j mede a contração ou expansão próximo à órbita de \mathbf{x}_0 durante as primeiras i iterações na direção do j -ésimo maior eixo do elipsóide $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$, que será representada pelo versor \mathbf{u}_i^j . O j -ésimo número de Lyapunov de $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ é dado por

$$L^j(\mathbf{x}_n) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(r_i^j \right)^{\frac{1}{i}} \quad (2.12)$$

se o limite existir. Neste caso, O j -ésimo expoente de Lyapunov de $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ é $h^j = \ln L^j$.

A notação $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$ representa o produto dos vetores que descrevem a esfera \mathbf{E} pelo jacobiano \mathbf{J}_i . Note que a definição assegura que, para uma certa órbita, os números e expoentes de Lyapunov obedecem $L^1 > L^2 > \dots > L^m$ e $h^1 > h^2 > \dots > h^m$ respectivamente.

A Figura 2.2 ilustra esses conceitos no caso bidimensional.

Pode-se demonstrar [25] que todas as considerações feitas no caso unidimensional continuam válidas para o caso multidimensional, inclusive o Teorema 1 e as observações que o seguem, devendo-se considerar nas análises o sinal do maior expoente de Lyapunov h^1 da órbita. Ou seja, a existência de um único expoente de Lyapunov positivo já impede a órbita de convergir para um ponto fixo atrator ou para uma órbita periódica atratora.

Concentrar-nos-emos agora em técnicas para o cálculo numérico desses expoentes para um dado sistema, o que é fundamental na aplicação do critério de sincronismo de Pecora e Carroll que será analisado no Capítulo 3 deste trabalho.

Para os mapas de maior interesse, não há modo analítico de se determinar o expoente de Lyapunov conhecendo-se o mapa e sua matriz jacobiana. Geralmente, a matriz $\mathbf{J}_i = \mathbf{Df}^i(\mathbf{x}_0)$ é difícil de ser determinada exatamente para i grande.

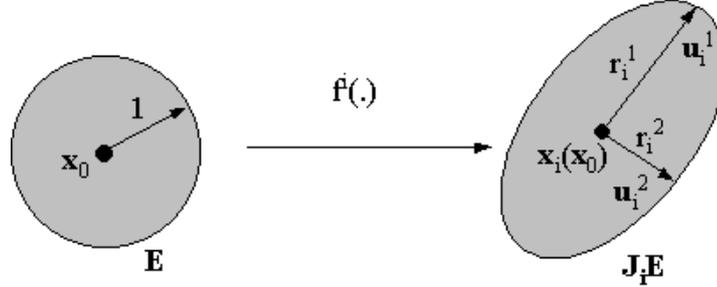


Figura 2.2: Evolução de uma esfera em torno da condição inicial x_0 quando submetida ao mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, com $\mathbf{f}(\cdot)$ diferenciável. Caso bidimensional.

Se o elipsóide $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$ tem semi-eixos maiores de comprimento r_i^j nas direções dos versores \mathbf{u}_i^j , o método direto de cálculo dos expoentes de Lyapunov seria encontrar explicitamente $\mathbf{J}_i (\mathbf{J}_i)^t$ e encontrar seus autovalores $(r_i^j)^2$. No caso do elipsóide ter direções em que ele é comprimido ou alongado, ele será muito fino e comprido para i grande. Os autovalores de $\mathbf{J}_i (\mathbf{J}_i)^t$ incluirão números muito grandes e muito pequenos. Por essa razão a matriz \mathbf{J}_i é mal condicionada e o cálculo direto de $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$ deve ser evitado.

Um método indireto que funciona melhor em cálculos numéricos envolve seguir o elipsóide enquanto ele evolui. Para a órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ do sistema $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ obtém-se pela regra da cadeia,

$$\mathbf{J}_i \mathbf{E} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{i-1}) \cdot \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{i-2}) \dots \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

podendo-se computar uma iteração de cada vez. Começa-se com uma base ortonormal $\{\mathbf{w}_0^1, \mathbf{w}_0^2, \dots, \mathbf{w}_0^m\}$ para $U \subset R^m$, domínio de $\mathbf{f}(\cdot)$ e computa-se os vetores $\mathbf{z}_1^1, \mathbf{z}_1^2, \dots, \mathbf{z}_1^m$:

$$\mathbf{z}_1^1 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_0^1, \mathbf{z}_1^2 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_0^2, \dots, \mathbf{z}_1^m = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_0^m. \quad (2.14)$$

Estes vetores estão sobre o elipsóide $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{E}$ mas não são necessariamente ortogonais. Essa situação é contornada criando-se um novo conjunto de vetores ortogonais $\{\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_1^2, \dots, \mathbf{w}_1^m\}$ que gera um elipsóide com o mesmo volume de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{E}$. Isto é conseguido utilizando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

A seguir, aplica-se o jacobiano $\mathbf{Df}(\cdot)$ ao próximo ponto da órbita

$$\mathbf{z}_2^1 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \mathbf{w}_1^1, \mathbf{z}_2^2 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \mathbf{w}_1^2, \dots, \mathbf{z}_2^m = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \mathbf{w}_1^m \quad (2.15)$$

e ortogonaliza-se novamente o conjunto para se conseguir um conjunto ortogonal $\{\mathbf{w}_2^1, \mathbf{w}_2^2, \dots, \mathbf{w}_2^m\}$. Repetindo-se esse passo i vezes obtém-se o conjunto de vetores $\{\mathbf{w}_i^1, \mathbf{w}_i^2, \dots, \mathbf{w}_i^m\}$ que fornece os semi-eixos maiores do elipsóide $\mathbf{J}_i \mathbf{E}$.

A expansão ou contração r_i^j referida na Definição 20 é aproximada pela norma do vetor \mathbf{w}_i^j . Assim, $\|\mathbf{w}_i^j\|^{-\frac{1}{i}}$ é a aproximação do j -ésimo maior expoente de Lyapunov depois de i passos.

Para eliminar o problema de números muito grandes ou muito pequenos, este algoritmo deve ser alterado de forma a se normalizar a base ortogonal a cada passo. Denotando os m vetores obtidos da aplicação da ortogonalização de Gram-Schmidt a $\mathbf{z}_i^1, \mathbf{z}_i^2, \dots, \mathbf{z}_i^m$ por $\mathbf{y}_i^1, \mathbf{y}_i^2, \dots, \mathbf{y}_i^m$ e fazendo $\mathbf{w}_i^1 = \frac{\mathbf{y}_i^1}{\|\mathbf{y}_i^1\|}$, $\mathbf{w}_i^2 = \frac{\mathbf{y}_i^2}{\|\mathbf{y}_i^2\|}$, \dots , $\mathbf{w}_i^m = \frac{\mathbf{y}_i^m}{\|\mathbf{y}_i^m\|}$, tornamos os vetores \mathbf{w}_i^j unitários. Assim, $\|\mathbf{y}_i^j\|$ mede a expansão ou contração durante um passo na direção de j -ésimo maior eixo do elipsóide. Portanto, a expansão nesta direção depois de i passos será dada por $r_i^j = \|\mathbf{y}_i^j\| \cdot \|\mathbf{y}_{i-1}^j\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{y}_1^j\|$ e a expressão

$$\frac{\ln \|\mathbf{y}_i^j\| + \ln \|\mathbf{y}_{i-1}^j\| + \dots + \ln \|\mathbf{y}_1^j\|}{i} \quad (2.16)$$

é conveniente para estimar o j -ésimo expoente de Lyapunov utilizando i iterações.

No Apêndice A está listada a rotina LYPDISC2D escrita no MATLAB para o cálculo dos expoentes de Lyapunov de uma órbita dado o mapa e seu jacobiano para o caso bidimensional. Na Seção 2.4.1 é mostrado um exemplo de utilização dessa rotina para o mapa de Hénon.

2.3.2 Sistemas de tempo contínuo

Nesse item as definições anteriores de expoentes de Lyapunov serão estendidas para o caso de tempo contínuo.

O *mapa de tempo- T* $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_T(\mathbf{x}_n)$ para um sistema dinâmico de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

fornece o ponto no qual uma órbita com condição inicial \mathbf{x}_n chega após T unidades de tempo.

Seja então o sistema dado por (2.17). Define-se o expoente de Lyapunov de uma órbita desse sistema com condição inicial \mathbf{x}_0 como sendo o expoente de Lyapunov da órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 do respectivo mapa de tempo- T com $T = 1$.

Definição 22 Os *números de Lyapunov* (respectivamente *expoentes*) de uma órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 do sistema dinâmico de tempo contínuo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ são dados pelos números de Lyapunov (respectivamente expoentes) da órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 do mapa de tempo-1 associado a esse sistema.

Novamente, é válido o Teorema 1 e suas conseqüências sendo necessário somente adaptar a notação para o caso contínuo [25].

O restante desta seção será dedicada ao estudo de técnicas de calculo numérico desses expoentes para uma órbita do sistema (2.17) conhecendo-se $\mathbf{g}(\cdot)$ e a condição inicial \mathbf{x}_0 .

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov de uma órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 começa-se com uma pequena esfera de condições iniciais em torno de \mathbf{x}_0 e verifica-se a evolução dessa esfera conforme \mathbf{x}_0 segue o fluxo das equações diferenciais. Para isso, é necessário conhecer $\mathbf{DF}_1(\cdot)$, o jacobiano do mapa de tempo-1 nos pontos da imagem da órbita $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}_0)$ do sistema $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_n)$.

Se T for mantido fixo, $\mathbf{DF}_T(\mathbf{x}_0)$ com \mathbf{x}_0 fixo é uma função linear de R^m em R^m representada por uma matriz $m \times m$. Intuitivamente, o vetor $[\mathbf{DF}_T(\mathbf{x}_0)](\mathbf{v})$ é a pequena variação na solução de (2.17) no instante T causada por uma pequena mudança no valor inicial de \mathbf{x}_0 para $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$.

Apesar de não haver uma fórmula explícita para a matriz $\mathbf{DF}_T(\mathbf{x}_0)$, ela satisfaz uma equação diferencial que pode ser resolvida em paralelo com (2.17).

Como $\{\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) : t \in R\}$ é solução de (2.17) com valor inicial \mathbf{x}_0 , temos por definição

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)). \quad (2.18)$$

Esta equação tem duas variáveis, o tempo t e o valor inicial \mathbf{x}_0 . Diferenciando com relação a \mathbf{x}_0 e aplicando a regra da cadeia, temos a equação

$$\frac{d}{dt}\mathbf{DF}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Dg}(\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{DF}_t(\mathbf{x}_0), \quad (2.19)$$

que é conhecida como *equação variacional* da equação diferencial. O nome vem do fato de que caso se pudesse resolver a equação para $\mathbf{DF}_t(\mathbf{x}_0)$, poder-se-ia saber o jacobiano de $\mathbf{F}_t(\cdot)$, solução de (2.17) e, portanto, como $\mathbf{F}_t(\cdot)$ é modificada ante pequenas variações do valor inicial \mathbf{x}_0 .

Para simplificar a notação da equação variacional, define-se

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{DF}_t(\mathbf{x}_0) \quad (2.20)$$

como sendo o jacobiano do mapa de tempo- t calculado para o valor inicial \mathbf{x}_0 , e

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{Dg}(\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)) \quad (2.21)$$

como sendo o jacobiano de $\mathbf{g}(\cdot)$ do segundo membro de (2.17) calculada ao longo da solução. Note que $\mathbf{A}(t)$ pode ser calculada explicitamente conhecendo-se a equação diferencial original. Assim, pode-se escrever novamente a equação variacional (2.19) como

$$\dot{\mathbf{J}}_t = \mathbf{A}(t)\mathbf{J}_t. \quad (2.22)$$

Escrevendo-se (2.19) da forma (2.22), fixou-se \mathbf{x}_0 , o valor inicial da órbita em consideração, e assim ele não aparece explicitamente. Para definir-se unicamente \mathbf{J}_t a partir de (2.22) precisa-se adicionar uma condição inicial, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{I}$, a matriz identidade. Esta condição vem do fato de que $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ por definição. A equação variacional (2.22) é linear mesmo quando a equação diferencial original possuir termos não lineares. Porém, ao contrário da equação original (2.17) ela não é autônoma, já que $\mathbf{A}(t)$ é dependente do tempo em geral.

Integrando-se simultaneamente as Equações (2.17) e (2.22) em passos de $T = 1$ pode-se então calcular os expoentes de Lyapunov para uma órbita de (2.17) da mesma forma que no caso discreto.

No Apêndice A são mostradas as rotinas TEMPT e LYAPCONT escritas na linguagem do MATLAB para o cálculo numérico de expoentes de Lyapunov para um sistema de tempo contínuo. A primeira integra o sistema de equações formado pela equação diferencial que define o sistema e sua equação variacional durante um

tempo $T = 1$ para o caso tridimensional dados $\mathbf{g}(\cdot)$, sua matriz $\mathbf{A}(t)$ em função das variáveis de estado e a condição inicial. Utilizando esse resultado, a segunda rotina calcula a aproximação dos expoentes de Lyapunov da órbita. Nas seção 2.4.1 são mostrados exemplos de aplicações dessas rotinas para o sistemas de Lorenz e Rössler.

Com os conceitos discutidos até aqui é possível chegar agora a uma definição operacional de sinal caótico. Na próxima seção essa definição é dada e discutida. Em seguida, vários exemplos de sistemas de tempo discreto e de tempo contínuo que geram sinais caóticos são analisados.

2.4 Sistemas e sinais caóticos

Como foi dito no início deste capítulo, ainda não existe uma definição de *caos* que seja aceita por todos os pesquisadores. Aqui será utilizada a definição utilizada por J. A. Yorke na forma como foi expressa em [25] reproduzida abaixo:

Definição 23 Uma órbita de um sistema dinâmico de tempo discreto ou de tempo contínuo é dita *caótica* se ela:

1. possui dependência sensível às condições iniciais (DCI) e
2. é aperiódica.

Uma órbita com DCI, pela própria Definição 5 ou 10, não é estável. É sempre possível encontrar um ponto arbitrariamente próximo de sua condição inicial cuja órbita relacionada estará distante no espaço de fase depois de um certo tempo de simulação. É exatamente aí que reside a “imprevisibilidade” característica dos sistemas caóticos. Como, numa situação prática, nunca se sabe com toda a precisão as condições iniciais de uma órbita, é impossível prever o comportamento de um tal sistema após um certo tempo (conhecido como *tempo de horizonte*) dependente da incerteza na condição inicial.

Como já foi dito, os expoentes de Lyapunov funcionam como uma quantização da DCI. O seguinte teorema garante esse fato [25].

Teorema 2 Uma órbita de um sistema dinâmico de tempo discreto ou contínuo terá DCI se, e somente se, seu maior expoente de Lyapunov h^1 for positivo.

Levando-se em conta que os expoentes de Lyapunov medem exatamente a divergência exponencial de órbitas próximas, esse teorema é bastante intuitivo. Como o cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov já foi tratado na seção anterior, temos um critério mais objetivo para definir se uma órbita é caótica ou não:

Teorema 3 Uma órbita de um sistema dinâmico de tempo discreto ou contínuo é caótica se, e somente se,:

1. Seu maior expoente de Lyapunov h^1 é positivo e
2. ela é aperiódica.

A determinação da periodicidade de uma órbita é um assunto bastante complexo. Tanto que mesmo para sistemas dinâmicos muito estudados como o de Lorenz [6] a ser tratado adiante, não é de conhecimento deste autor que se tenha conseguido demonstrar até hoje que as órbitas estranhas que aparecem são aperiódicas apesar de haver fortes indícios de que elas possuem essa propriedade. Existem alguns resultados, sobretudo no caso discreto, que utilizam gráficos de transição e conceitos de topologia. Mais detalhes podem ser encontrados no Capítulo 3 de [25].

Como foi observado na Seção 2.3, se uma órbita com expoente de Lyapunov positivo for periódica, será uma órbita periódica instável, ou seja, repele as condições iniciais próximas. Assim, num experimento numérico é muito improvável a obtenção de uma órbita desse tipo. Esse fato pode ser utilizado como justificativa para que neste trabalho uma órbita seja considerada aperiódica se houver evidências numéricas disso. Em outras palavras, uma órbita será considerada aperiódica se, durante o intervalo de simulação, ela não apresentar comportamento periódico. Essa hipótese é utilizada em quase todos os trabalhos sobre sistemas dinâmicos não-lineares que visem aplicações práticas.

A seguir, são mostrados exemplos de sistemas que apresentam órbitas caóticas para ilustrar os conceitos anteriores. Primeiramente, é mostrado o mapa logístico, um caso discreto e unidimensional. Em seguida o mapa de Hénon, discreto e bidimensional e em seguida os sistemas de Lorenz e Rössler, de tempo contínuo e tridimensionais. Por último é apresentado o circuito de Chua e suas equações.

2.4.1 Exemplos

O Mapa Logístico Trata-se de um sistema paradigma em dinâmica não-linear, utilizado originalmente como modelo de populações. Ele é definido por

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n), \quad (2.23)$$

possuindo uma não-linearidade quadrática e um parâmetro a , com $1 < a \leq 4$. Pode-se mostrar que esse mapa possui, no máximo, uma órbita assintoticamente estável que atrai todas as outras com condição inicial no intervalo $[0, 1]$ exceto os pontos fixos e órbitas periódicas instáveis que são enumeráveis³ [25]. Assim, numa simulação, se houver uma órbita atratora ela será alcançada independentemente da condição inicial, a menos que esta coincida com pontos fixos ou com uma órbita periódica instável, o que é muito improvável. A Figura 2.3 mostra algumas órbitas obtidas para diferentes valores do parâmetro a e condições iniciais aleatórias escolhidas no intervalo $[0, 1]$.

Nesta figura, pode-se notar que o comportamento assintótico do sistema depende do parâmetro a . Variando-se seu valor as órbitas passam por mudanças estruturais conhecidas como *bifurcações*.

³Na verdade, essa propriedade vale para todos os mapas unimodais [34].

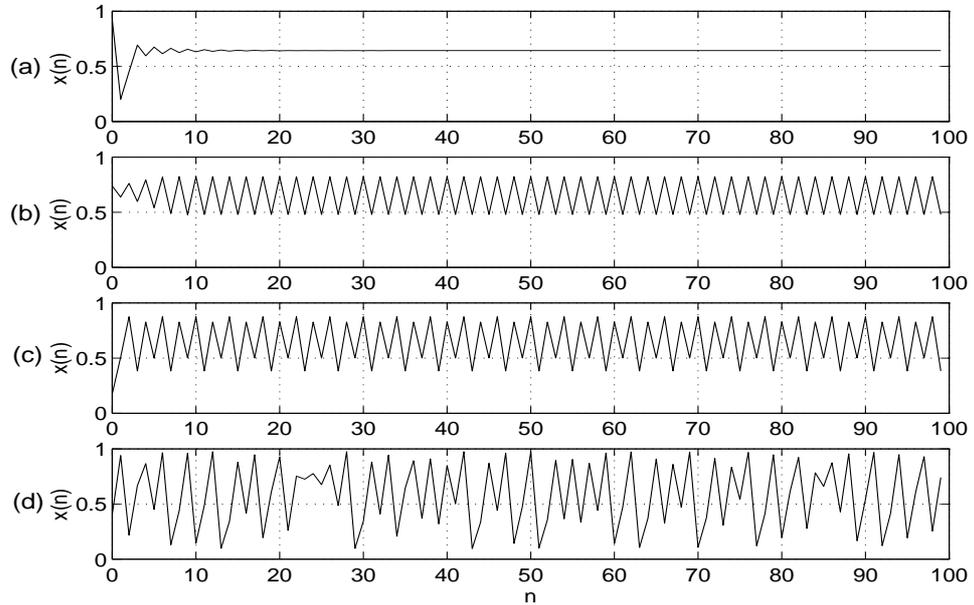


Figura 2.3: Órbitas do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro a e condições iniciais aleatórias. (a) $a = 2,8$ - ponto fixo estável; (b) $a = 3,3$ - órbita de período 2 estável; (c) $a = 3,5$ - órbita de período 4 estável; (d) $a = 3,9$ - regime caótico.

Na Figura 2.4(a) é mostrado o comportamento assintótico de uma órbita com condição inicial aleatória em função do parâmetro a . Cada fatia vertical é o atrator obtido para um valor fixo de a . Esta figura, conhecida como *diagrama orbital* foi contruída da seguinte forma: para cada valor de a , um valor inicial aleatório é escolhido em $[0, 1]$; é então calculada a órbita para essa condição utilizando-se (2.23) e os 100 primeiros pontos são descartados. Neste tempo, a órbita converge para o atrator. Os próximos 1000 pontos são desenhados e devem representar uma órbita sobre o (ou mais precisamente, infinitesimalmente próxima do) atrator. Os atratores para os valores de a utilizados na Figura 2.3 estão destacados.

Conforme a aumenta, o sistema passa por uma *cascata subharmônica* [34], ou seja, inicialmente tem-se um ponto fixo estável, depois uma órbita de período 2 que, depois de uma bifurcação, dá lugar a uma órbita estável de período 4, depois a uma de período 8 e assim por diante até que para um valor crítico do parâmetro $a_\infty = 3,5699456\dots$ o comportamento torna-se bastante estranho. Regiões em que a órbita assintótica parece cobrir intervalos inteiros (prenunciando um comportamento aperiódico) intercalam-se com *janelas de periodicidade*.

Na Figura 2.4(b) é mostrado o expoente de Lyapunov h de uma órbita do mapa logístico em função de a . Como neste caso a derivada de $f(\cdot)$ é conhecida explicitamente, o expoente foi calculado para cada valor do parâmetro utilizando-se (2.9) e (2.10) tendo sido utilizados os 1000 primeiros pontos da órbita como aproximação do limite. Esse gráfico mostra que para os valores de a em que uma órbita periódica atratora é estruturalmente estável, h é negativo, como esperado. Nos pontos de bifurcação ele passa por 0 e para $a > a_\infty$ ele assume um aspecto descontínuo,

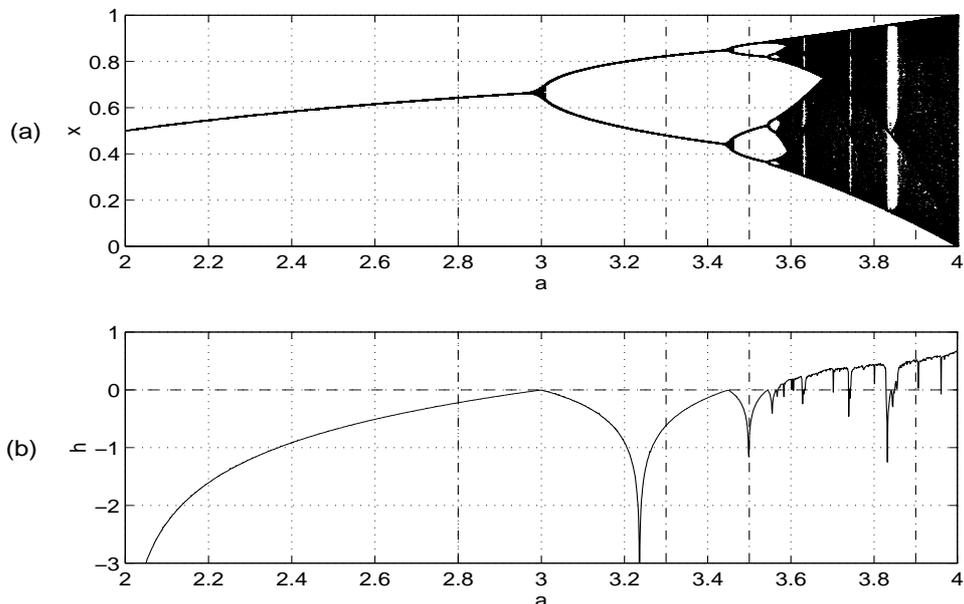


Figura 2.4: Caos no mapa logístico (2.23). (a) diagrama orbital: cenário de Feigenbaum via duplicação de período. Os valores de a que foram utilizados na Figura 2.3 estão indicados por linhas tracejadas. (b) Expoentes de Lyapunov em função de a .

sendo negativo nas janelas de periodicidade e positivo nas regiões aparentemente aperiódicas.

Assim, para alguns valores de $a > a_\infty$ o mapa logístico (2.23) fornece sinais caóticos. É interessante contrastar a simplicidade da equação (2.23) com o comportamento complexo apresentado na Figura 2.4. Vê-se que mesmo sistemas representados por equações muito simples podem dar origem a respostas caóticas, ou seja, essas não são de forma alguma “aberrações matemáticas” como se pensava até a metade do século XX.

Este tipo de diagrama em que órbitas caóticas aparecem através de uma *seqüência de duplicação de período* constitui o cenário de Feigenbaum para o aparecimento do caos sendo o mais estudado e com maior número de evidências experimentais [34].

O Mapa de Hénon O mapa de Hénon, proposto originalmente em [36] é definido pela seguinte equação:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n + 1 - ax_n^2 \\ bx_n \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

em que a e $b \in R$ são parâmetros. Para certos valores de a e b verifica-se que esse sistema apresenta comportamento caótico. Por exemplo, para $a = 1,4$ e $b = 0,3$ que foram utilizados no trabalho original de Hénon [36]. A Figura 2.5 mostra uma órbita típica desse sistema para esses valores dos parâmetros.

Utilizando-se a função LYPDISC2D listada no Apêndice A é possível calcular os expoentes de Lyapunov desse sistema. Para isso é preciso primeiramente definir

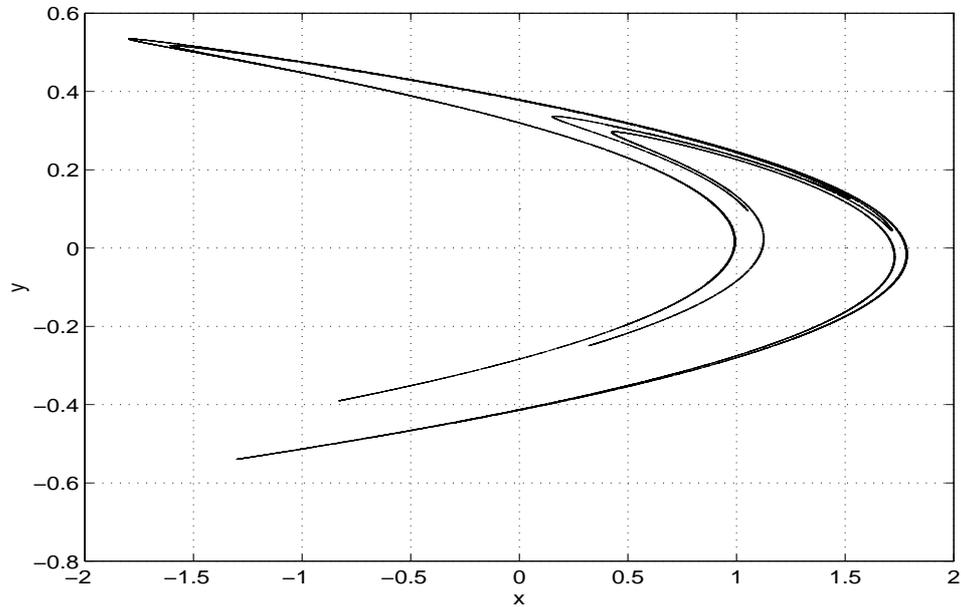


Figura 2.5: Primeiros 30000 pontos de uma órbita do mapa de Hénon (2.24) para $a = 1,4$ e $b = 0,3$.

duas funções: HENON e DHENON contendo a definição do mapa e sua matriz jacobiana respectivamente. Como para a $f(\cdot)$ da equação (2.24),

$$Df(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

estas funções podem ser escritas como a seguir:

```
%HENON.M - Mapa de Hénon
%[x(k+1)] = henon(x(k))
%Calcula a saída do mapa de Hénon para a = 1,4 e b = 0,3.
%x1(k+1) = a-x1(k)^2+x2(k)
%x2(k+1) = b*x1(k)
function [x] = henon(x),
a = 1,4; b = 0,3;
x = [a-x(1)^2+x(2); b*x(1)];

%DHENON.M - Matriz jacobiana para o Mapa de Hénon
%[dx] = dhenon(x)
%Calcula o valor da matriz jacobiana em x
%do mapa de Hénon para a = 1,4 e b = 0,3.
function [dx] = dhenon(x)
b = 0,3;
dx = [-2*x(1) 1;b 0];
```

Com essas definições, pode-se calcular os expoentes de Lyapunov de uma órbita com condição inicial \mathbf{x}_0 utilizando n pontos da órbita usando o comando

[h1, h2] = LYPDISC2D('henon', 'dhenon', x0, n). Fazendo esse cálculo para $\mathbf{x}_0 = (0; 0; 1)^t$ e $n = 30000$ obteve-se

$$h^1 = 0,4205 \quad \text{e} \quad h^2 = -1,6245 \quad (2.26)$$

valores muito próximos aos apresentados em [25], $h^1 = 0,42$ e $h^2 = -1,62$. Os expoentes de Lyapunov encontrados e o aspecto aperiódico da órbita observada levam a concluir que ela é caótica. O valor de h^1 e as características gerais das órbitas não mudam substancialmente quando as condições iniciais são alteradas.

O sistema de Lorenz O sistema de Lorenz [6] é o mais estudado sistema de equações diferenciais que apresenta comportamento caótico. Sua definição é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.27)$$

com $(x; y; z)^t \in R^3$ e parâmetros $\sigma, r, b > 0$. Estas equações foram obtidas para um modelamento extremamente simplificado da instabilidade de Rayleigh-Bérnard. Essa instabilidade surge quando um fluido é localizado entre duas placas horizontais estando a placa superior a uma temperatura menor do que a placa inferior, sendo essa diferença suficiente para que ocorra convecção. Nesse sistema, as variáveis $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ têm significados físicos bem definidos: $x(t)$ é proporcional à intensidade da convecção, $y(t)$ é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes de fluido ascendente e descendente e $z(t)$ é proporcional à distorção do perfil de temperatura vertical, relativamente a um perfil linear.

Em seu trabalho [6], Lorenz trabalha com $\sigma = 10$ (número de Prandtl), $b = 8/3$ (relacionado às dimensões físicas do sistema) e r (número de Rayleigh relativo) é tomado como parâmetro de controle. Lorenz mostra evidências numéricas de que para certos valores de r o sistema apresenta órbitas caóticas. Em particular, os valores

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad r = 28 \quad (2.28)$$

são utilizados em muitos trabalhos e serão utilizados nas análises aqui. Diversos trabalhos, inclusive o próprio [6] mostra evidências numéricas (como o mapa de Lorenz) de que, para esses valores, o sistema é estruturalmente estável e apresenta um número não-enumerável de órbitas caóticas.

A Figura 2.6 mostra uma órbita típica desse sistema para os valores de parâmetros (2.28). Aqui, a condição inicial é $(0; 1; 0)^t$, foi utilizado um passo de integração de $\Delta t = 0,01$ e integrou-se (2.27) até $T = 100$. Por essa figura, vemos que uma órbita típica desse sistema completa um certo número de voltas em torno de um foco instável e depois dirige-se para as redondezas de um outro foco em torno do qual realiza algumas voltas para depois retornar para a vizinhança do foco original e assim por diante. O caráter aperiódico de uma tal órbita é expresso principalmente pelo fato do número de voltas ao redor de cada foco a cada vez variar de forma errática.

A Figura 2.7 ilustra a dependência sensível às condições iniciais (DCI) que essas órbitas apresentam. Na parte (a) são traçadas as componentes x de duas órbitas:

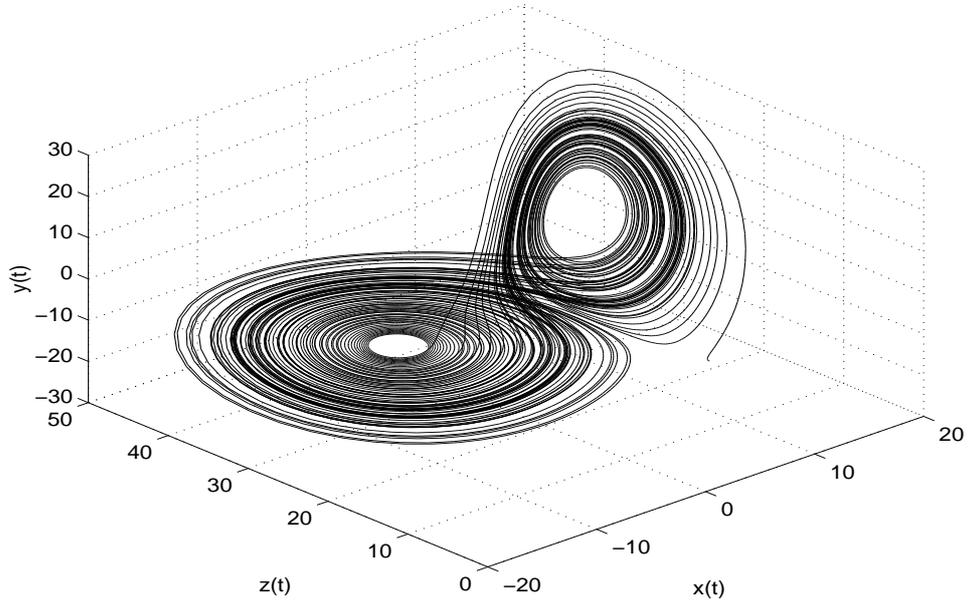


Figura 2.6: Órbita do sistema de Lorenz (2.27) com os parâmetros (2.28).

em linha grossa para uma órbita com condição inicial $(2; 5; 7)^t$ e em linha fina para uma outra órbita com condição inicial $(2, 01; 5; 7)^t$. Na parte (b) é apresentado o módulo da diferença entre as duas componentes. Percebe-se claramente que, apesar de inicialmente as duas órbitas estarem praticamente juntas no espaço de fase, depois de um tempo razoavelmente curto de simulação elas estão completamente separadas. De fato, para $t \approx 20$ uma órbita está girando em torno de um foco enquanto a outra está girando em torno do outro (Figura 2.6) e a diferença entre elas fica da ordem de grandeza do sinal $x(t)$.

Em seguida, calcula-se os expoentes de Lyapunov para esse sistema para os valores de parâmetros (2.28) utilizando-se o programa LYAPCONT listado no Apêndice A.

Para esse sistema, $\mathbf{A}(t)$ pode ser obtida diretamente derivando-se o segundo membro de (2.27). Assim,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z(t) & -1 & -x(t) \\ y(t) & x(t) & -b \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

e podem ser criadas duas funções LORENZ e DLORENZ para serem utilizadas com o programa LYAPCONT.

```
%LORENZ.m - Sistema de Lorenz
%[q] = lorenz(p)
function [q] = lorenz(p),
sigma = 10; b = 8/3; r = 28;
q = [-sigma*(p(1)-p(2)) -p(1)*p(3)+r*p(1)-p(2) p(1)*p(2)-b*p(3)];
```

```
%DLORENZ.m - Calculo de A(t) para o sistema de Lorenz
```

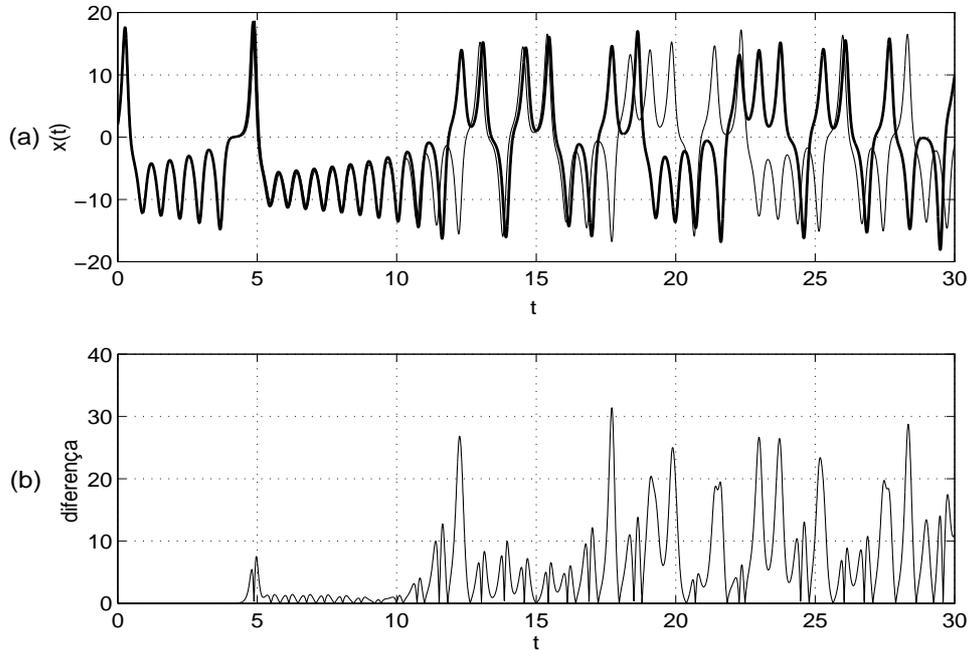


Figura 2.7: Sensibilidade às condições iniciais no sistema de Lorenz (2.27). (a) Componente x de duas órbitas com diferença de 1% em suas condições iniciais. (b) Variação da diferença entre as duas componentes com o tempo.

```
%[A] = dlorenz(p)
function [A] = dlorenz(p),
sigma = 10; b = 8/3; r = 28;
A = [-sigma sigma 0; r-p(3) -1 -p(1); p(2) p(1) -b];
```

Assim, usando o comando `[h] = lyapcont('lorenz', 'dlorenz', x0, n)`, pode-se calcular os expoentes de Lyapunov de uma órbita do mapa de Lorenz com condições iniciais x_0 e utilizando n passos na aproximação.

Executando este comando para as condições iniciais $x_0=[0 \ 1 \ 0]$ e $n=1000$ obteve-se $h=[0.8891 \ 0.0035 \ -14.5456]$. Os resultados obtidos concordam razoavelmente bem com os apresentados em [37] em que mostra-se que $h^2 = 0$ e $h^3 = -(\sigma + 1 + b) - h^1$. Neste caso, deveríamos ter $h^3 = -(10 + 1 + 8/3) - 0.8891 = -14.5557$. O valor positivo encontrado para h^1 comprova que a órbita estudada é realmente caótica. O valor desses expoentes não variou significativamente em simulações numéricas ao alterar-se a condição inicial da órbita.

O Sistema de Rössler Proposto em [38], este sistema surgiu da idéia de obter um sistema de equações diferenciais ainda mais simples que o de Lorenz (2.27) mas que ainda mantivesse a complexidade de suas órbitas. De fato, o sistema de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.30)$$

possui apenas uma não-linearidade (zx na terceira equação) enquanto o de Lorenz (2.27) possui duas (xz na segunda e xy na terceira equação). Apesar disso, para certos valores dos parâmetros, como

$$a = 0,2, \quad b = 0,2 \quad e \quad c = 5,7 \quad (2.31)$$

utilizados no artigo original, o sistema apresenta órbitas caóticas. Um exemplo de uma tal órbita é mostrada na Figura 2.8 em que se integrou o sistema (2.30) até $T = 500$ com um passo de integração de $\Delta t = 0,05$. Vê-se que a órbita gira em torno de um único foco instável, diferentemente do que acontecia com o sistema de Lorenz (Figura 2.6).

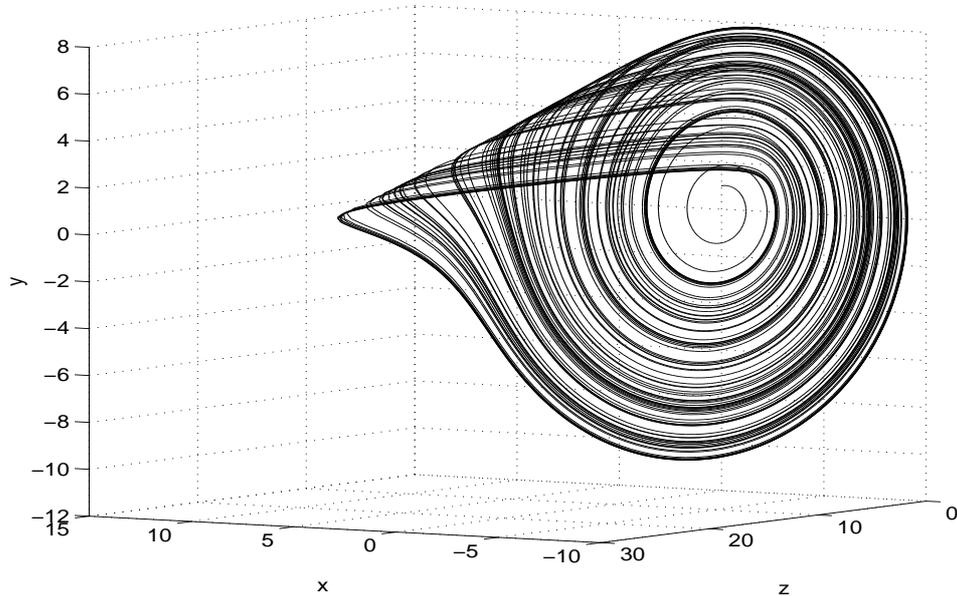


Figura 2.8: Órbita do sistema de Rössler (2.30) com os parâmetros (2.31).

Novamente é possível escrever rotinas para serem utilizadas com o programa LYAPCONT para determinar os expoentes de Lyapunov de uma órbita de (2.30). Procedendo dessa forma, obteve-se $h=[0.0024 \ -0.037 \ -5.4599]$ que se mostrou praticamente invariante independentemente da condição inicial utilizada. O valor positivo obtido para h^1 confirma o caráter caótico das órbitas desse sistema.

O circuito de Chua O circuito de Chua foi o primeiro sistema eletrônico projetado com o objetivo de gerar sinais caóticos [16]. O motivo de seu desenvolvimento foi o fato de que até 1983 ainda não havia sido possível realizar um circuito eletrônico que representasse as equações de Lorenz (2.27) e Rössler (2.30) de forma adequada. Esta dificuldade era causada pelas não-linearidades do tipo produto que aparecem nessas equações já que na época não havia um componente não-linear em circuito integrado que realizasse o produto com precisão satisfatoriamente grande.

O sistema proposto por Chua resolve esse problema substituindo a não-linearidade produto por uma função linear por partes. O diagrama esquemático do circuito de Chua está representado na Figura 2.9.

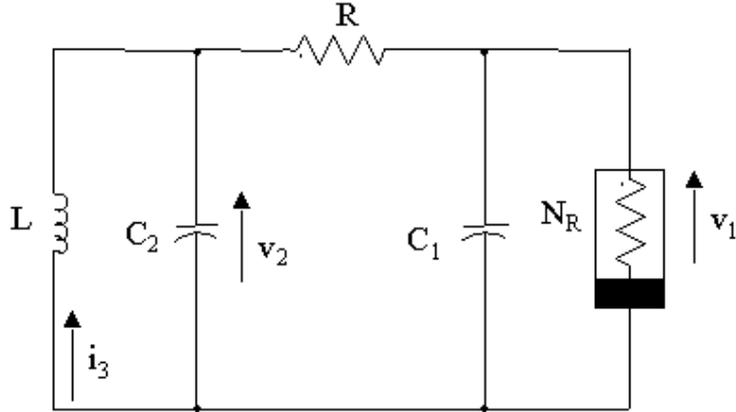


Figura 2.9: Diagrama esquemático do circuito de Chua

Esse circuito pode ser descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \frac{1}{C_1} [(Gv_2 - v_1) - f(v_1)] \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] \\ \dot{i}_3 = -\frac{1}{L}v_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

em que $G = \frac{1}{R}$ e

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) \cdot \{|v_1 + E| - |v_1 - E|\}, \quad (2.33)$$

com $|G_b| < |G_a|$ modela o resistor não-linear (linear por partes) com resistência negativa cuja curva característica está representada na Figura 2.10.

Mudando-se os parâmetros do circuito, consegue-se vários sinais caóticos com propriedades diferentes como o “Double Scroll” [17] e atratores topologicamente equivalentes ao de Rössler.

Como este sistema pode ser decomposto facilmente em uma parte linear e uma parte não-linear, é ideal para aplicação do método de Wu e Chua, como será visto no Capítulo 3.

Encerra-se assim esta revisão bibliográfica sobre sistemas e sinais caóticos. Os conceitos discutidos aqui serão utilizados nos próximos capítulos em que se estudam alguns sistemas de comunicações que utilizam esses sinais.

No capítulo seguinte será analisado o trabalho de Pecora e Carroll, pioneiro na aplicação da teoria de caos em sistemas de transmissão-recepção coerente de sinais.

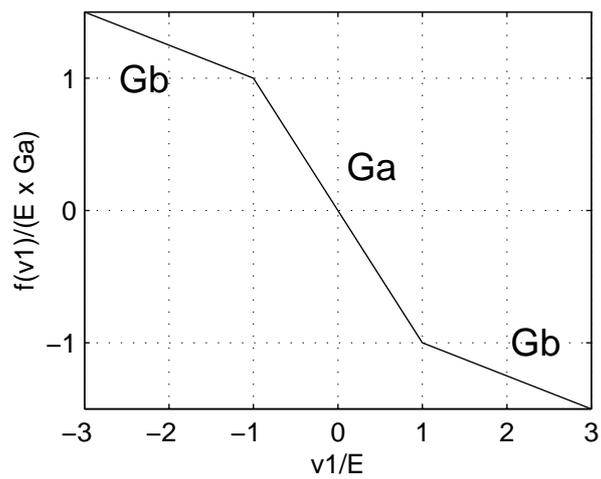


Figura 2.10: Curva característica da resistência negativa do resistor não-linear do circuito de Chua. A curva é linear por partes tendo coeficiente angular G_a em torno da origem e G_b ($|G_b| < |G_a|$) para $|v_1| > E$.

Considere-se então um sistema mestre-escravo como o da Figura 3.1. Seja p a dimensão (número de variáveis independentes) do sistema completo. Serão utilizados o vetor q -dimensional \mathbf{v} para representar as variáveis do mestre que não serão utilizados no escravo, o vetor k -dimensional \mathbf{u} para representar as variáveis do mestre que serão utilizadas no escravo e o vetor l -dimensional \mathbf{w} para representar as variáveis do escravo. Deve-se notar que $p = q + k + l$. O sistema original fica então dividido da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) && \text{dimensão } k \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) && \text{dimensão } q \end{aligned} \right\} \quad (\text{mestre}) \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{h}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad \text{dimensão } l \quad \left. \right\} \quad (\text{escravo}) \quad (3.2)$$

Quando o objetivo é o estudo do sincronismo é de interesse o caso particular em que $l = q$ e $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{h}(\cdot)$ conhecido como *sistema mestre-escravo homogêneo* [13]. Neste caso, (3.1) e (3.2) podem ser reescritas como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) && \text{dimensão } k \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) && \text{dimensão } q \end{aligned} \right\} \quad (\text{mestre}) \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} && \text{dimensão } k \\ \dot{\mathbf{v}}' &= \mathbf{f}(\mathbf{v}', \mathbf{u}) && \text{dimensão } q \end{aligned} \right\} \quad (\text{escravo}) \quad (3.4)$$

Deve-se notar que neste caso \mathbf{v}' e \mathbf{u}' indicam variáveis do subsistema escravo e não derivadas de \mathbf{v} e \mathbf{u} . Neste tipo de configuração, sempre que a condição inicial no mestre e no escravo for a mesma, $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t)$. O sinal $\mathbf{u}(t)$ é a informação que é passada do mestre para o escravo que tenta recriar o vetor $\mathbf{v}(t)$. Assim, $\mathbf{u}(t)$ será chamado de *sinal transmitido* ou *sinal de entrada* do sistema escravo.

Definida essa notação, o problema que se quer resolver aqui pode ser colocado da seguinte forma: quais são as condições que devem ser impostas em (3.3) e (3.4) para que transmitindo-se $\mathbf{u}(t)$ tenha-se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t) - \mathbf{v}(t)\| = 0$ para condições iniciais não necessariamente iguais no mestre e no escravo? Para estas condições, será dito que os dois subsistemas estão *sincronizados*.

Mais precisamente, será utilizada a seguinte definição de sincronismo [33]:

Definição 24 Considere dois sistemas dinâmicos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}')$. Sejam uma órbita do primeiro sistema $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ e uma do segundo $\mathbf{x}'(t, \mathbf{x}'_0)$. O sistema definido por $\mathbf{f}(\cdot)$ *sincroniza* com o sistema definido por $\mathbf{g}(\cdot)$ num subconjunto não-vazio de R^m denotado por D se para $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\} \subset D$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}'(t, \mathbf{x}'_0)\| = 0$. A sincronização é dita *global* se $D = R^m$ e *local* se D é um subconjunto próprio de R^m .

Pecora e Carroll [13] e depois He e Vaidya [33] propuseram o seguinte teorema:

Teorema 4 O sistema escravo (3.4) sincroniza com o sistema mestre (3.3) para condições iniciais $\mathbf{v}(0)$, $\mathbf{v}'(0)$ pertencentes a um conjunto $D \subset R^m$ se, e somente se, a órbita $\mathbf{v}'(t)$ do sistema escravo é assintoticamente estável para condições iniciais pertencentes a D .

Demonstração: Se as funções $\mathbf{f}(\cdot)$ e $\mathbf{g}(\cdot)$ satisfazem as condições colocadas na definição de sistemas dinâmicos de tempo contínuo (Definição 6), as soluções da Equação (3.3) e, conseqüentemente, da (3.4) são determinadas unicamente pelas suas condições iniciais. Estas soluções podem ser escritas como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{v}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) \quad (3.7)$$

com as condições iniciais sendo tomadas como

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}'_0 \quad (3.10)$$

Como as estruturas de $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ e $\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{f}(\mathbf{v}', \mathbf{u})$ são exatamente as mesmas, os parâmetros importantes nessa demonstração são essas condições. Inicialmente, como já foi dito, segue da unicidade que se fosse utilizado para o sistema escravo \mathbf{v}' a mesma condição inicial do sistema mestre \mathbf{v} , isto é, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0$ seriam obtidas as mesmas soluções no mestre e no escravo:

$$\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) = \mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \quad (3.11)$$

Em geral, $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}'_0$ e as órbitas no mestre e no escravo podem ser diferentes no começo.

Condição Suficiente. Se existe um subconjunto $D \subset R^m$ tal que quando as condições iniciais \mathbf{v}_0 e \mathbf{v}'_0 estão em D , as órbitas $\mathbf{v}'(t)$ são assintoticamente estáveis, então pela definição de estabilidade assintótica (Definição 17) obtém-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) - \mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| = 0. \quad (3.12)$$

Segue-se das Equações (3.11) e (3.12) juntas que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) - \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| = 0. \quad (3.13)$$

Assim, pela definição de sincronização utilizada (Definição 23), o mestre e o escravo estão sincronizados.

Condição Necessária. Suponha que exista um subconjunto $D \subset R^m$ tal que quando as condições iniciais de $\mathbf{v}'(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ estão em D o mestre e o escravo estão sincronizados. Pela definição de sincronização

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) - \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| = 0. \quad (3.14)$$

Suponha então que quando as condições iniciais de $\mathbf{v}(t)$ e de $\mathbf{v}'(t)$ do sistema escravo estão em D as soluções de $\mathbf{v}'(t)$ não são assintoticamente estáveis. Então, pela definição de estabilidade assintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) - \mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| \neq 0. \quad (3.15)$$

Por causa da unicidade de soluções,

$$\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0). \quad (3.16)$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}'_0) - \mathbf{v}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| \neq 0. \quad (3.17)$$

Este resultado está em contradição com a Equação (3.14). Assim, pode-se concluir que quando ocorre sincronismo, o sistema escravo deve possuir órbitas assintoticamente estáveis.

Assim, para saber se um sistema em configuração mestre-escravo entrará em sincronismo, basta determinar se o subsistema escravo é assintoticamente estável ou não. Para isso, lança-se mão dos *expoentes de Lyapunov condicionados*.

3.1.1 Expoentes de Lyapunov condicionados

Como foi visto na seção 2.3, os expoentes de Lyapunov medem a taxa de separação entre órbitas próximas por unidade de tempo (no caso contínuo) ou por iteração (caso discreto). Também foi visto que uma órbita que possui todos os expoentes negativos é assintoticamente estável.

Assim, tendo em vista o Teorema 4, uma forma de se determinar a possibilidade de sincronismo entre mestre e escravo é calcular os *expoentes de Lyapunov condicionados* [13] das órbitas deste último. Essa nomenclatura vem do fato de que o cálculo dos expoentes de Lyapunov ficar *condicionado* ao sinal de entrada $\mathbf{u}(t)$.

Uma condição necessária e suficiente para que os sistemas mestre e escravo sincronizem é que as órbitas do sistema escravo possua expoentes de Lyapunov condicionados negativos.

3.2 Resultados experimentais

Utilizando-se o programa MATLAB estudou-se e implementou-se computacionalmente sistemas caóticos sincronizantes utilizando-se as equações diferenciais de Lorenz (2.27) e Rössler (2.30). Ambos são sistemas dinâmicos tridimensionais. Nos dois casos, primeiro foram calculados os expoentes de Lyapunov condicionados para as várias possibilidades de escolha para o sinal transmitido do mestre para o escravo e depois verificou-se computacionalmente a ocorrência ou não de sincronismo. Por último, foi feita uma análise com relação ao descasamento dos parâmetros entre mestre e escravo.

No caso do sistema de Lorenz utilizou-se (2.27) para o sistema mestre. Assim, três possibilidades são possíveis para o escravo. Elas estão listadas abaixo juntamente com o sistema mestre:

Sistema mestre:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.18)$$

Sistema escravo com entrada $x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}' = -x(t)z' + rx(t) - y' \\ \dot{z}' = x(t)y' - bz' \end{cases} \quad (3.19)$$

Sistema escravo com entrada $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}' = -\sigma x' + \sigma y(t) \\ \dot{z}' = x'y(t) - bz' \end{cases} \quad (3.20)$$

Sistema escravo com entrada $z(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}' = -\sigma x' + \sigma y' \\ \dot{y}' = -x'z(t) + rx - y'. \end{cases} \quad (3.21)$$

Nessas equações os índices de tempo foram indicados somente nas posições em que os sinais comportam-se como *parâmetros variantes no tempo*.

Para as análises dessa seção os parâmetros foram fixados com os valores expressos em (2.28) reproduzidos a seguir:

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3 \quad e \quad r = 28. \quad (3.22)$$

Como mencionado anteriormente, para esses valores, o regime caótico é estruturalmente estável.

Utilizando o mesmo raciocínio para as equações de Rössler (2.30), temos os seguintes sistemas:

Sistema mestre:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.23)$$

Sistema escravo com entrada $x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}' = x(t) + ay' \\ \dot{z}' = b + z'(x(t) - c) \end{cases} \quad (3.24)$$

Sistema escravo com entrada $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}' = -(y(t) + z') \\ \dot{z}' = b + z'(x' - c) \end{cases} \quad (3.25)$$

Sistema escravo com entrada $z(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}' = -(y' + z(t)) \\ \dot{y}' = x' + ay' \end{cases} \quad (3.26)$$

Para estas equações os parâmetros também foram fixados de forma que o regime caótico fosse estruturalmente estável. Utilizou-se os valores (2.31) reproduzidos a seguir:

$$a = 0, 2, \quad b = 0, 2 \quad e \quad c = 5, 7. \quad (3.27)$$

3.2.1 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov condicionados

Para cada um dos seis subsistemas escravos listados na seção anterior, calculou-se numericamente os expoentes de Lyapunov condicionados. Este processo será ilustrado para o subsistema baseado nas equações de Lorenz com entrada $x(t)$, Equação (3.19).

A idéia para o cálculo é a mesma descrita na Seção 2.3.2. com a diferença de que agora o sistema em estudo é não-autônomo por causa da dependência da variável “externa” $x(t)$. Ou seja, as equações do sistema e sua matriz jacobiana precisam ser atualizados a cada passo de integração em função do estado do sistema mestre.

O procedimento de cálculo consiste assim em primeiramente calcular o mapa de retorno em $T = 1$ juntamente com a matriz jacobiana nesse instante para o sistema (3.19) sendo necessário para isso integrar-se simultaneamente as Equações (3.18). Implementou-se esse cálculo no MATLAB utilizando-se o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. O programa TEMPLORX colocado no Apêndice A ilustra esse procedimento. A função LORENZ utilizada é a mesma da página 23 e a matriz $A(t)$ neste caso é dada por:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -x(t) \\ x(t) & -b \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Em seguida, utilizando-se a rotina LORENZLYAPX, também listada no Apêndice A, são calculados os expoentes de Lyapunov condicionados. Esta rotina é praticamente idêntica à LYAPCONT da Seção 2.3.2. A diferença entre elas é que a rotina LORENZLYAPX é específica para as equações de Lorenz permitindo-se inclusive especificar-se parâmetros para o mestre e para o escravo, o que é útil na análise do erro causado pelo descasamento entre os parâmetros.

De forma similar podem ser feitas rotinas para o cálculo dos expoentes de Lyapunov condicionados de todos os outros sistemas listados na seção anterior. Os resultados obtidos estão listados na Tabela 3.1.

Sistema de	Sinal de entrada	Escravo	h_1	h_2	Sincronismo?
Lorenz	$x(t)$	(3.19)	-1, 7894	-1, 8528	Sim
	$y(t)$	(3.20)	-2, 6524	-9, 9299	Sim
	$z(t)$	(3.21)	0, 021	-10, 95	Não
Rössler	$x(t)$	(3.24)	0, 1987	-5, 4764	Não
	$y(t)$	(3.25)	0 ^(*)	-8, 8626	??
	$z(t)$	(3.26)	0, 0990	0, 0996	Não

Tabela 3.1 - Expoentes de Lyapunov condicionados obtidos para os sistemas de Lorenz e Rössler. ^(*)Neste caso o expoente calculado ficou muito próximo de zero assumindo algumas vezes valores positivos e outras vezes negativos, dependendo da condição inicial utilizada.

Esta tabela foi construída utilizando as rotinas computacionais para várias condições iniciais diferentes tanto no mestre quanto no escravo e utilizando-se 150 iterações do mapa de tempo-1 dos sistemas de Lorenz e Rössler. Foram tomadas condições iniciais aleatórias dentro do conjunto $[-30, 30] \times [-40, 40] \times [0, 50]$ e os valores obtidos mostraram-se independentes desses valores, com exceção do sistema de Rössler com entrada $y(t)$.

De acordo com esta tabela e com a Seção 3.1.1 é de se esperar então que os sistemas baseados nas equações de Lorenz com escravo com entrada $x(t)$ ou $y(t)$ sincronizem com seus respectivos mestres (pelo menos no domínio de condições iniciais estudado) enquanto que o com entrada $z(t)$ não sincronize.

No caso das equações de Rössler, não deve ocorrer sincronismo no caso do sistema com entrada $x(t)$ e $z(t)$. Já no caso do sistema escravo com entrada $y(t)$ obteve-se um expoente h_1 muito próximo de zero o que aparentemente significa que para alguns valores de condições iniciais ocorre uma divergência muito lenta entre os estados do mestre e do escravo e para outros uma convergência muito lenta.

As simulações computacionais confirmam essas expectativas, como mostrado na seção seguinte.

3.2.2 Simulações computacionais do sincronismo

Com os valores de expoentes de Lyapunov listados na Tabela 3.1 é possível prever a ocorrência ou não do sincronismo entre subsistemas mestre e escravo. Para verificar computacionalmente essas previsões simulou-se os sistemas mestres e escravos obtidos a partir das equações de Lorenz e Rössler (ver equações da Seção 3.2) utilizando-se o MATLAB.

Utilizou-se neste processo o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo de integração $\Delta t = 0, 002$. Trata-se do mesmo método já utilizado nas rotinas de cálculo de expoente de Lyapunov já citadas. Como exemplo, a Figura 3.2 ilustra o sistema

discretizado utilizado na simulação do sistema mestre-escravo obtido através das equações de Lorenz e utilizando-se $x(t)$ como entrada do escravo. Nesta figura, as variáveis discretizadas são utilizadas com o índice discreto n .

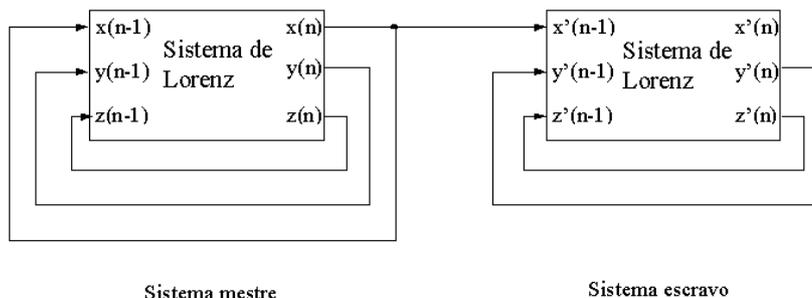


Figura 3.2: Exemplo de sistema utilizado nas simulações computacionais: sistema mestre-escravo utilizando as equações de Lorenz utilizando $x(t)$ como entrada no escravo.

As Figuras 3.3 e 3.4 mostram os sinais obtidos no mestre e no escravo para o sistema de Lorenz utilizando-se $x(t)$ como entrada do escravo (Equações (3.18) e (3.19)) tendo sido utilizadas condições iniciais bem diferentes nos dois subsistemas:

$$\mathbf{v}_0 = (x_0; y_0; z_0)^t = (-10; -20; 30)^t \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_0 = (y'_0; z'_0)^t = (30; 10)^t. \quad (3.29)$$

Como previsto na Tabela 3.1, ocorre o sincronismo entre mestre e escravo. A Figura 3.5 mostra que o erro de sincronismo cai de forma exponencial e para $t \approx 20$ já está da ordem de grandeza do erro computacional ($\approx 10^{-15}$).

As Figuras 3.6 e 3.7 mostram os resultados da simulação do sistema quando é utilizado como sinal de entrada $y(t)$. O que pode-se notar nessas figuras é que o sincronismo ocorre de forma mais “rápida” do que no caso anterior. Este fato poderia ser previsto pelo fato de que, para este caso, $|h^1|$ é maior do que no caso do sinal de entrada ser $x(t)$. Basta lembrar que os expoentes de Lyapunov são uma medida da divergência (ou convergência, nesse caso) entre órbitas com condições iniciais próximas. O erro de sincronismo continua caindo de forma exponencial só que com uma constante de tempo menor, como mostra a Figura 3.8.

Nestas figuras, as condições iniciais utilizadas no mestre são as mesmas de (3.29) e no escravo utilizou-se como condições iniciais $\mathbf{v}'_0 = (x'_0; z'_0)^t = (30; 10)^t$.

Em seguida foram feitas simulações com o sistema de Lorenz com entrada $z(t)$. Nesse caso, a Tabela 3.1 prevê que não ocorre sincronismo. De fato, a Figura 3.11 mostra que o erro não cai mais exponencialmente como nos dois casos anteriores ficando estável em aproximadamente 10^{-2} (0,1% da amplitude média dos sinais). Porém, as Figuras 3.9 e 3.10 mostram que, apesar do sincronismo não ser exato, o escravo segue de muito perto o mestre no espaço de fase. É como se houvesse um “sincronismo imperfeito”. Isto se deve ao fato de que o expoente de Lyapunov positivo desse sistema ser muito próximo de zero, praticamente não existindo divergência entre as trajetórias depois de um certo tempo de simulação.

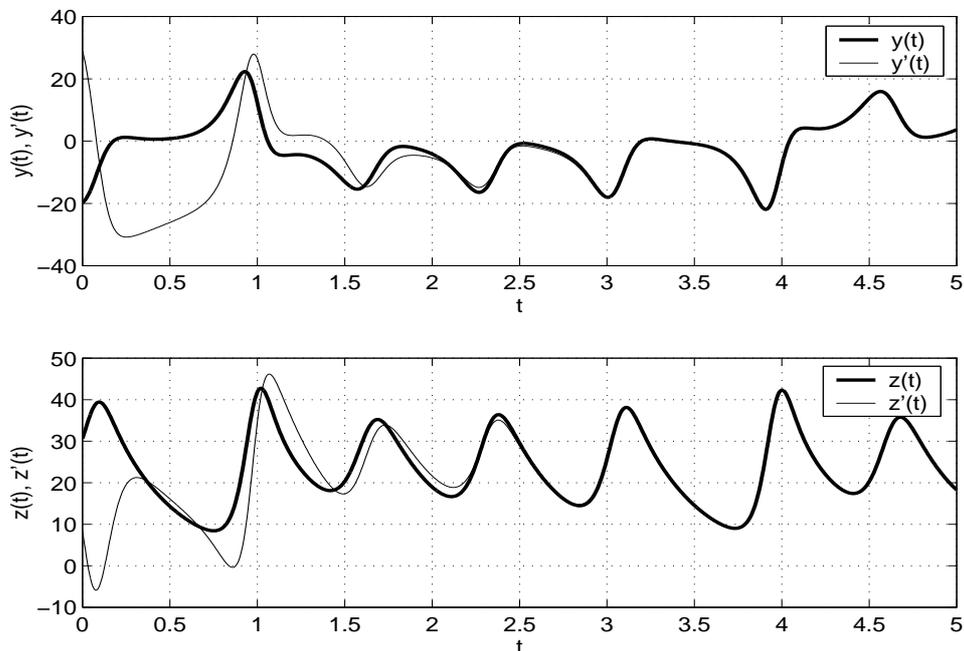


Figura 3.3: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando-se as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ e condições iniciais (3.29).

O que se pode notar também é o fato de que as componentes $x'(t)$ e $y'(t)$ assumem valores bastante elevados e distantes do mestre antes de ocorrer o “sincronismo”. Esta característica mostrou-se presente independentemente das condições iniciais utilizadas. Para as simulações aqui apresentadas, utilizaram-se no mestre as mesmas condições de (3.29) e no escravo utilizou-se $\mathbf{v}'_0 = (x'_0; y'_0)^t = (30; 10)^t$.

No caso do sistema de Rössler, a Tabela 3.1 mostra que, pelo menos no caso dos sinais de entrada serem $x(t)$ ou $z(t)$ não ocorrerá o sincronismo. As Figuras 3.12 a 3.14 mostram o comportamento divergente para o sinal de entrada $x(t)$.

Para o sinal de entrada $y(t)$ o sincronismo ou sua ausência não pode ser determinado apenas através da Tabela 1. Simulações mostram que nesse caso, dependendo das condições iniciais de mestre e escravo, as respostas podem convergir muito lentamente ou divergir muito lentamente. Este caso é tratado com detalhes em [13].

Comprovou-se assim numericamente os resultados esperados pela análise dos expoentes de Lyapunov condicionados da Tabela 3.1.

Na próxima seção será estudado o efeito no sincronismo do descasamento dos parâmetros entre mestre e escravo.

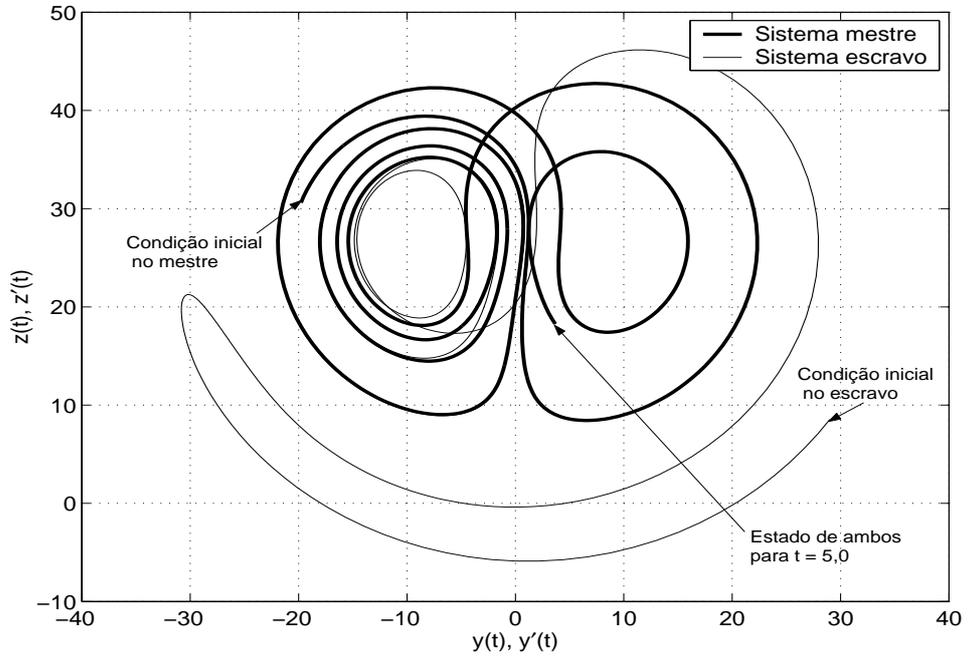


Figura 3.4: Projeção da órbita do sistema mestre e órbita do sistema escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ e condições iniciais (3.29).

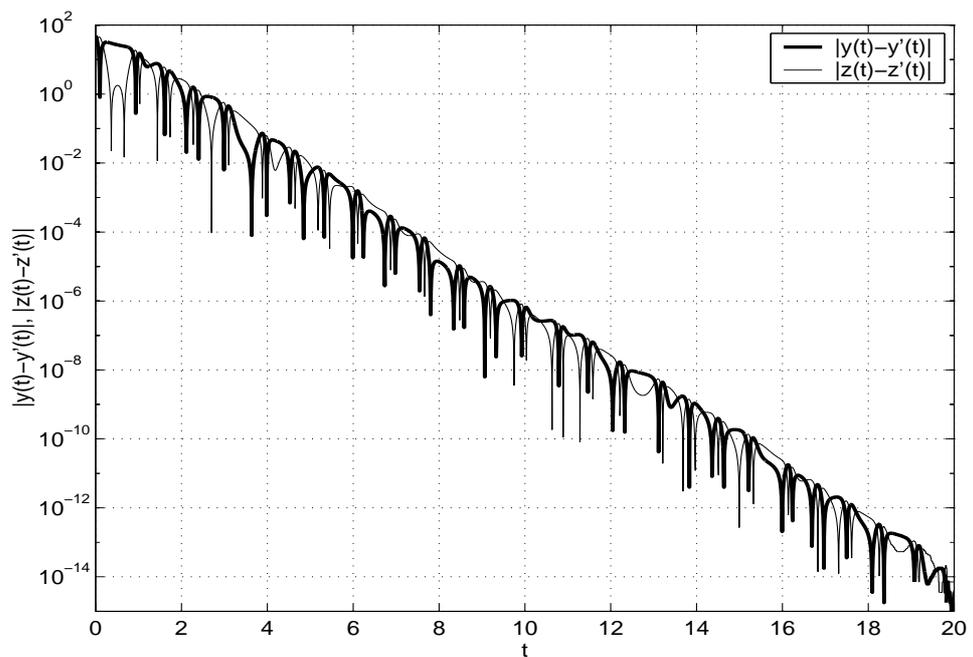


Figura 3.5: Erro de sincronismo entre os subsistemas mestre e escravo formado pelas equações de Lorenz com entrada $x(t)$ e condições iniciais (3.29).

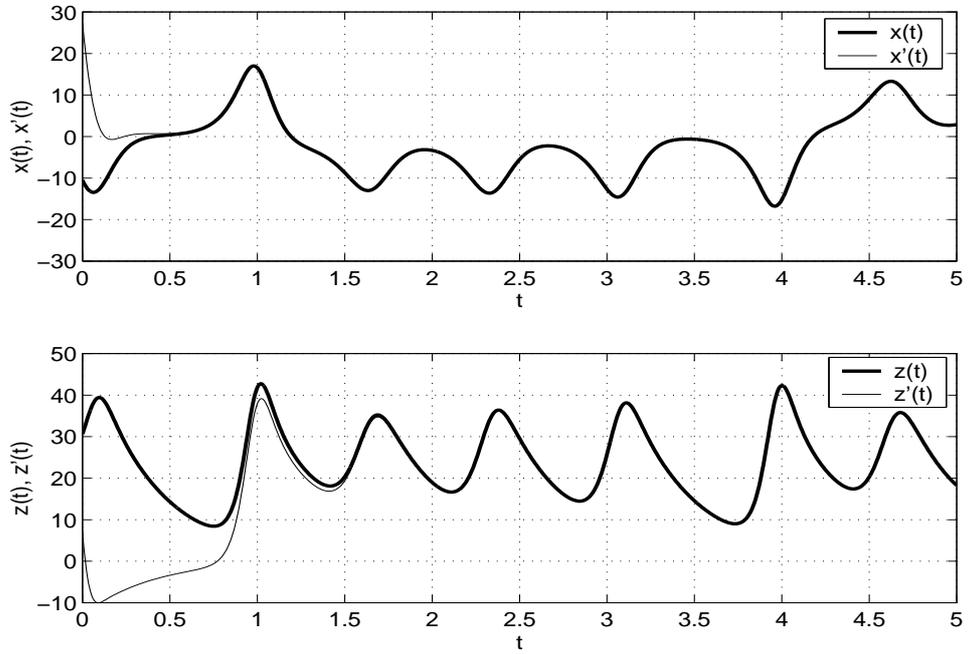


Figura 3.6: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $y(t)$.

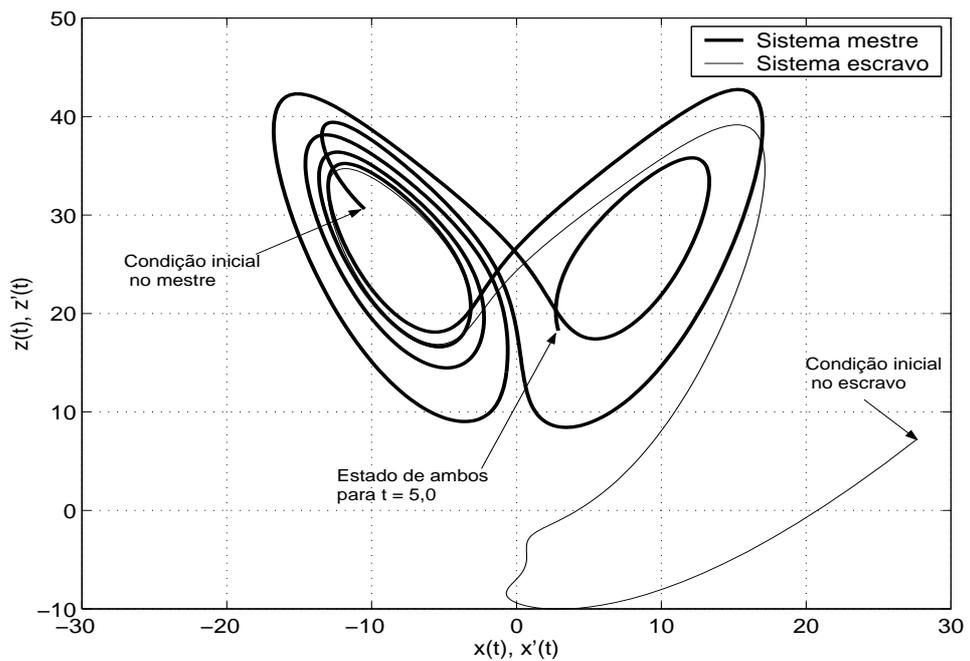


Figura 3.7: Projeção de uma órbita do sistema mestre e órbita do sistema escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $y(t)$.

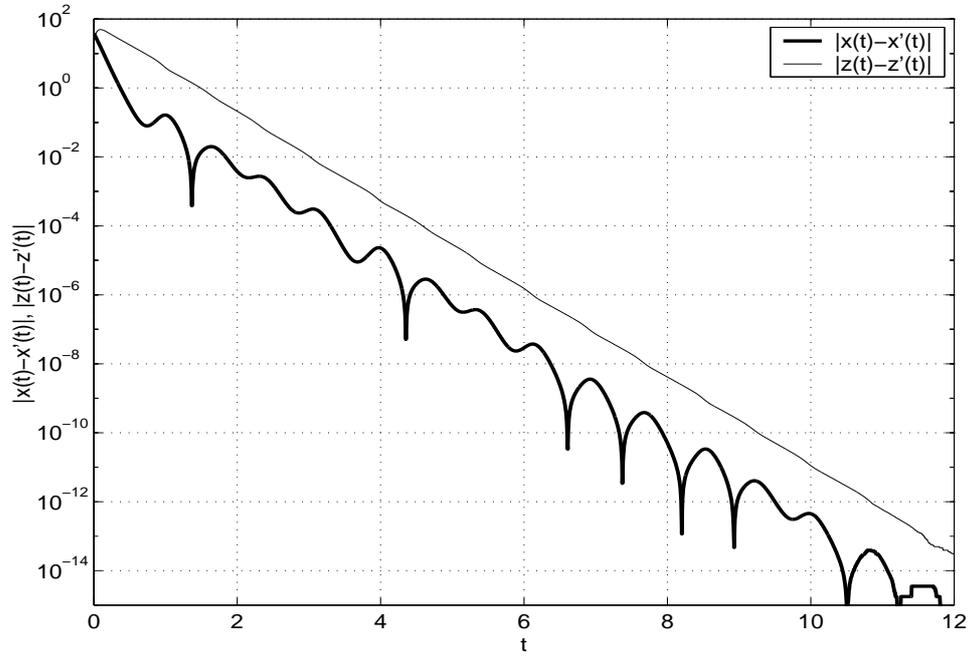


Figura 3.8: Erro de sincronismo entre sistemas mestre e escravo com as equações de Lorenz com entrada $y(t)$.

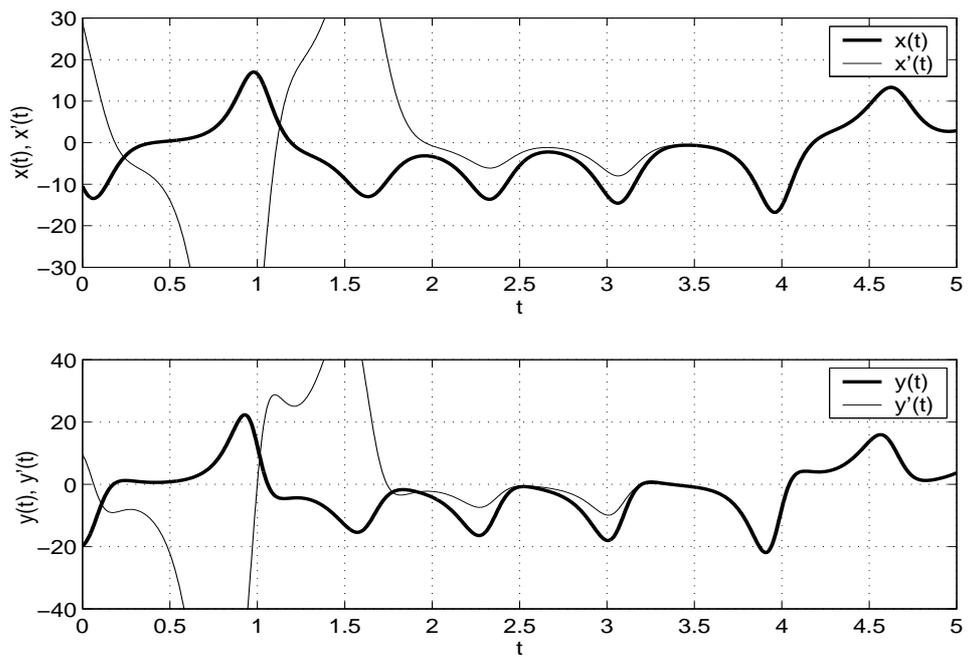


Figura 3.9: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $z(t)$.

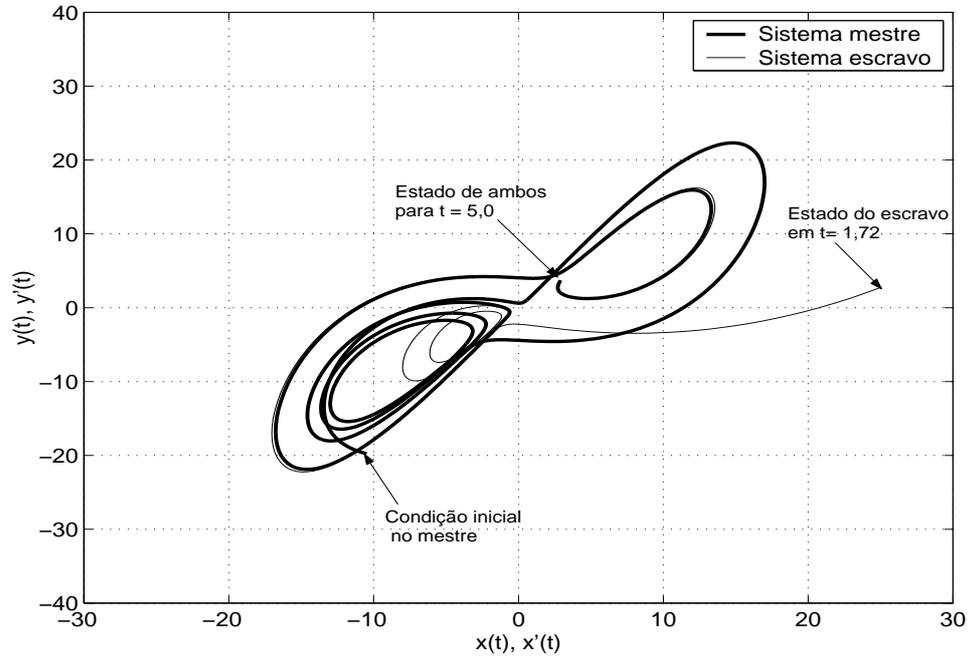


Figura 3.10: Projeção de uma órbita do sistema mestre e órbita do sistema escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $z(t)$.

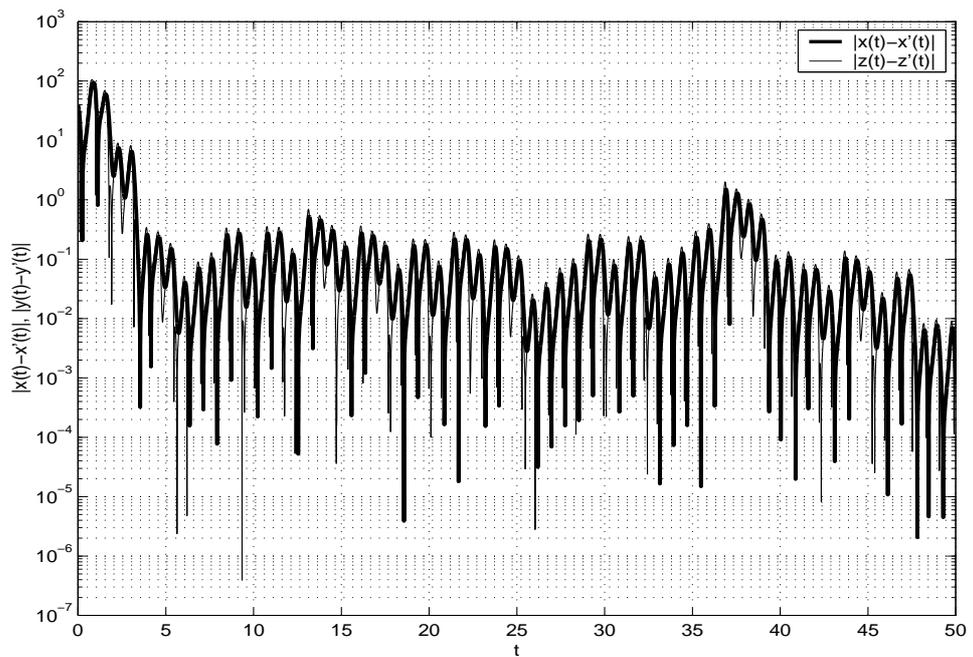


Figura 3.11: Erro de sincronismo entre sistemas mestre e escravo com as equações de Lorenz com entrada $z(t)$.

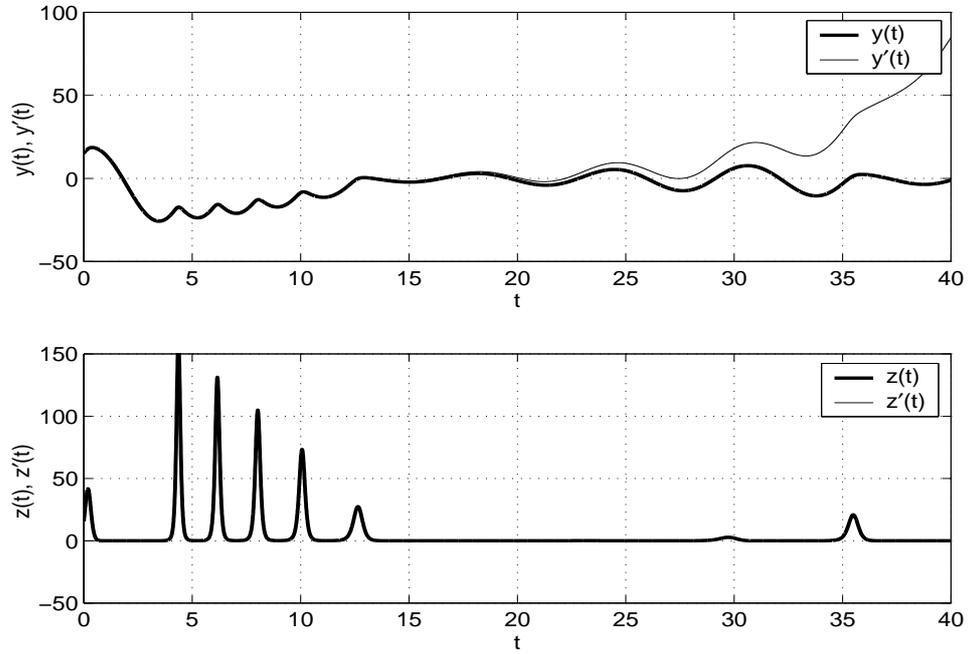


Figura 3.12: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando-se as equações de Rössler com entrada $x(t)$.

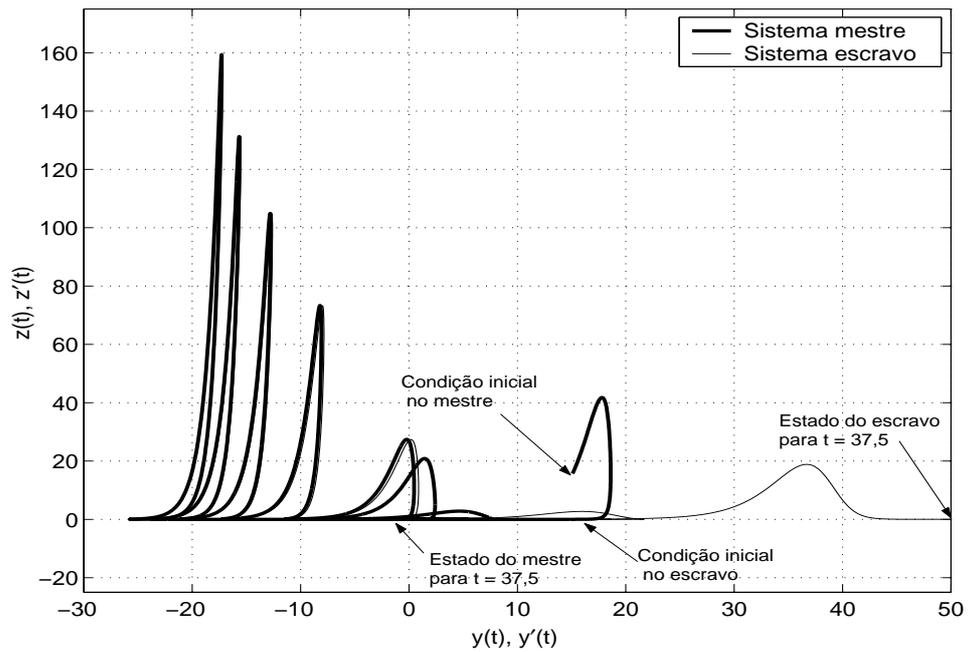


Figura 3.13: Projeção de órbita do sistema mestre e órbita do sistema escravo para as equações de Rössler utilizando-se $x(t)$ como entrada.

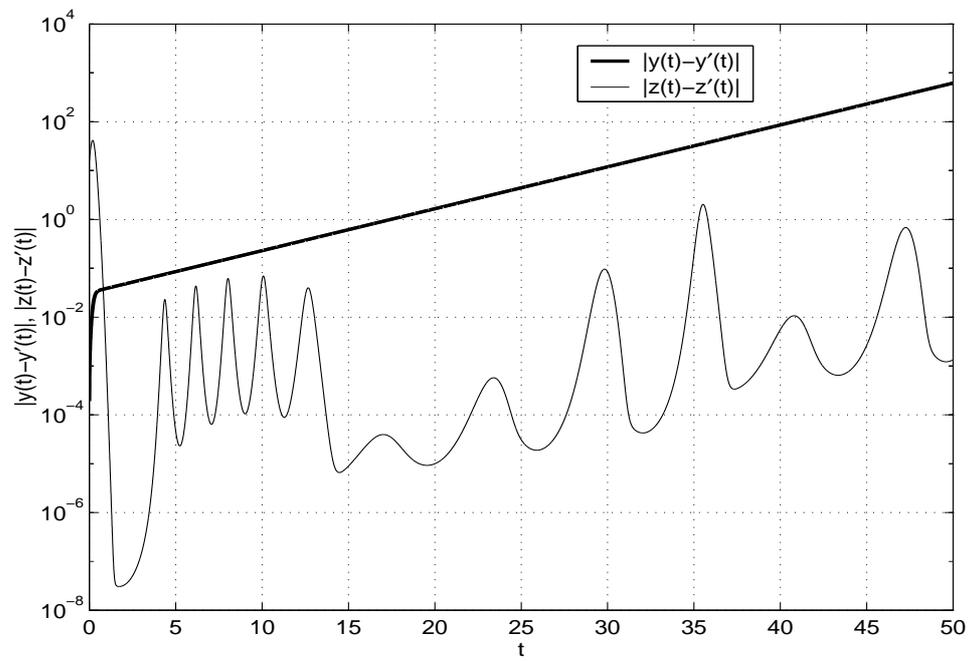


Figura 3.14: Erro de sincronismo entre os sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Rössler com entrada $x(t)$.

3.2.3 Sensibilidade da sincronização com relação ao descasamento dos parâmetros do mestre e do escravo

Uma consideração importante a ser estudada é o que ocorre com o erro de sincronismo quando há uma pequena diferença entre os parâmetros dos sistemas mestre e escravo. Este é um fator a ser levado em conta em qualquer aplicação prática que queira utilizar o sincronismo de sistemas caóticos.

Seja um sistema mestre-escravo que sincronize caso os parâmetros dos seus subsistemas sejam idênticos. Chamando de $\boldsymbol{\mu}$ o vetor dos parâmetros do sistema mestre e de $\boldsymbol{\mu}'$ o vetor de parâmetros do sistema escravo, Pecora e Carroll em [13] concluem que o erro de sincronismo causado por uma diferença entre $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\mu}'$ é limitado por um valor proporcional a $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}'\|$, desde que o sistema seja estruturalmente estável na faixa de variação dos parâmetros. Uma demonstração desse fato é apresentada em [39].

Simulações numéricas comprovaram este resultado e mostraram que a constante de proporcionalidade, pelo menos nos casos estudados (sistemas de Lorenz e Rössler), é bastante próxima da unidade. Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'(t) - \mathbf{v}(t)\| \approx \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}'\|. \quad (3.30)$$

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram o resultado das simulações do sistema mestre-escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ (Equações (3.18) e (3.19)) quando os parâmetros do mestre são dados por (3.22) e os do escravo por

$$\sigma = 10, \quad b = 1,01 \times 8/3, \quad r = 28, \quad (3.31)$$

ou seja, quando há uma diferença de 1% no valor de b .

A Figura 3.16 mostra que o sincronismo não é mais exato ocorrendo uma diferença entre os estados dos sistemas mestre e escravo no regime permanente. Porém, essa diferença é pequena, da ordem de 1% (levando-se em conta que os sinais $y(t)$ e $z(t)$ têm valor médio da ordem de 10), ou seja, o sistema escravo acompanha razoavelmente bem o mestre.

Por outro lado, quando a diferença entre os parâmetros torna-se maior, mas ainda no domínio de estabilidade estrutural do regime caótico, o erro de sincronismo torna-se maior. Como exemplo, as Figuras 3.17 e 3.18 ilustram a situação em que, no sistema escravo utiliza-se o parâmetro $b = 1,1 \times 8/3$, ou seja, há uma diferença de 10% entre os parâmetros do mestre e do escravo.

A Figura 3.18 mostra que o erro de sincronismo após o transitório é de cerca de 10% o que confirma a proporcionalidade descrita anteriormente. Aumentando o descasamento dos parâmetros por um fator de 10, o erro de sincronismo é multiplicado pelo mesmo fator.

Esta dependência da sincronização com os parâmetros pode ser utilizada, por exemplo, para um sistema de comunicações que utilize a modulação dos parâmetros para transmissão de informações. Este sistema utilizaria um sistema mestre-escravo sendo o mestre no transmissor e o escravo no receptor. Assim, associaria a sincronização (parâmetros do transmissor e do receptor iguais) ao bit 1, por exemplo,

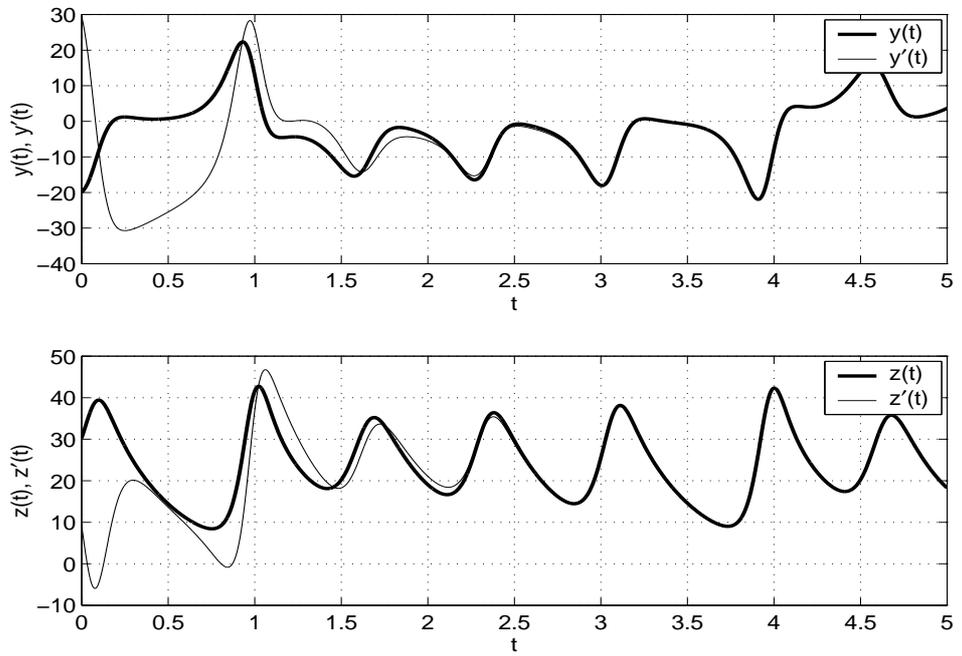


Figura 3.15: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando-se as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ com um descasamento de 1% nos parâmetros.

e a ausência de sincronismo (parâmetros diferentes no transmissor e no receptor) ao bit 0. Este sistema é melhor detalhado no Capítulo 5.

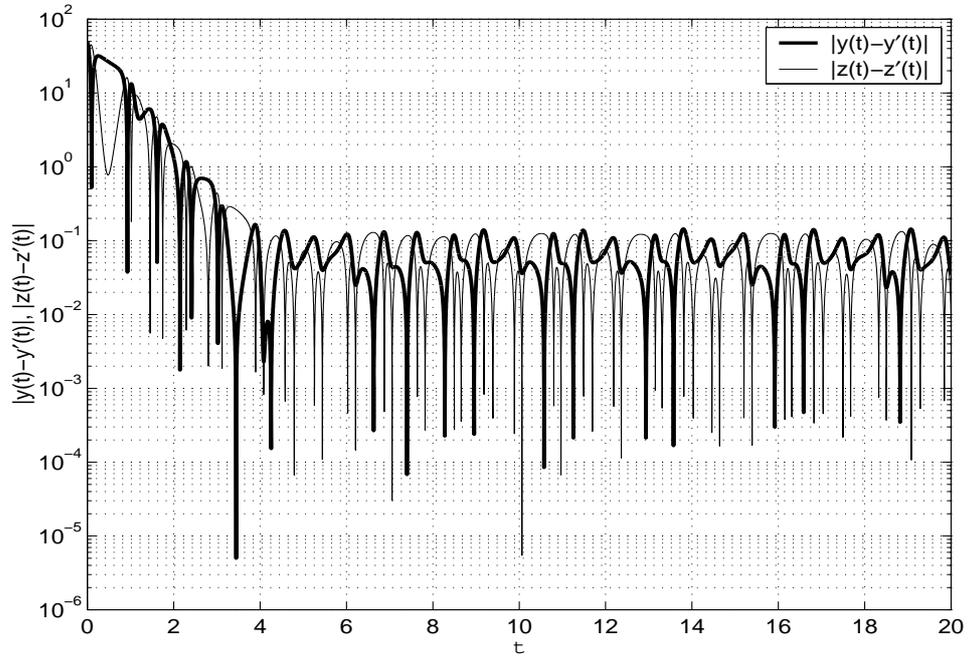


Figura 3.16: Erro de sincronismo entre os sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ com descasamento de 1% nos parâmetros.

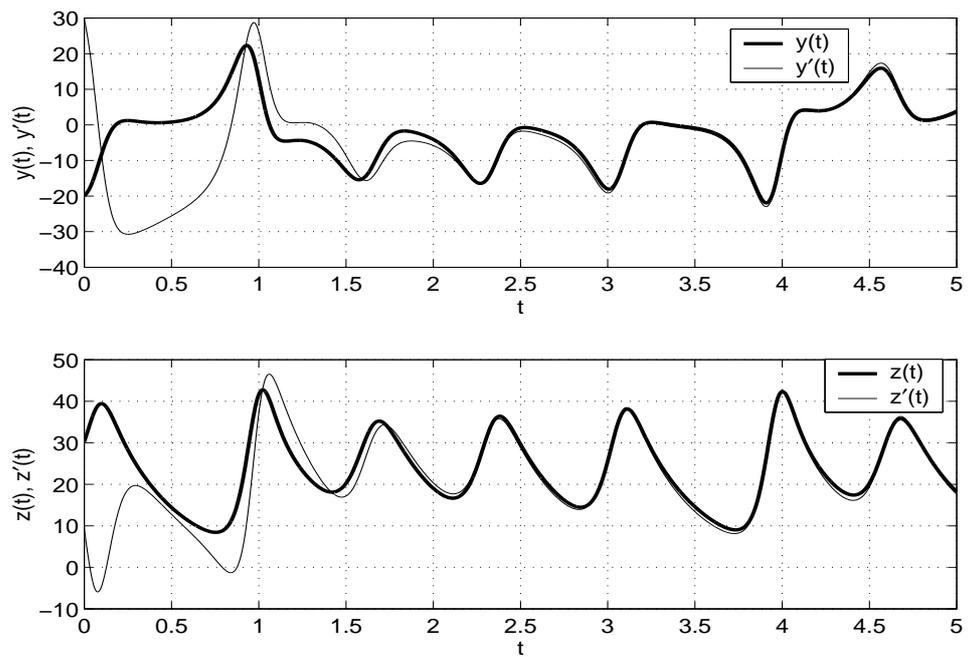


Figura 3.17: Sinais obtidos nos sistemas mestre e escravo utilizando-se as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ com um descasamento de 10% nos parâmetros.

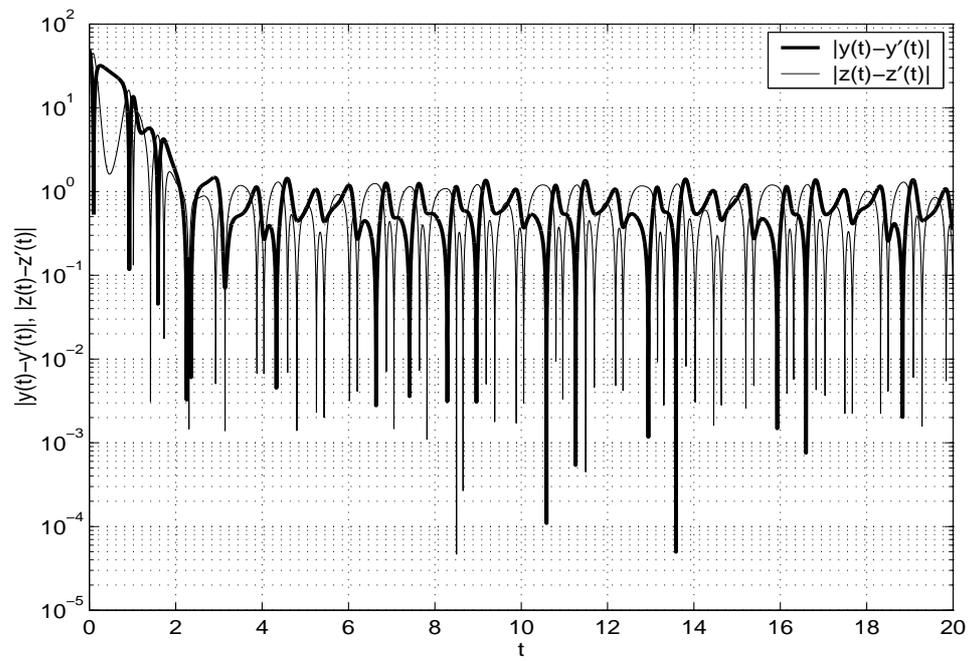


Figura 3.18: Erro de sincronismo entre os sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x(t)$ com descasamento de 10% nos parâmetros.

3.2.4 Complemento: Demonstração analítica do sincronismo para o sistema utilizando as equações de Lorenz

Em alguns casos, é possível fazer a demonstração do sincronismo analiticamente, sem ser necessário lançar mão do cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov condicionados. Para isso, utilizam-se funções de Lyapunov. Como exemplo, será demonstrado a seguir o sincronismo do sistema de Lorenz com entrada $x(t)$ (3.18) - (3.19) [10]. Suas equações estão repetidas a seguir por conveniência:

Sistema mestre:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.32)$$

Sistema escravo:

$$\begin{cases} \dot{y}' = -x(t)z' + rx(t) - y' \\ \dot{z}' = x(t)y' - bz' \end{cases} \quad (3.33)$$

As variáveis do sistema escravo podem ser reagrupadas como

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Da mesma forma, as respectivas variáveis no mestre podem ser agrupadas no vetor

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Com essas variáveis, define-se o vetor erro como

$$\mathbf{e} = \mathbf{t} - \mathbf{r} = \begin{pmatrix} e_y \\ e_z \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Desta forma, subtraindo-se (3.33) de (3.32), tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} - \dot{y}' \\ \dot{z} - \dot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y - xe_z \\ xe_y - be_z \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Definindo-se então a função de Lyapunov $E = \frac{1}{2}(e_y^2 + e_z^2)$, tem-se:

$$\dot{E} = e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z = e_y(-e_y - xe_z) + e_z(xe_y - be_z) = -e_y^2 - be_z^2 \leq 0, \quad (3.38)$$

em que o sinal de igualdade vale apenas na origem do espaço de fase. Assim, o erro de sincronismo (3.36) converge para zero para quaisquer condições iniciais e o subsistema (3.33) sincroniza globalmente com o sistema mestre (3.32).

Apesar de possível neste exemplo, em geral é difícil encontrar uma função de Lyapunov para um sistema, daí o enfoque dado nesse trabalho ao procedimento numérico usando expoentes de Lyapunov condicionados.

Nos próximos dois capítulos serão analisadas algumas possibilidades de aplicação do sincronismo de sinais caóticos para a transmissão de informações. Primeiramente, pensando-se em transmissão analógica e depois em transmissão digital.

Capítulo 4

Sistemas de comunicação analógica utilizando sinais caóticos

Neste capítulo serão analisados dois sistemas de comunicação baseados no sincronismo de sistemas caóticos. Primeiramente será analisado o sistema proposto por Cuomo e Oppenheim [15] que tem um princípio de funcionamento bastante simples porém não apresenta bons resultados já que o sinal de informação é simplesmente adicionado ao sinal caótico gerado no transmissor o que dá origem a erros de sincronismo.

A seguir, é tratado o sistema de Wu e Chua [20] que pode ser considerado uma evolução com relação ao primeiro sistema. O sinal de informação agora é inserido dentro do laço de geração do sinal caótico no transmissor ocorrendo sincronismo perfeito no caso do canal de comunicações ser ideal.

Um dos objetivos deste capítulo será exatamente estudar o comportamento deste último sistema numa condição em que o canal não é ideal. Aqui pretende-se avaliar seu desempenho quando há ruído gaussiano branco aditivo no canal ou este é limitado em banda.

4.1 O sistema de Cuomo e Oppenheim

O diagrama esquemático da Figura 4.1 ilustra o sistema de comunicações utilizando sincronismo de sinais proposto por Cuomo e Oppenheim em [15].

O transmissor é constituído por um oscilador que gera o sinal caótico $x(t)$. Nos experimentos numéricos a serem feitos aqui, serão utilizadas as equações de Lorenz (3.18) para gerar esse sinal caótico. Nessas condições, quando $m(t) \equiv 0$, o sistema da Figura 4.1 é um sistema mestre-escravo formado com as Equações (3.18)-(3.19) e ocorre sincronismo global, ou seja $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = x(t)$.

A idéia é então é somar a $x(t)$ o sinal de informação (ou *mensagem*) $m(t)$ bastante atenuado de forma que o sinal transmitido $s(t)$ satisfaça $s(t) = x(t) + m(t) \approx x(t)$. Desta forma, ocorre um sincronismo aproximado, $x'(t) \approx x(t)$ e na saída do receptor temos $m'(t) = s(t) - x'(t) = m(t) + x(t) - x'(t) \approx m(t)$ e a mensagem é recuperada.

Nas simulações utilizadas para estudar esse sistema, o sistema de Lorenz foi integrado com um passo de integração de $\Delta t = 0,03$. Porém, para que o espectro do

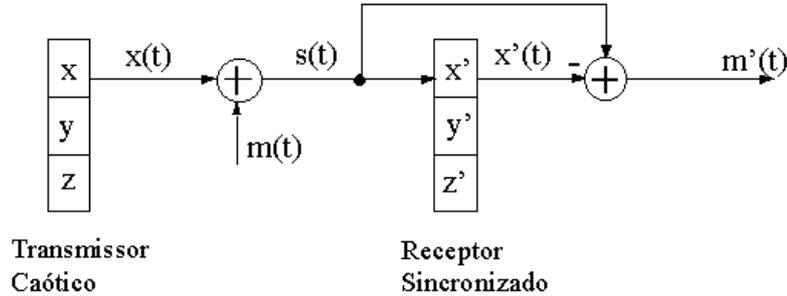


Figura 4.1: Sistema de comunicação proposto por Cuomo e Oppenheim.

se o sinal caótico tivesse uma queda lenta o suficiente e assim cobrir o espectro do sinal de informação, cada mostra de $m(t)$ foi somada com uma amostra de $x(t)$ tomada a cada dois passos de integração.

É importante notar que nesse sistema o sincronismo entre mestre e escravo não é perfeito o que ocasiona um erro na recuperação da mensagem $m(t)$ mesmo quando todos os fatores que influenciam no funcionamento do sistema são ideais (o canal de comunicações é perfeito, os parâmetros são idênticos no transmissor e no receptor, etc.). Tudo se passa como se a própria mensagem fosse um ruído para o sistema.

A Figura 4.2 mostra o aspecto no tempo e a densidade espectral de potência (DEP) do sinal transmitido $s(t)$ quando $m(t) \equiv 0$. Considerou-se que os sinais foram amostrados a uma taxa de $f_a = 8kHz$, ou seja, com um período de amostragem de $T_a = 0,125ms$. Pode-se ver que o sinal tem uma faixa de passagem bastante larga e no tempo apresenta a aperiodicidade característica de sinais caóticos.

Em seguida foram feitos testes para a transmissão de sinais. Primeiramente verificou-se qual deveria ser a atenuação do sinal $m(t)$ com relação a $x(t)$ para que $m(t)$ não fosse perceptível dentro do sinal $s(t)$ tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Chegou-se a uma atenuação necessária de $60dB$, valor que foi utilizado nas simulações apresentadas aqui.

Inicialmente, tomou-se $m(t) = A \sin(2\pi ft)$, em que $A = 10^{(-60/20)+1}$ o que garante a atenuação de $60dB$ com relação a $x(t)$ que tem potência média de $20dB$ com relação à unidade. Foram adotados dois valores para f : $f = 3500Hz$ (alta frequência) e $f = 500Hz$ (baixa frequência).

Os sinais obtidos para essas senóides no domínio do tempo e da frequência são mostrados nas Figuras 4.3 a 4.6.

Pelas figuras, vê-se que a recuperação da mensagem $m(t)$ é bastante deficiente principalmente no caso de baixas frequências. Para este caso, a Figura 4.5(d) mostra que o erro $|m(t) - m'(t)|$ é da ordem de 10^{-2} , ou seja, da mesma ordem de grandeza de $m(t)$.

Já no caso da senóide em $3500Hz$, o erro fica em torno de 10^{-3} , ou seja a aproximadamente 10% da raiz do valor quadrático médio de $m(t)$ o que permite uma recuperação razoável de $m(t)$ no receptor como a Figura 4.3(c) atesta.

Estes resultados mostram que o problema do erro de sincronismo é mais grave

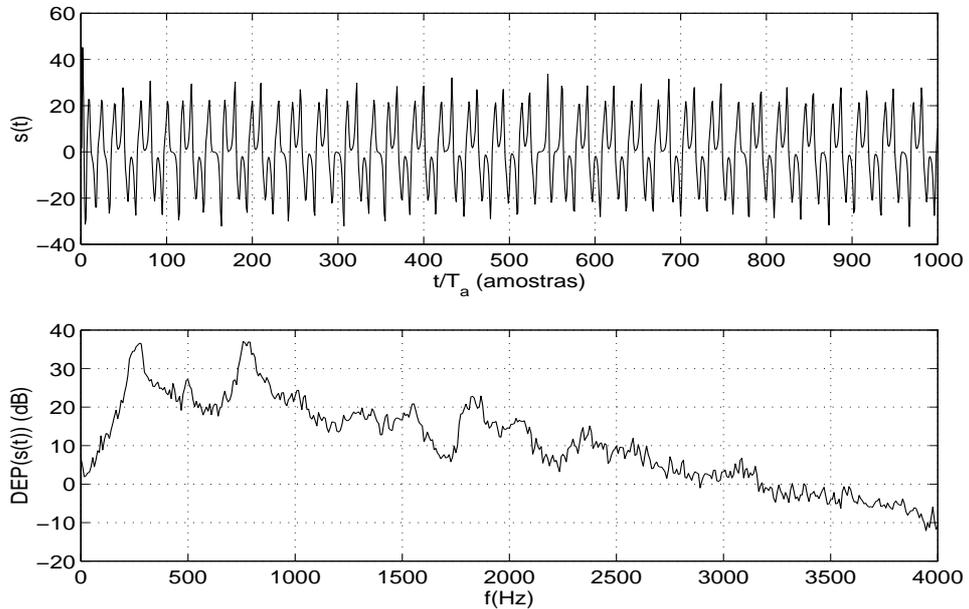


Figura 4.2: Sinal transmitido pelo sistema da Figura 4.1 e sua densidade espectral de potência (DEP) quando o sinal de informação $m(t)$ é identicamente nulo.

quando $m(t)$ (ou seja, o “ruído” inserido no sinal de entrada do receptor $x(t)$) está concentrado em baixas frequências.

O desempenho do sistema também não é bom quando o sinal a ser transmitido espalha-se por uma faixa larga do espectro. As Figuras 4.7 e 4.8 mostram os sinais obtidos quando $m(t)$ é uma onda quadrada.

Vê-se que o sistema não consegue reproduzir o sinal retangular no receptor. Na verdade, neste caso, o sistema só consegue detectar o sincronismo ou sua ausência quando $m(t) = 0$ ou $m(t) \neq 0$ respectivamente como pode ser visto pelo gráfico do erro (Figura 4.7(d)).

Estes resultados podem levar à conclusão que o sistema proposto por Cuomo e Oppenheim tem um desempenho realmente péssimo. Porém, no caso de $m(t)$ ser um sinal de voz ou musical com uma taxa de amostragem bastante alta (caso analisado no artigo original [15]), o ouvido humano consegue entender $m'(t)$ como uma versão ruidosa de $m(t)$. Este ruído concentra-se principalmente em baixas frequências. Como ilustração, as Figuras 4.9 e 4.10 mostram a mensagem $m(t)$, o sinal transmitido $s(t)$, o sinal recuperado $m'(t)$ e o erro $|m(t) - m'(t)|$ no domínio do tempo e da frequência respectivamente quando o sinal de teste $m(t)$ é uma música amostrada a $f_a = 8kHz$ atenuada de $60dB$ com relação a $x(t)$. O sinal recuperado é perfeitamente audível apesar de apresentar um chiado em baixa frequência.

O aspecto periódico do sinal de erro da Figura 4.9(d) é devido a este se concentrar em baixas frequências e o sinal musical ter uma batida grave periódica. A Figura 4.10 mostra que nas altas frequências $m'(t)$ aproxima-se muito mais de $m(t)$ do que o que ocorre em baixas frequências.

O erro no receptor $|m(t) - m'(t)|$ pode ser analisado tratando-se os sinais $x(t)$ e

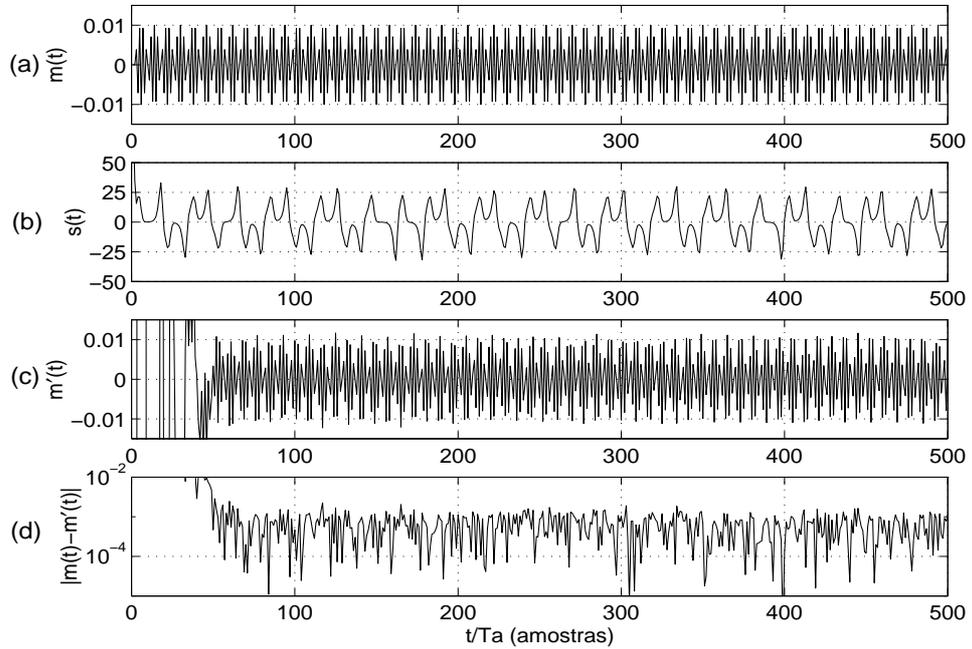


Figura 4.3: Transmissão de sinal senoidal de alta frequência utilizando-se o sistema da Figura 4.1. (a) $m(t)$ - Sinal senoidal de $3,5kHz$ amostrado a $f_a = 8kHz$; (b) $s(t)$ - Sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - Sinal recuperado; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

$s(t)$ como parâmetros variáveis no tempo no transmissor e no receptor respectivamente. Quando $m(t) \equiv 0$, $s(t) = x(t)$, não há descasamento entre os parâmetros e, portanto, a recuperação do sinal é perfeita. Porém, quando $m(t) \neq 0$ e $s(t) \neq x(t)$ ocorre um erro de sincronismo devido a um descasamento. Esta situação já foi tratada na Seção 3.2.3. O que se verificou lá é que o erro de sincronismo nesta situação é proporcional à diferença de parâmetros entre mestre e escravo.

Desta forma, o erro de sincronismo seria proporcional ao valor médio da mensagem $m(t)$ o que poderia impossibilitar sua recuperação no receptor. Porém, as simulações computacionais mostram que a densidade espectral de potência deste erro está concentrada principalmente em baixas frequências tornando possível a transmissão de sinais de voz, por exemplo, desde que com taxas de amostragem bastante altas.

O sistema de Cuomo e Oppenheim realmente não tem possibilidade de aplicação prática; o que se viu é que mesmo em condições ideais de canal o seu desempenho não é dos melhores. Uma idéia mais interessante será tratada a seguir: o sistema proposto por Wu e Chua que, como será mostrado, apresenta erro nulo no caso de canal ideal.

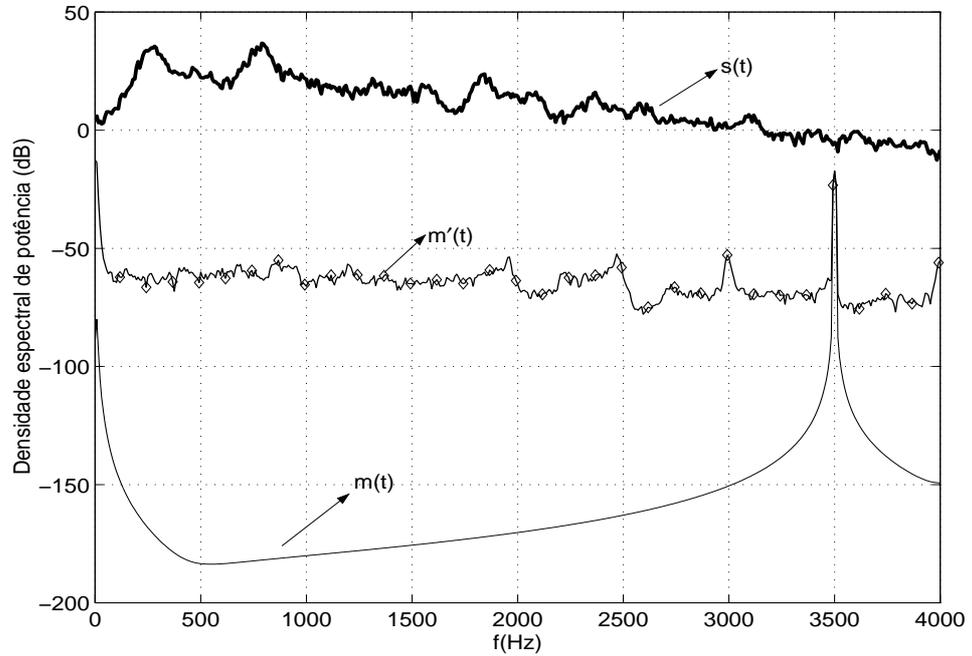


Figura 4.4: Densidade espectral de potência dos sinais da Figura 4.3.

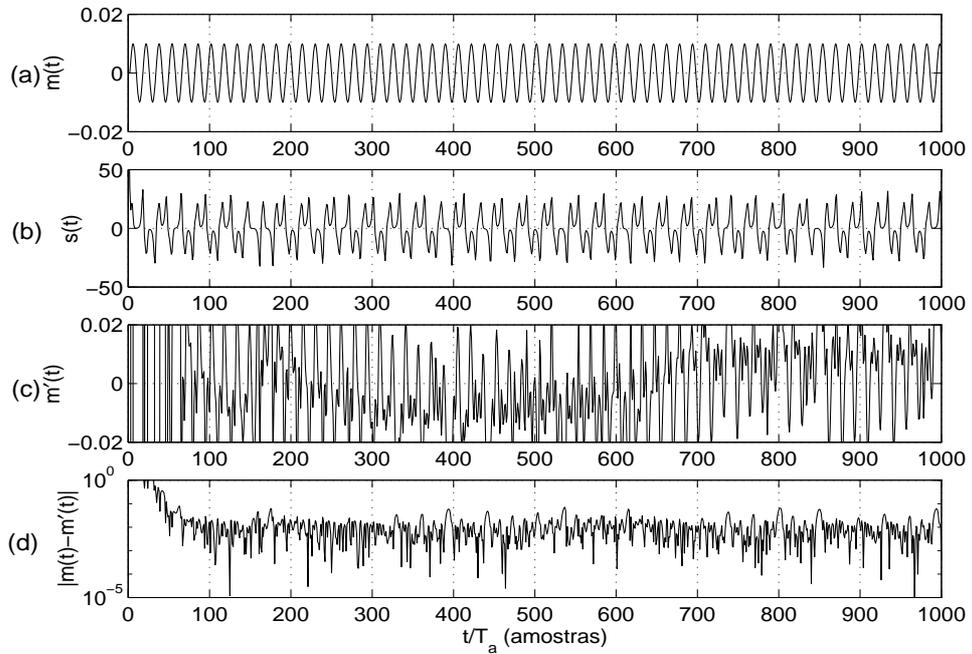


Figura 4.5: Transmissão de sinal senoidal de baixa frequência utilizando-se o sistema da Figura 4.1. (a) $m(t)$ - Sinal senoidal de 500Hz amostrado a $f_a = 8\text{kHz}$; (b) $s(t)$ - Sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - Sinal recuperado; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

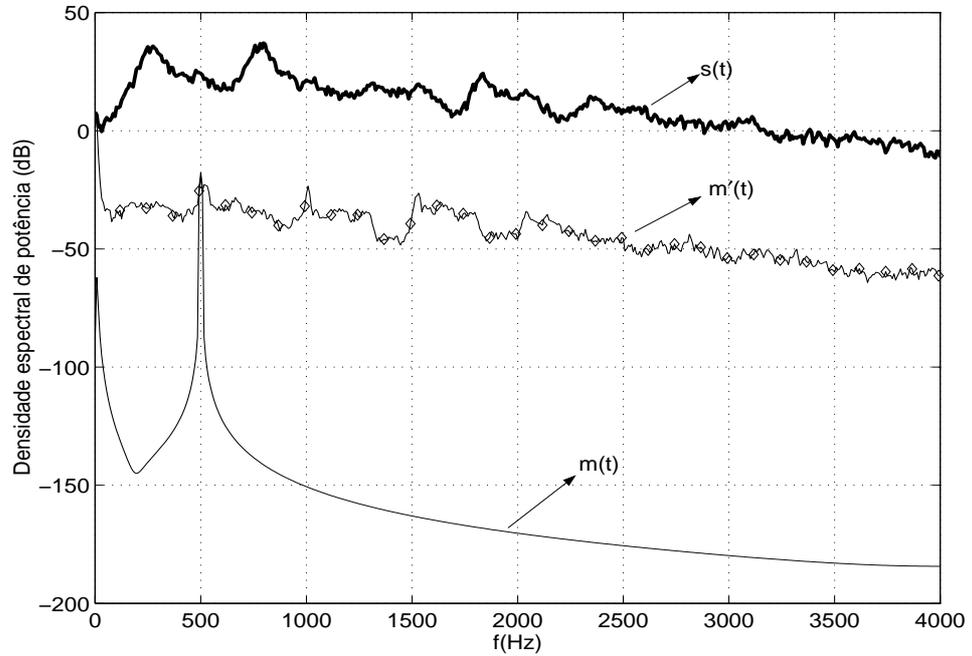


Figura 4.6: Densidade espectral de potência dos sinais do exemplo da Figura 4.5.

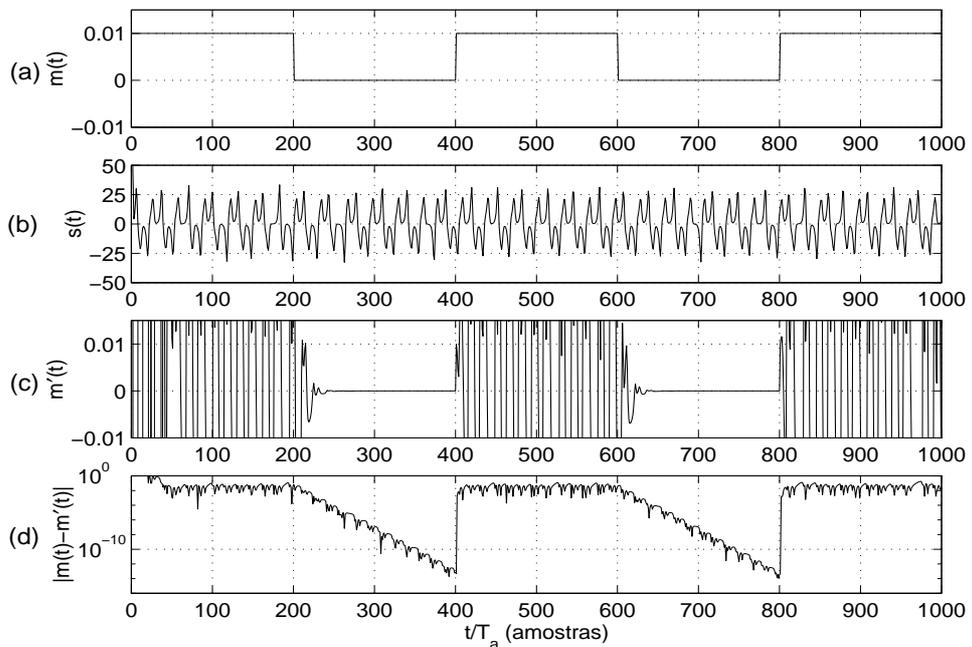


Figura 4.7: Transmissão de sinal retangular utilizando-se o sistema da Figura 4.1. (a) $m(t)$ - onda quadrada; (b) $s(t)$ - sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - sinal recuperado; (d) sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

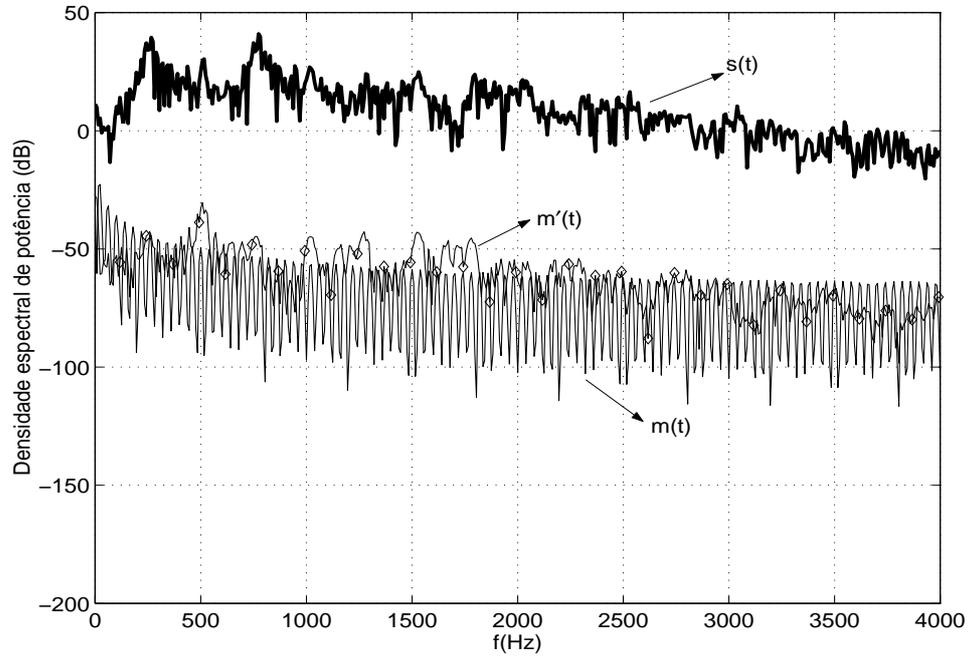


Figura 4.8: Densidade espectral de potência dos sinais do exemplo da Figura 4.7.

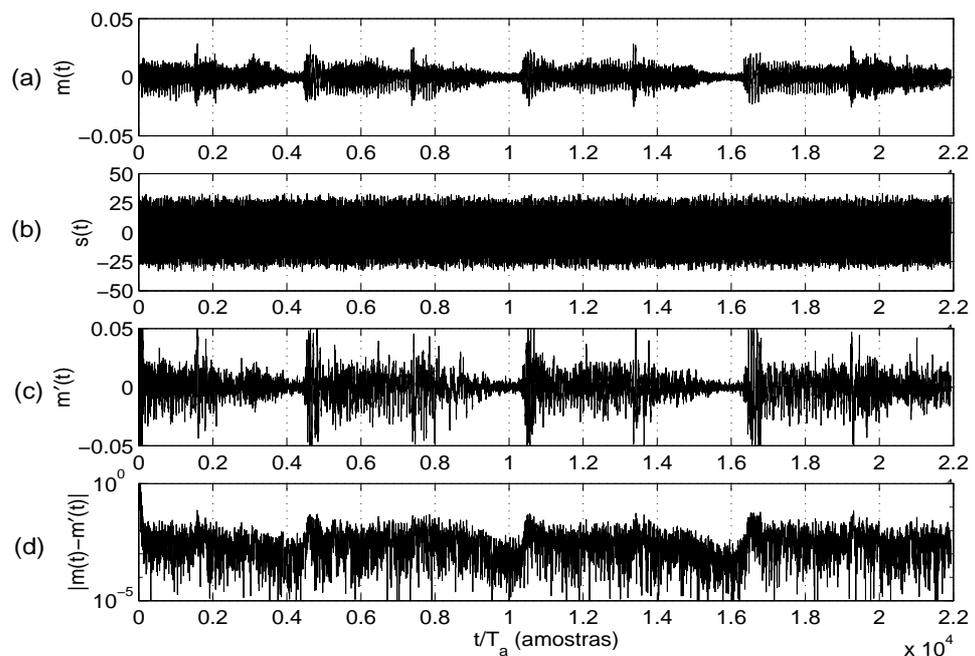


Figura 4.9: Transmissão de sinal musical utilizando-se o sistema da Figura 4.1. (a) $m(t)$ - Sinal musical amostrado a $f_a = 8kHz$; (b) $s(t)$ - Sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - Sinal recuperado; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

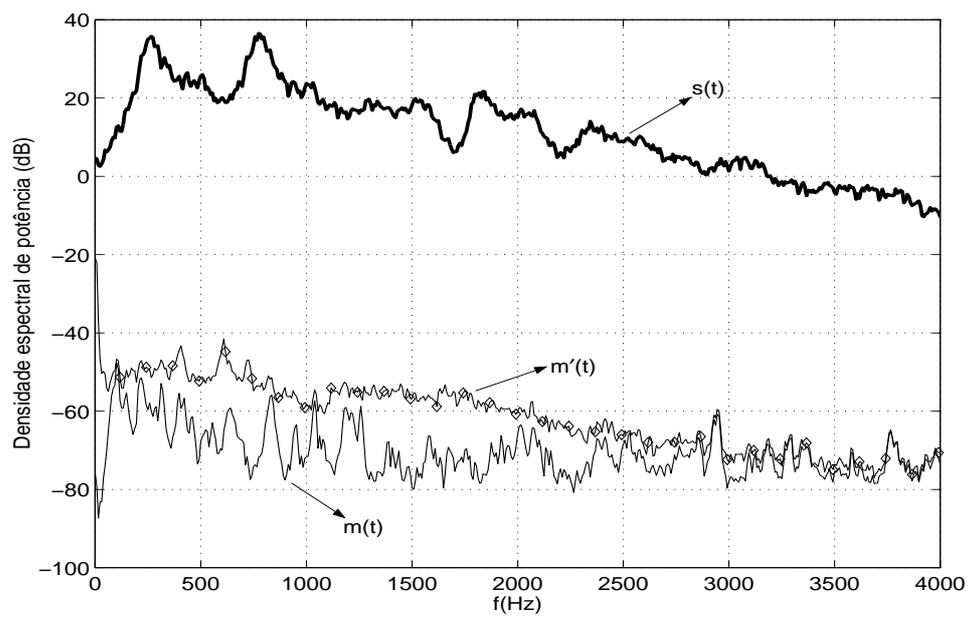


Figura 4.10: Densidade espectral de potência dos sinais do exemplo da Figura 4.9.

4.2 O sistema de Wu e Chua

Wu e Chua propuseram um sistema de comunicação com detecção coerente utilizando sinais caóticos em que o sincronismo é isento de erros se o canal de comunicação for ideal.

Primeiramente, eles criaram um método de projeto de sistemas mestre-escravo (possíveis geradores de sinais caóticos) sincronizantes bastante simples por evitar o cálculo de expoentes de Lyapunov condicionados, como é necessário no método de Pecora e Carroll. A idéia básica de Wu e Chua consiste em escrever as equações do mestre e do escravo de forma que a dinâmica do erro de sincronismo seja simples e facilmente analisável.

Para isso, o sistema mestre é dividido em um subsistema linear assintoticamente estável e num outro não-linear cujas variáveis são transmitidas para o escravo. Ou seja, o sistema mestre é escrito na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (4.1)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz com todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo (ou seja, as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ convergem para $\mathbf{0}$).

Desta forma, define-se o sistema mestre-escravo como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}' \\ \dot{\mathbf{v}}' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (4.3)$$

em que $(\mathbf{u}; \mathbf{v})^t$ é o vetor de estados do sistema mestre e $(\mathbf{u}'; \mathbf{v}')^t$ é o vetor de estados do sistema escravo. Desta forma, subtraindo-se (4.2) de (4.3), obtém-se uma equação diferencial para o erro de sincronismo:

$$\frac{d((\mathbf{u}; \mathbf{v}) - (\mathbf{u}'; \mathbf{v}'))^t}{dt} = \mathbf{A}((\mathbf{u}; \mathbf{v}) - (\mathbf{u}'; \mathbf{v}'))^t. \quad (4.4)$$

Como \mathbf{A} tem todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((\mathbf{u}; \mathbf{v}) - (\mathbf{u}'; \mathbf{v}'))^t = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{u}'; \mathbf{v}')^t = (\mathbf{u}; \mathbf{v})^t. \quad (4.5)$$

Assim, o sistema sincroniza de forma global. A taxa de convergência pode ser determinada diretamente através dos autovalores de \mathbf{A} . É interessante notar que apesar do sistema escravo não ser autônomo (depende do sinal de entrada $\mathbf{u}(t)$), a equação que descreve o comportamento do erro (4.4) o é.

Comparando-se as equações que definem o sistema sincronizante definido por (4.2)-(4.3) com as Equações (3.3)-(3.4), conclui-se que as equações propostas por Wu e Chua são um caso particular do sistema tratado por Pecora e Carroll em que a dependência de $(\dot{\mathbf{u}}; \dot{\mathbf{v}})^t$ e $(\dot{\mathbf{u}}'; \dot{\mathbf{v}}')^t$ com \mathbf{v} e \mathbf{v}' respectivamente é linear.

Desta forma fica fácil impor a estabilidade assintótica do escravo (basta impor que a matriz \mathbf{A} tenha autovalores no semiplano aberto esquerdo) sem a necessidade do cálculo dos expoentes de Lyapunov. A única dificuldade é encontrar sistemas que gerem sinais caóticos e possam ser escritos da forma (4.1).

Em [20] são citados vários exemplos de sistema que podem ser colocados nesta forma com \mathbf{u} possuindo poucos componentes¹. Por exemplo, o sistema de Chua descrito na Seção 2.4.1 pode ser colocado nesta forma. As equações que o descrevem estão reproduzidas a seguir:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \frac{1}{C_1} [(Gv_2 - v_1) - f(v_1)] \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] \\ \dot{i}_3 = -\frac{1}{L}v_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

em que $G = \frac{1}{R}$ e

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) \cdot \{|v_1 + E| - |v_1 - E|\}. \quad (4.7)$$

O sistema (4.6) pode ser reescrito na forma (4.2):

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{f(v_1)}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Neste caso $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$ e $u = v_1$. Para valores positivos de C_1 ,

C_2 , R e L , a matriz \mathbf{A} tem autovalores no semiplano aberto esquerdo, já que ela corresponde à parte linear passiva do circuito mostrado na Figura 2.9. Sendo assim, ao se implementar o sistema mestre-escravo definido por (4.2)-(4.3) para este caso, sabe-se que ocorrerá o sincronismo mesmo sem se calcular os expoentes de Lyapunov condicionados do escravo.

A partir deste método de projeto de osciladores caóticos sincronizantes, Wu e Chua propõem um sistema de transmissão de informações utilizando sinais caóticos que não possui um erro intrínseco como o de Cuomo e Oppenheim descrito na seção anterior. O diagrama de blocos desse sistema está apresentado na Figura 4.11.

A principal diferença deste diagrama com relação ao da Figura 4.1 é que agora a mensagem $m(t)$ é combinada com uma variável de estado do sistema mestre ainda dentro do laço do transmissor e não no canal. A mensagem influencia na geração do sinal caótico e não é apenas somada a este como acontecia no sistema de Cuomo e Oppenheim.

¹A princípio, qualquer sistema pode ser colocado na forma (4.1) tomando-se $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e considerando-se \mathbf{v} e \mathbf{v}' como vetores de dimensão nula, ou seja, $(\mathbf{u}; \mathbf{v})^t = \mathbf{u}$ e $(\mathbf{u}'; \mathbf{v}')^t = \mathbf{u}'$. No entanto, como o objetivo aqui é a transmissão eficiente, é interessante considerar sistemas para os quais possa tomar-se \mathbf{u} com dimensão menor possível (de preferência unidimensional) para que seja necessário transmitir ao escravo um menor número de componentes.

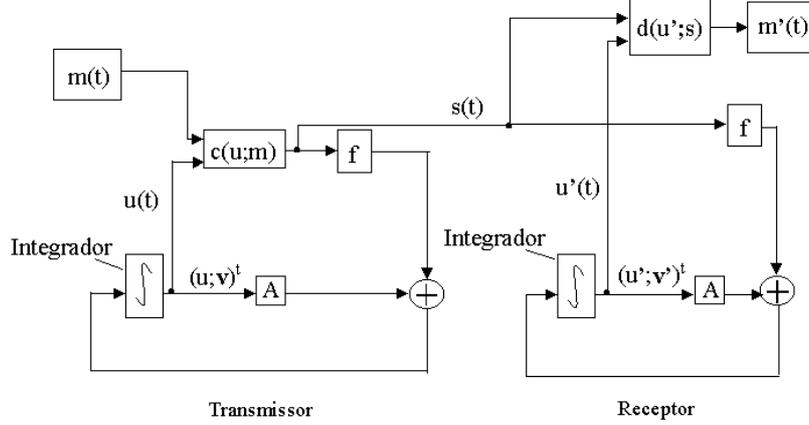


Figura 4.11: Diagrama de blocos do sistema proposto por Wu e Chua em [20].

A mensagem $m(t)$ é codificada com o sinal caótico $u(t)$ usando uma função de codificação $s(t) = c(u(t); m(t))$ de tal modo que a mensagem possa ser decodificada de forma única como $m(t) = d(u'(t); s(t))$. Assume-se que d seja contínua na variável u . A princípio a escolha de $c(\cdot; \cdot)$ e $d(\cdot; \cdot)$ precisa satisfazer $s(t) \approx u(t)$ para todos as mensagens apropriadas por dois motivos. Primeiramente, $s(t)$ é realimentado no lugar de $u(t)$ no sistema transmissor. Por outro lado, deseja-se que este sistema continue gerando sinais caóticos. Esta condição só será assegurada se $s(t) \approx u(t)$. Além disso, pensando em termos de comunicação segura, é interessante que a ocorrência de $m(t)$ não seja aparente a partir do sinal $s(t)$ e para isto devemos ter $s(t) \approx u(t)$ também.

As equações que governam o sistema global são da forma (4.2)-(4.3), apenas substituindo-se o sinal transmitido $u(t)$ por $s(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathbf{f}(s) \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}' \\ \dot{\mathbf{v}}' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u' \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathbf{f}(s). \quad (4.10)$$

Assim, novamente,

$$\frac{d((u; \mathbf{v}) - (u'; \mathbf{v}'))^t}{dt} = \mathbf{A} ((u; \mathbf{v}) - (u'; \mathbf{v}'))^t \quad (4.11)$$

e portanto tem-se no receptor $\lim_{t \rightarrow \infty} (u'; \mathbf{v}')^t = (u; \mathbf{v})^t$. Da continuidade de $d(\cdot; \cdot)$ resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(u'; s) = d\left(\lim_{t \rightarrow \infty} (u'); s\right) = m(t). \quad (4.12)$$

Dessa forma a mensagem é recuperada no receptor sem degradação (a menos de um transitório necessário para que os sistemas entrem em sincronismo) quando os parâmetros do transmissor e do receptor estão perfeitamente casados e o canal é

ideal. Esta recepção isenta de erro é o que torna este sistema superior ao de Cuomo e Oppenheim descrito anteriormente.

O sistema de transmissão proposto pode ser utilizado também com equações que não podem ser colocadas na forma (4.1) desde que se saiba de antemão que os sistemas mestre e escravo entrarão em sincronismo. É o caso por exemplo do sistema mestre-escravo formado pelas equações de Lorenz com entrada $x(t)$ (Equações (3.18)-(3.19)). Como já foi visto na Seção 3.2, este sistema mestre-escravo sincroniza de forma global sendo possível então utilizá-lo para gerar o sinal $u(t)$.

Nas simulações computacionais mostradas aqui, foram utilizadas essas equações com os parâmetros (3.22) tomando-se $s(t) = c(u; m) = u(t) + a \times m(t)$, sendo a um fator de atenuação. Assim, $d(u', s) = (1/a) \times (s(t) - u'(t))$. Como sinal caótico, utilizou-se $u(t) = x(t)$ das equações de Lorenz. O sistema discretizado está esquematizado na Figura 4.12. Assim como na Seção 4.1, $m(t)$ foi amostrado com $f_a = 8kHz$ e as equações diferenciais foram integradas com um passo de integração de $\Delta t = 0,03$.

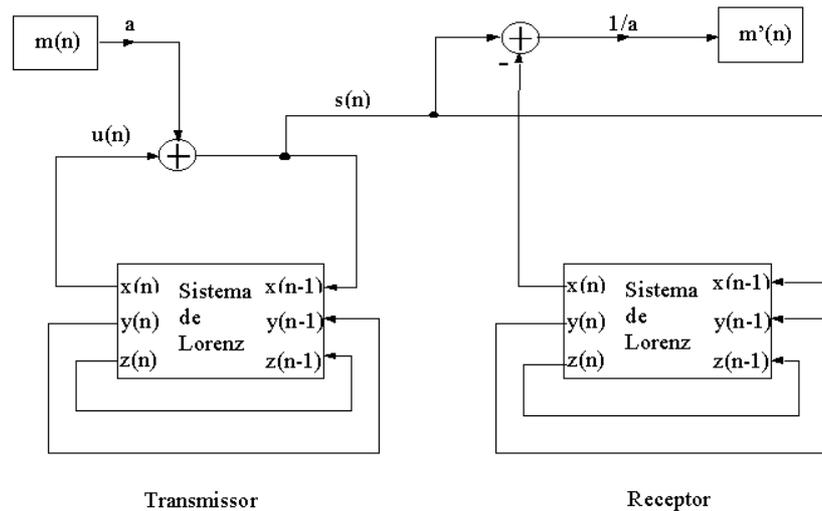


Figura 4.12: Diagrama de blocos do sistema de Wu e Chua discretizado utilizado nas simulações computacionais.

A Figura 4.13 mostra o aspecto do sinal transmitido $s(t)$ no domínio do tempo e da frequência quando $m(t) \equiv 0$. Como esperado, essa figura é praticamente idêntica a da Figura 4.2 que mostra a situação equivalente no sistema de Cuomo e Oppenheim. Nos dois sistemas, quando a mensagem é identicamente nula, o sinal transmitido é a componente $x(t)$ das equações de Lorenz.

Da mesma forma que na seção anterior, a seguir são mostrados vários exemplos para demonstrar o funcionamento desse sistema no caso ideal. Para facilitar comparações, as mensagens $m(t)$ a serem utilizadas foram novamente atenuadas de $a = -60dB$ com relação à máscara $x(t)$. Para este sistema, como $s(t)$ não é simplesmente $m(t)$ somado a $u(t)$, a atenuação poderia ser bem menor.

Primeiramente, é mostrada na Figura 4.14 os sinais obtidos no sistema quando $m(t) = \sin(2 \times \pi \times 3500t)$. Vê-se que, diferentemente do que ocorria no sistema

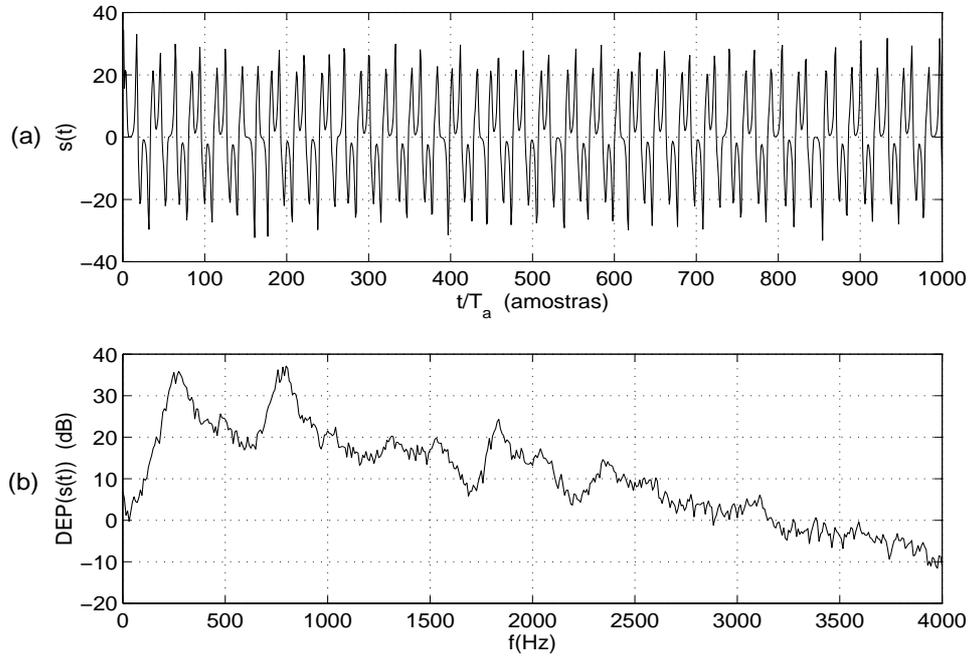


Figura 4.13: Sinal transmitido pelo sistema da Figura 4.12 (a) no domínio do tempo e (b) no domínio da frequência quando $m(t) \equiv 0$.

analisado na seção anterior (Figura 4.3(d)), o erro na recuperação de $m(t)$ decai exponencialmente durante a fase em que os sistemas estão entrando em sincronismo e fica rapidamente da ordem de grandeza do erro numérico da simulação (em torno de 10^{-16}). A recuperação da mensagem no receptor é praticamente isenta de erros depois desse tempo de transitório, como havia sido previsto.

A Figura 4.15 mostra que a recuperação funciona tão bem em altas quanto em baixas frequências. Utilizando-se $m(t) = \sin(2 \times \pi \times 500t)$, novamente o erro na recuperação da mensagem decai exponencialmente durante um transitório e depois fica no nível do erro de processamento.

No caso de $m(t)$ ser um sinal retangular, a Figura 4.16 mostra que o receptor consegue acompanhar as discontinuidades de $m(t)$ sem problemas. No gráfico do erro existem alguns trechos, em instantes em que $m(t) = 0$, em que o erro é nulo e, como o gráfico da Figura 4.16(d) é em escala logarítmica eles são representados por espaços vazios. Esta mesma figura mostra que o erro é desprezível mesmo quando $m(t) \neq 0$, ou seja, o sistema entre em sincronismo praticamente perfeito nesse caso também. Situação bastante diferente da apresentada no sistema de Cuomo e Oppenheim (Figura 4.7).

Por fim, a Figura 4.17 mostra os sinais obtidos quando $m(t)$ é o sinal musical utilizado na seção anterior (ver Figuras 4.9 e 4.10). Novamente, passado o transitório, a recuperação do sinal é perfeita. Não ocorre mais os aumentos no sinal de erro nos instantes em que o $m(t)$ tem componentes graves mais intensas como ocorria na Figura 4.9(d).

Na Figura 4.18, os sinais da Figura 4.17 são grafados no domínio da frequência.

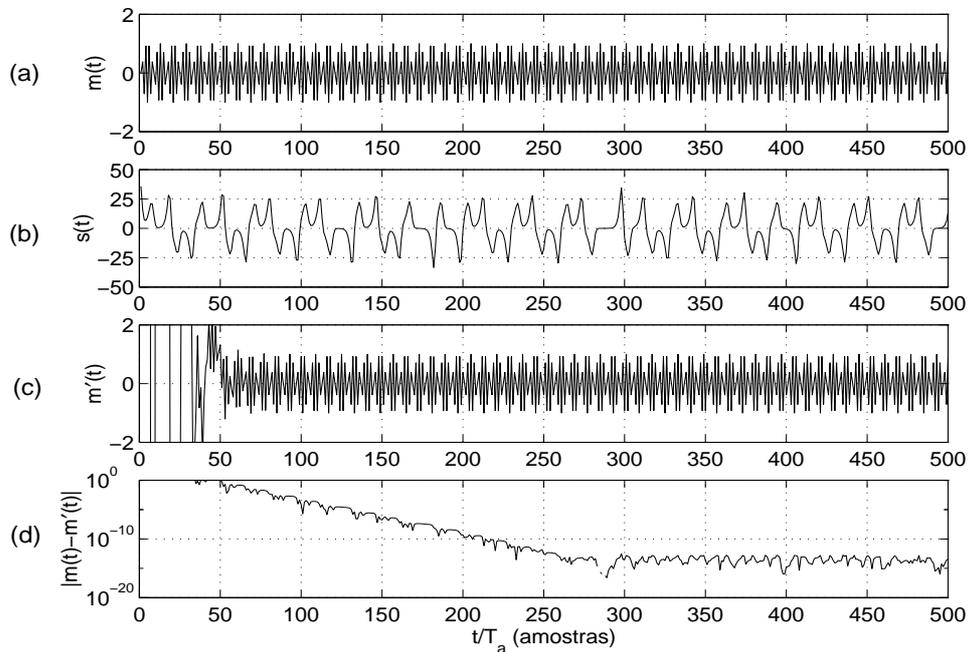


Figura 4.14: Transmissão de sinal senoidal de alta frequência com o sistema de Wu e Chua. (a) $m(t)$ - sinal senoidal de $3,5kHz$ amostrado a $8kHz$; (b) $s(t)$ - sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - mensagem recuperada no receptor; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

Verifica-se $a \times m(t)$ fica bastante abaixo do espectro do sinal $s(t)$. A diferença que há entre os espectros dos sinais $a \times m(t)$ e $a \times m'(t)$ é devido somente aos pontos do transitório já que a Figura 4.17 mostra que a diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$ após 200 amostras é praticamente desprezível. Realmente, se esses pontos são suprimidos no cálculo do espectro de Fourier dos dois sinais não é possível distingui-los.

Esses gráficos comprovam que no caso de canal ideal, o sistema da Figura 4.11 funciona perfeitamente. Ou seja, a mensagem a ser transmitida é usada para modular um sinal caótico que é transmitido para o receptor. Neste, a mensagem consegue ser recuperada sem erro mesmo sem se conhecer as condições iniciais do transmissor. Porém, sob o ponto de vista da engenharia, muitas questões precisam ser respondidas a respeito desse sistema. Um ponto muito importante é saber o que ocorre quando o canal adiciona ruído branco ao sinal transmitido $s(t)$ ou quando este sofre uma limitação em banda. Estas questões serão analisadas na próxima seção.

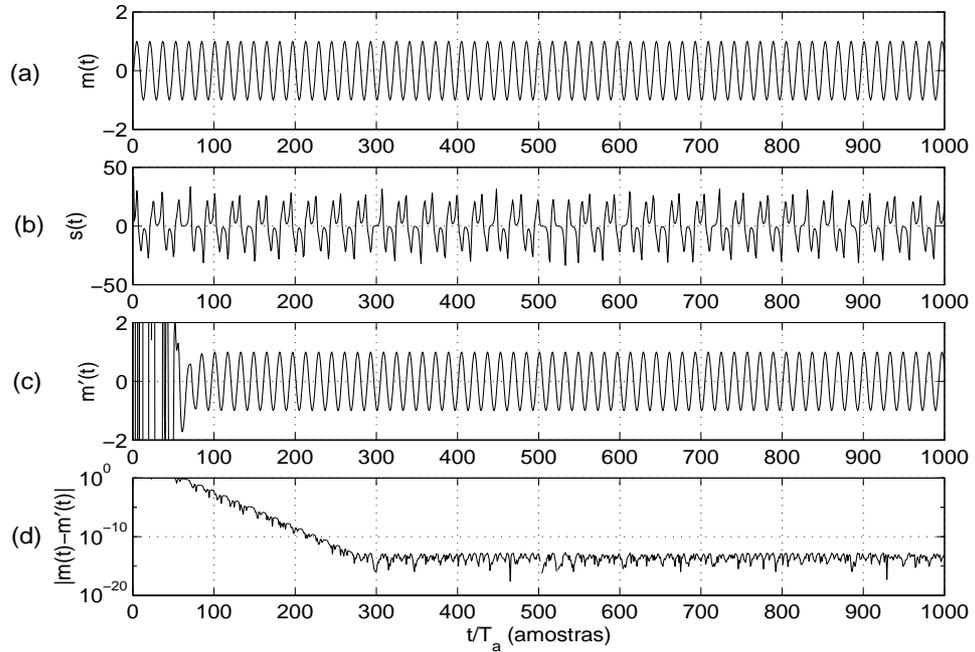


Figura 4.15: Transmissão de sinal senoidal de baixa frequência com o sistema de Wu e Chua. (a) $m(t)$ - sinal senoidal de 500Hz amostrado a 8kHz ; (b) $s(t)$ - sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - mensagem recuperada no receptor; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

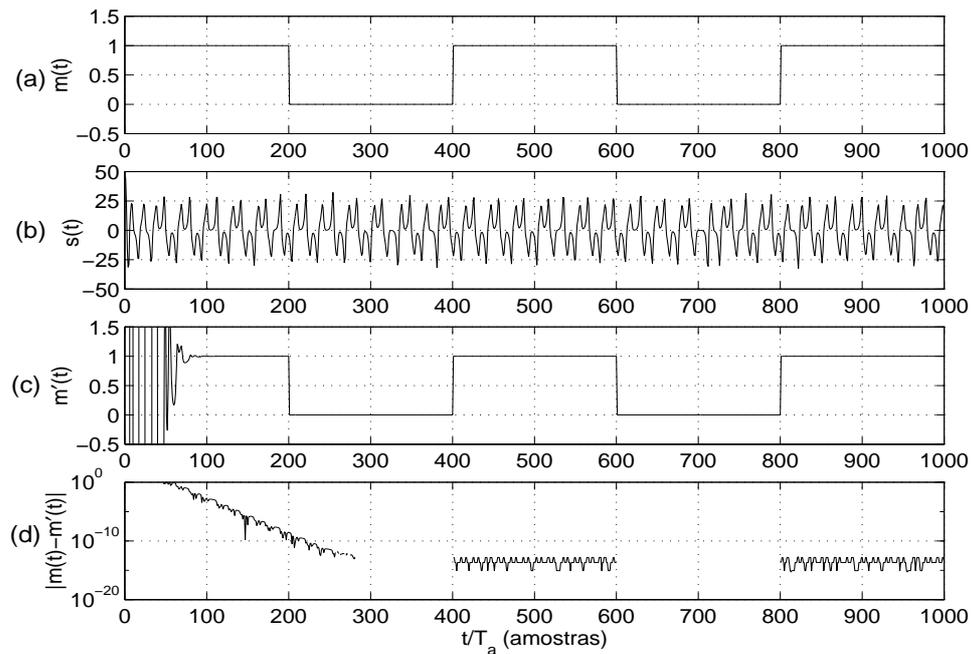


Figura 4.16: Transmissão de sinal retangular com o sistema de Wu e Chua. (a) $m(t)$ - sinal retangular; (b) $s(t)$ - sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - sinal recuperado; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

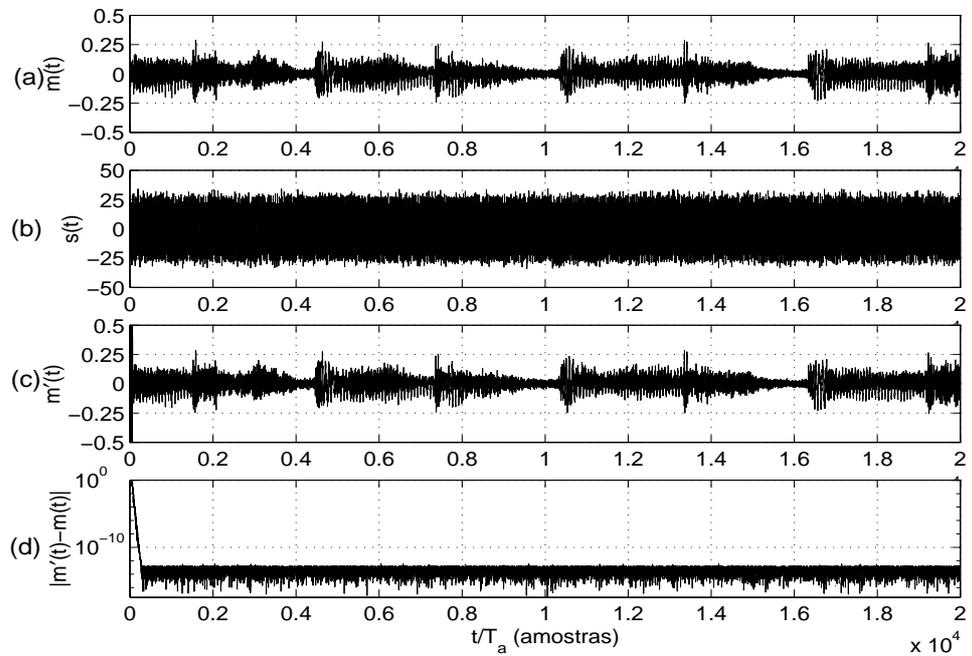


Figura 4.17: Transmissão de sinal musical com o sistema de Wu e Chua. (a) $m(t)$ - Sinal musical amostrado a 8kHz; (b) $s(t)$ - Sinal caótico transmitido; (c) $m'(t)$ - Sinal recuperado; (d) Sinal erro - módulo da diferença entre $m(t)$ e $m'(t)$.

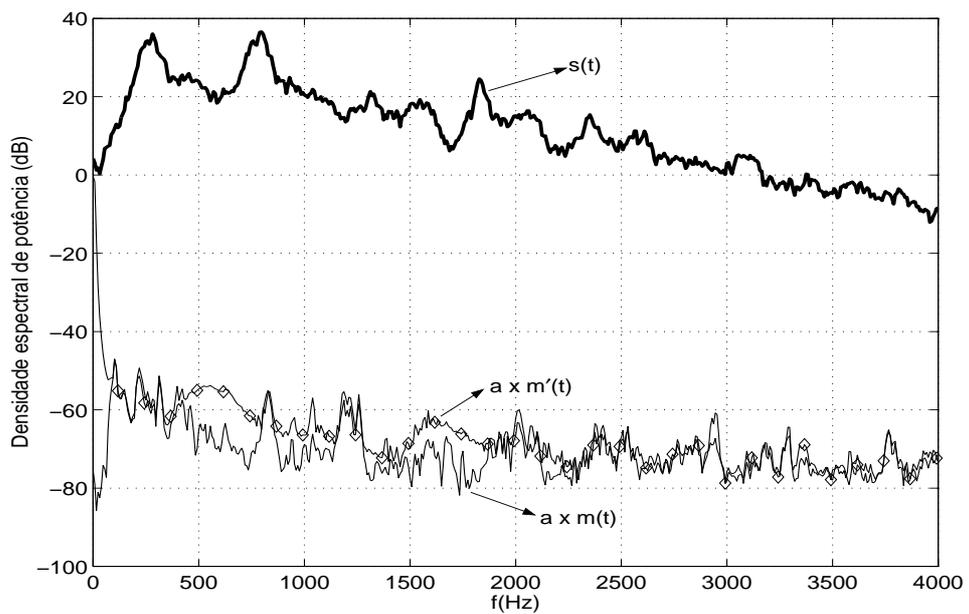


Figura 4.18: Densidade espectral de potência dos sinais do exemplo da Figura 4.17.

4.3 Influência de condições não-ideais de canal

Na Seção 4.1 mostrou-se que o sistema de comunicação utilizando sinais caóticos proposto por Cuomo e Oppenheim (Figura 4.1) não apresenta resultados bons na recuperação no receptor da mensagem enviada mesmo em condições ideais de canal. Porém, os resultados da Seção 4.2 mostram que o mesmo não acontece com o sistema de Wu e Chua (Figura 4.11). Para este sistema a recuperação da mensagem no receptor é perfeita quando as condições de transmissão são ideais. O objetivo da presente seção é analisar o desempenho desse sistema quando as condições de canal não são ideais.

Mais precisamente, serão estudados os efeitos no sistema da Figura 4.11 de dois tipos diferentes de imperfeições: a existência de ruído branco gaussiano aditivo no canal de comunicações e o modelamento deste por um filtro passa-bandas de fase linear.

Devido a complexidade matemática de uma análise teórica deste problema, neste trabalho foi utilizada uma abordagem puramente numérica e investigatória. Para os testes tomou-se a mensagem a ser transmitida $m(t) = \sin(2 \times \pi \times 500t)$ com $0 \leq t \leq 1,25s$. Os sinais do sistema foram amostrados, como na seção anterior, a uma taxa de $f_a = 8kHz$, o que faz com que o vetor resultante da amostragem de $m(t)$ tenha 10000 pontos. Além disso, para diminuir o erro devido aos transitórios de sincronização foram adicionados 250 amostras nulas no início e 100 no final deste vetor. Assim $m(n)$ terá 10350 pontos.

Na próxima seção será investigado a influência do ruído aditivo e em seguida a da limitação em banda.

4.3.1 Influência do ruído aditivo

A influência da adição do ruído branco gaussiano $r(t)$ ao sistema de comunicação da Figura 4.11 foi estudado através da simulação do sistema cujo diagrama de blocos está mostrado na Figura 4.19.

Este diagrama é exatamente igual ao da Figura 4.12 com o acréscimo do ruído branco $r(t)$ somado ao sinal $s(t)$.

A relação entre a intensidade da mensagem $m(t)$ e o sinal que vem do oscilador caótico $u(t)$ é dada pelo ganho a . Por exemplo, se $a = -30dB$, isso significa que a relação entre a potência média do sinal $m(t)$ e do sinal $u(t)$ é de $-30dB$ ou 0,001. Como $u(t)$ pode ser visto como uma “máscara” para a mensagem $m(t)$, esta relação a será chamada de *relação mensagem-máscara*.

A relação entre a intensidade do sinal $s(t)$ no canal de comunicações e o ruído branco gaussiano $r(t)$ é dada pelo ganho b . Por exemplo, se $b = -40dB$, isso significa que a relação entre a potência média do sinal $s(t)$ e do ruído $r(t)$ é de $40dB$ ou 10000. Essa relação b será chamada de *relação ruído-sinal*.

Com essas definições, a relação mensagem-ruído no canal pode ser calculada por $a - b$, com a e b expressos em dB .

Como exemplo, as Figuras 4.20 e 4.21 mostram os sinais desse sistema nos casos em que o canal é ideal ($b = -\infty dB$) e no caso em $b = -40dB$ respectivamente. Em ambos os casos tomou-se $a = -30dB$.

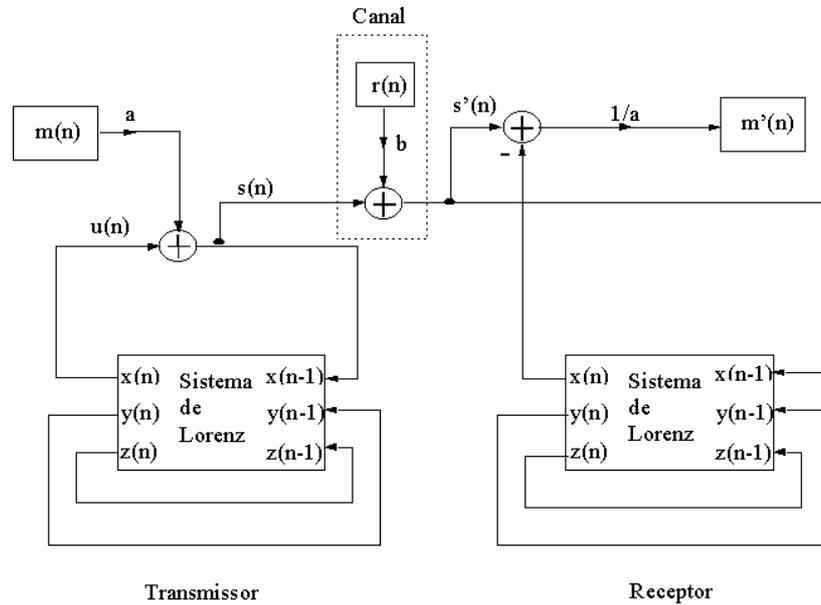


Figura 4.19: Diagrama de blocos do sistema utilizado para estudar a influência do ruído no sistema de Wu e Chua.

A Figura 4.20 mostra a recuperação perfeita da mensagem $m(t)$ no receptor no caso de canal ideal depois de um tempo necessário para que os sistemas entrem em sincronismo (cerca de 70 amostras neste caso). Obviamente, neste caso $s'(t)$ é idêntico a $s(t)$ já que o canal é ideal.

Em contraste, a recuperação do sinal quando há uma relação sinal-ruído de $40dB$ ($b = -40dB$) no canal de comunicações é muito ruim, como mostrado pela Figura 4.21(d). Calculando-se a relação sinal-ruído em $m'(t)$ em relação ao sinal esperado na saída do receptor $m(t)$ chega-se a aproximadamente $10dB$ que corresponde à relação mensagem-ruído no canal de comunicações $a - b$. Esse é um resultado bastante ruim para o desempenho desse sistema já que, como visto na Seção 4.2, a mensagem $m(t)$ precisa ser bastante atenuada com relação a $x(t)$ em princípio, o que torna difícil tornar a relação mensagem-ruído alta em um canal real.

A Figura 4.22 confirma esses resultados. Para dois valores diferentes de a , $a = -30dB$ e $a = -50dB$, verifica-se que a relação sinal-ruído na saída do receptor é muito próxima da relação mensagem-ruído no canal de comunicação para uma larga faixa de variação da relação sinal-ruído no canal $-b$.

Além disso esta figura mostra que a dependência entre as duas relações em dB é linear. Ou seja, aumentando-se a relação mensagem-ruído no canal de um certo valor, esse aumentando será reproduzido no receptor. Essa proporcionalidade pode ser interpretada novamente pela Equação (3.30) da Seção 3.2.3. Assim como foi feito na análise do sistema de Cuomo e Oppenheim, o ruído $r(t)$ pode ser visto como um descasamento dos parâmetros entre mestre e escravo. Portanto, sendo esse erro na transmissão da ordem de $a - b$, é esperado que esse mesmo erro ocorra no sincronismo e, conseqüentemente, na obtenção do sinal $m'(t)$.

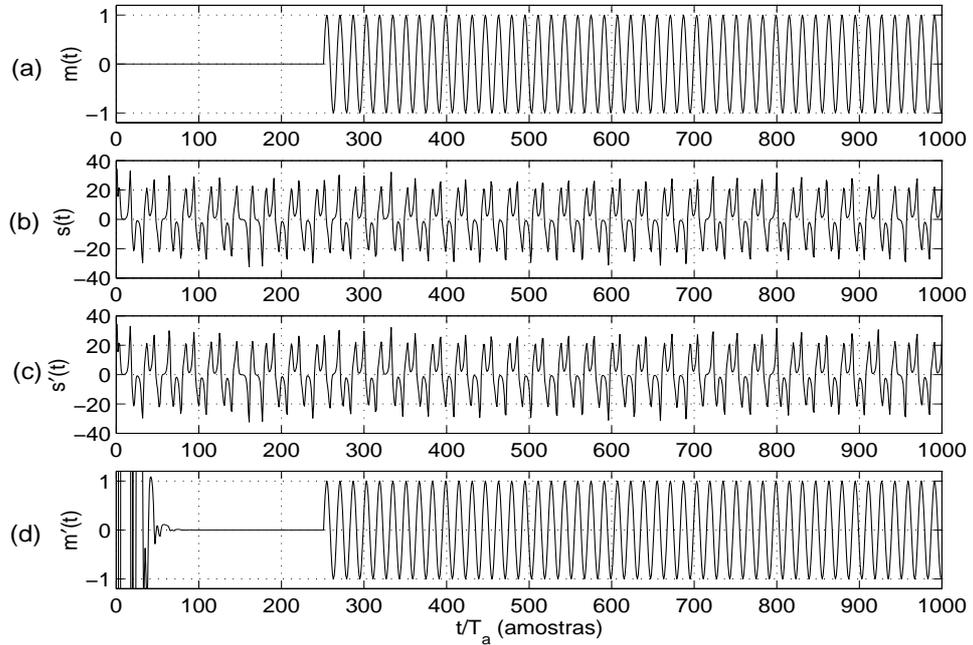


Figura 4.20: Primeiras 1000 amostras de alguns sinais do sistema da Figura 4.19 para o caso de canal ideal ($b = -\infty dB$) e $a = -30dB$. (a) Trecho da mensagem a ser transmitida. (b) Sinal na saída do transmissor. (c) Sinal na entrada do receptor. (d) Trecho da mensagem recuperada.

Os resultados apresentados mostram que o sistema de Wu e Chua apesar de ser isento de erro no caso ideal, não se comporta muito bem frente ao ruído no canal de comunicações. A solução desse problema no caso analógico não parece ser evidente já que a susceptibilidade ao ruído é uma característica intrínseca de sistemas caóticos sincronizantes levando-se em conta a Equação (3.30). Uma idéia no sentido de melhorar esse desempenho é mostrada na Seção 4.4.2. Primeiramente, será analisado o que ocorre com o desempenho sistema quando o canal de comunicações é limitado em frequência.

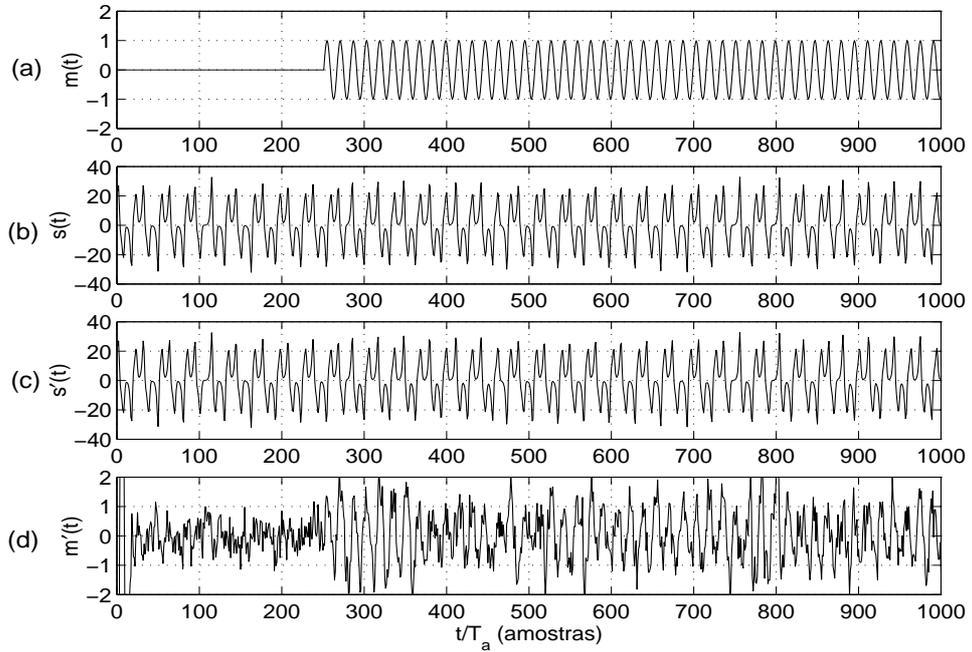


Figura 4.21: Primeiras 1000 amostras de alguns sinais do sistema da Figura 4.19 para o caso de relação ruído-sinal no canal de $b = -40dB$ e $a = -30dB$. (a) Trecho da mensagem a ser transmitida. (b) Sinal na saída do transmissor. (c) Sinal na entrada do receptor. (d) Trecho da mensagem recuperada.

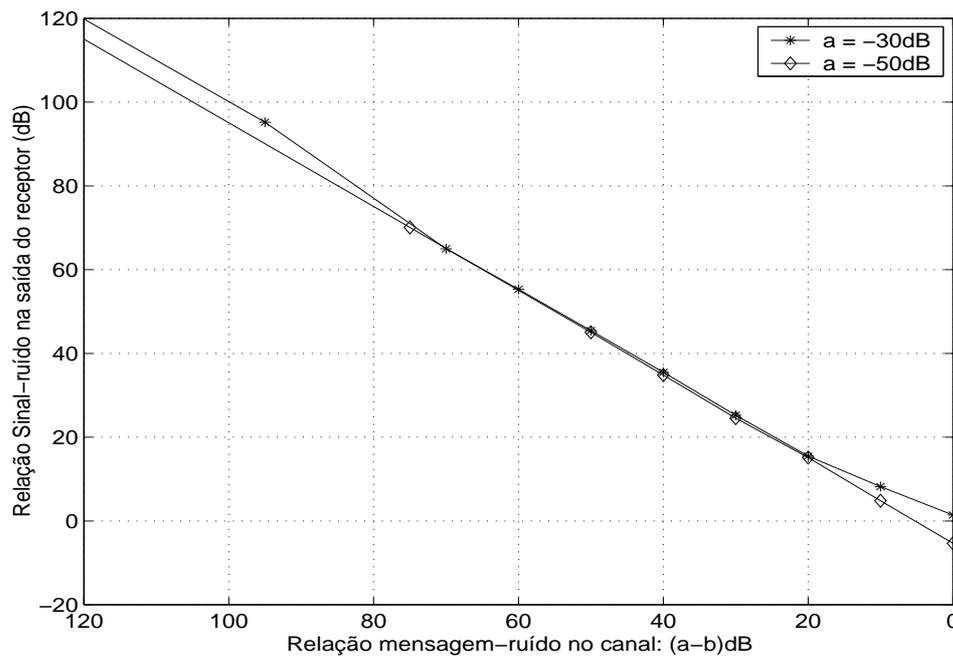


Figura 4.22: Gráfico da relação sinal-ruído da mensagem recuperada em função da relação mensagem-ruído no canal $a - b$.

4.3.2 Influência da limitação em banda do canal

Para o estudo da influência da limitação em banda do sinal $s(t)$ na recuperação da mensagem $m(t)$ no receptor, o canal de comunicações foi modelado por um filtro passa-faixas FIR de fase linear de ordem $N = 200$ cuja função de transferência será indicada por $H_c(z)$. O diagrama de blocos do sistema discretizado está mostrado na Figura 4.23.

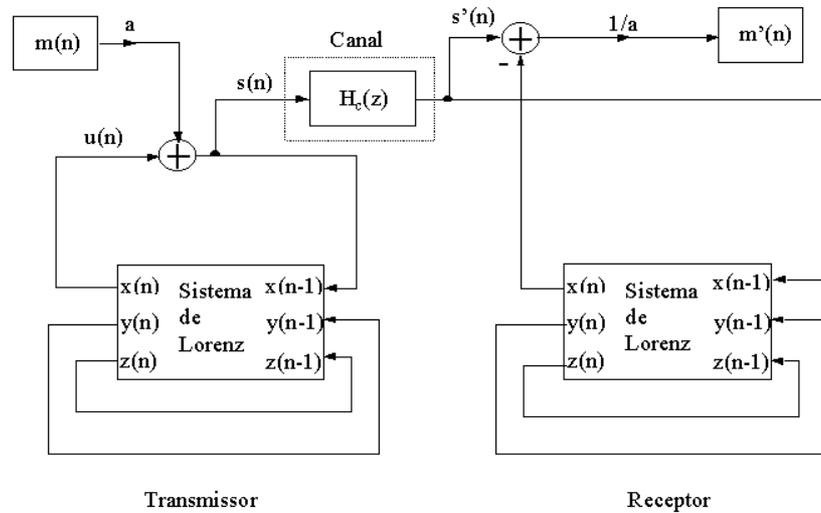


Figura 4.23: Diagrama de blocos do sistema utilizado para estudar a influência da limitação em frequência do sinal $s(t)$ no sistema de Wu e Chua.

As frequências de corte inferior e superior de $H_c(z)$ serão representadas por f_{ci} e f_{cs} respectivamente. Nessa seção para facilitar a notação, todas as frequências serão normalizadas com relação à frequência de Nyquist $f_a/2 = 4kHz$. Como ilustração a Figura 4.24 mostra a resposta em frequência do filtro do canal $H_c(z)$ quando $f_{ci} = 0,1$ e $f_{cs} = 0,8$.

A Figura 4.25 mostra o aspecto temporal da mensagem $m(t)$ e do sinal recuperado $m'(t)$ quando o filtro $H_c(z)$ é passa baixas com frequência de corte $f_{cs} = 0,7$ e $a = -30dB$.

Como pode se ver na parte (b) dessa figura, a recuperação de $m(t)$ no receptor não é muito boa nesse caso. A senóide aparece bastante ruidosa com variações de amplitude bastante acentuadas. Apesar disso, a frequência parece ter sido preservada.

A Figura 4.26 mostra a densidade espectral de potência de $m(t)$ já atenuado para ser transmitido e dos sinais na saída do transmissor e na entrada do receptor $s(t)$ e $s'(t)$.

Pode-se notar que o filtro do canal não afetaria a mensagem senoidal caso ela fosse transmitida diretamente ao receptor. Ou seja, o erro no receptor é devido somente à limitação do sinal caótico $s(t)$ transmitido e à ondulação na faixa de passagem do filtro utilizado para simular o canal.

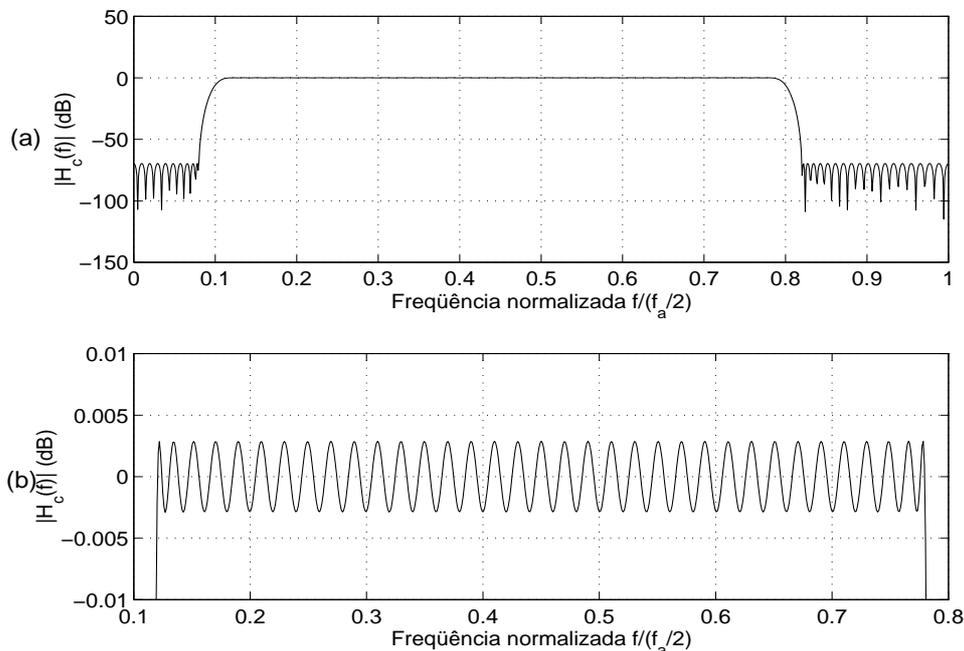


Figura 4.24: Filtro utilizado no modelamento do canal passa-faixas. (a) Resposta em frequência de $H_c(z)$ para $f_{ci} = 0,1$ e $f_{cs} = 0,8$. (b) Faixa de passagem.

Como o erro de detecção causado pela limitação em banda tem características mais próximas de ruído do que de distorção, para avaliar este erro será utilizada a relação sinal-ruído de $m'(t)$ com relação a $m(t)$. No caso discutido acima, por exemplo, chegou-se a uma relação sinal-ruído de aproximadamente $10dB$ no receptor.

As Figuras 4.27 e 4.28 mostram que a situação é ainda mais drástica quando o filtro $H_c(z)$ atua sobre as baixas frequências. Nestas figuras, tomou-se o filtro do canal como sendo passa-altas com frequência de corte inferior de $f_{ci} = 0,02$ e $a = -30dB$ novamente. Ou seja, apenas 2% do espectro de $s(t)$ é afetado. Porém como pode ser visto na Figura 4.27(b) $m'(t)$ fica irreconhecível apesar de que novamente o espectro da mensagem $m(t)$ não teria sido afetado pelo filtro se esta fosse transmitida diretamente.

O gráfico da relação sinal-ruído na saída do receptor em função da porcentagem do espectro de $s(t)$ filtrado por um filtro passa-baixas é mostrado na Figura 4.29.

Esse gráfico mostra, como esperado, que quanto maior a porcentagem de $s(t)$ rejeitada no canal, pior a recuperação de $m(t)$ no receptor. Por exemplo, o caso das Figuras 4.25 e 4.26 equivale a $(1 - f_{cs}) \times 100 = 30\%$ neste gráfico. Quando a porcentagem do sinal rejeitado chega perto de 40% esta relação é quase $0dB$ ou seja, o erro na recuperação é da mesma ordem de grandeza de $m'(t)$. É importante ressaltar que como $m(t)$ é uma senóide em $500Hz$ e o sistema é amostrado a $f_a = 8kHz$, ela não seria afetada pelo filtro caso tivesse sido transmitida diretamente.

Também deve-se ressaltar que uma pequena parte deste erro encontrado é causado pela ondulação na faixa de passagem de $H_c(z)$ (Figura 4.24(b)).

Os resultados obtidos mostram que o sistema de Wu e Chua da forma como foi

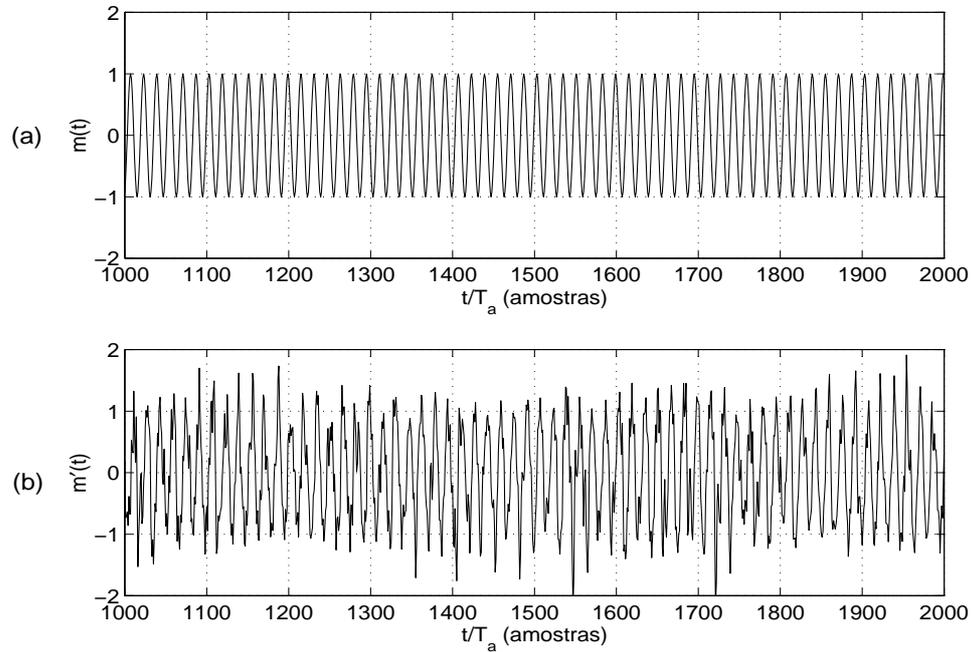


Figura 4.25: Transmissão com sistema de Wu e Chua em canal passa-baixas. (a) Trecho de 1000 amostras de $m(t)$ - mensagem a ser transmitida e (b) Trecho de 1000 amostras de $m'(t)$ - mensagem recuperada no transmissor quando $f_{cs} = 0,7$.

proposto em [20] (Figura 4.11) também não é robusto com relação a limitação em banda pelo canal de transmissão, principalmente quando essa limitação ocorre nas baixas frequências.

Na próxima seção é mostrada uma forma de resolver esse problema do sistema através da limitação do espectro do sinal caótico $u(t)$ antes da transmissão.

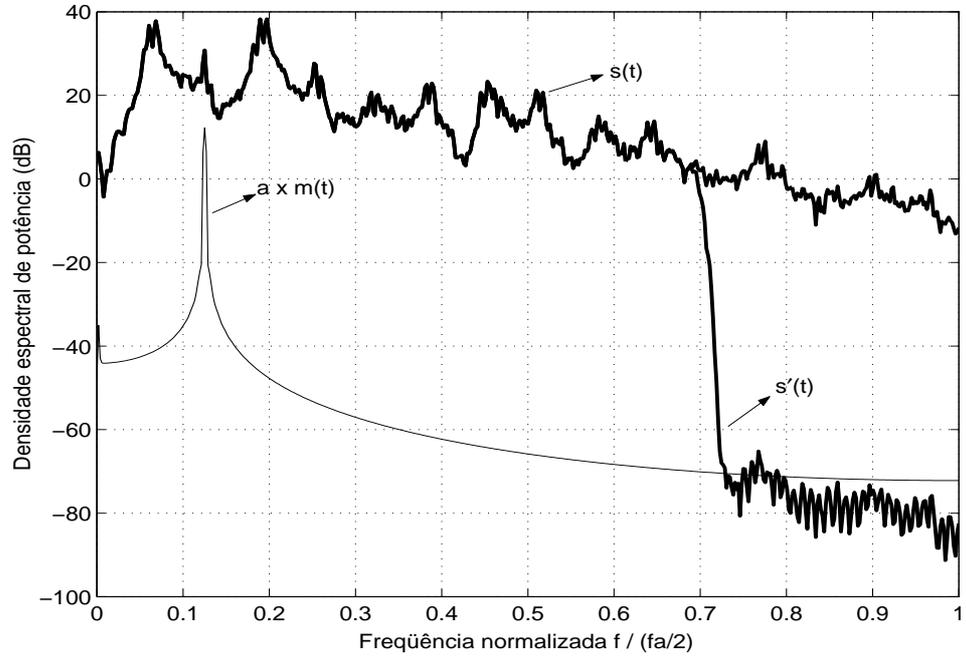


Figura 4.26: Densidade espectral de potência de sinais envolvidos no exemplo da Figura 4.25.

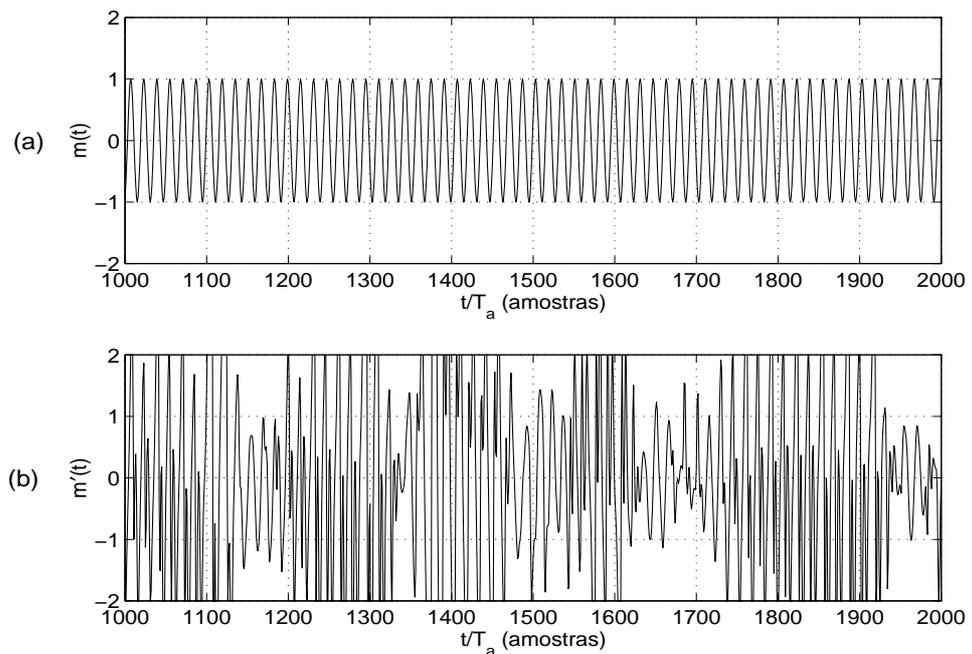


Figura 4.27: Transmissão com sistema de Wu e Chua com canal passa-altas. (a) Trecho de 1000 amostras de $m(t)$ - mensagem a ser transmitida e (b) Trecho de 1000 amostras de $m'(t)$ - mensagem recuperada no transmissor quando $f_{ci} = 0,02$.

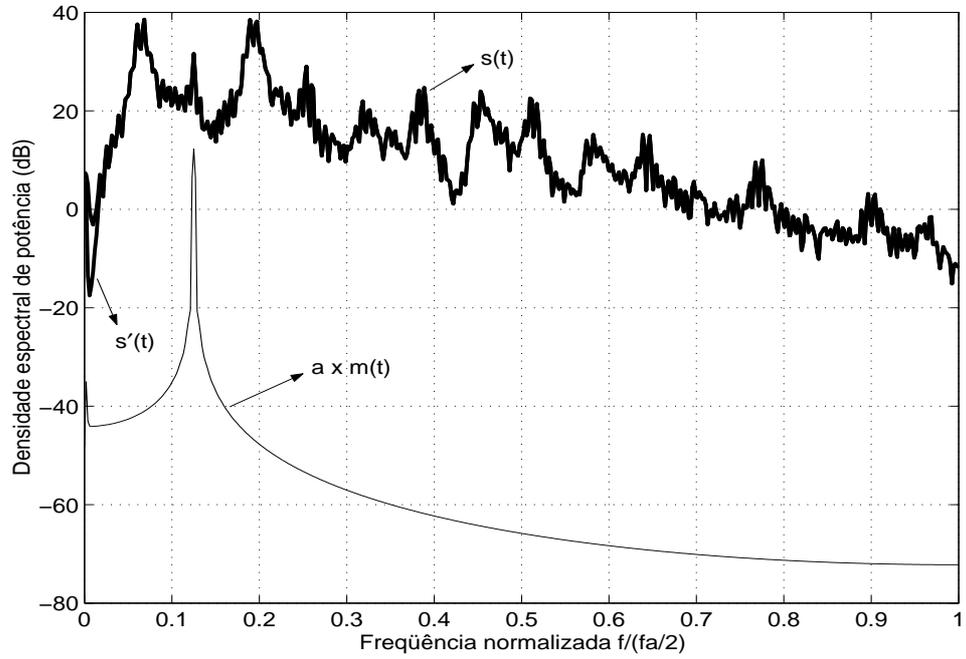


Figura 4.28: Densidade espectral de potência de sinais envolvidos no exemplo da Figura 4.27.

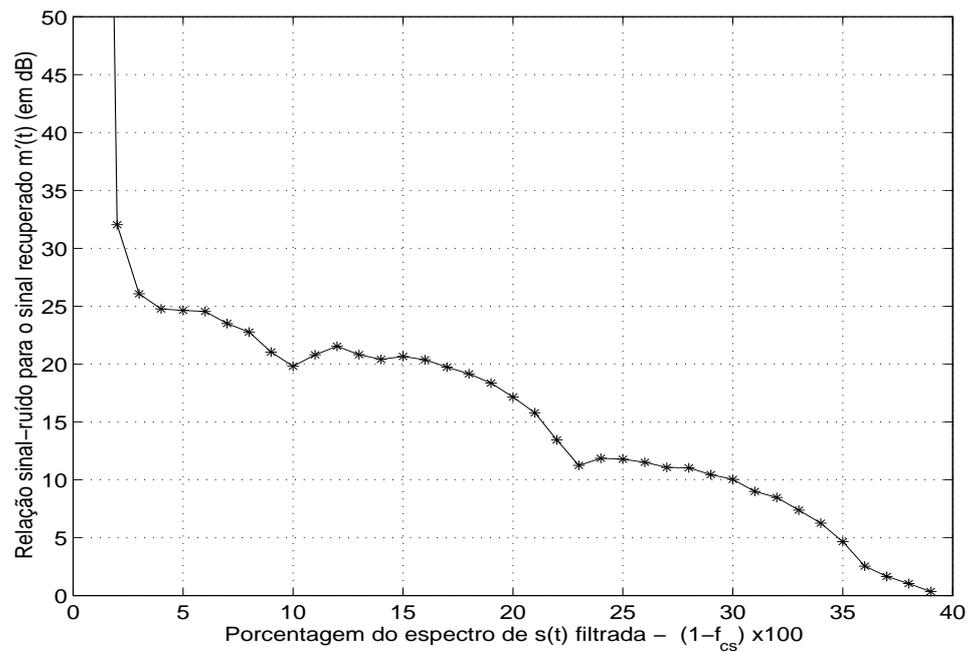


Figura 4.29: Relação sinal-ruído na saída do receptor em função da porcentagem da banda de $s(t)$ rejeitada pelo canal, $(1-f_{cs}) \times 100$ quando o filtro $H_c(z)$ é passa-baixas, ou seja $f_{ci} = 0$.

4.4 Alternativas para melhorar o desempenho do sincronismo em condições não-ideais de canal

4.4.1 Resolvendo o problema da limitação em banda

Para tentar diminuir os problemas no desempenho do sistema de Wu e Chua na presença de um canal de banda limitada, diagnosticados na Seção 4.3.2, uma possível solução é a inserção de filtros passa-banda nos laços dos subsistemas mestre e escravo de forma a limitar o espectro do sinal caótico $u(t)$.

Esta idéia é ilustrada pelo diagrama da Figura 4.30.

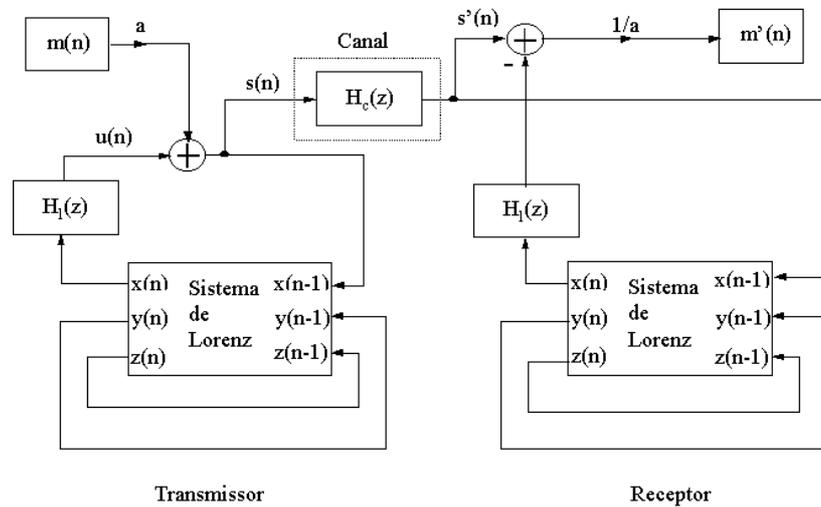


Figura 4.30: Diagrama de blocos do sistema modificado para eliminar os efeitos da limitação em banda do canal de comunicações.

Como mostra a figura, foram inseridos dois filtros idênticos com resposta em frequência $H_l(z)$ nos laços do transmissor e do receptor. As frequências de corte inferior e superior normalizadas com relação à frequência de Nyquist ($f_a/2 = 4kHz$) destes filtros serão representadas respectivamente por f_{li} e f_{ls} .

Para as simulações realizadas aqui, o projeto dos filtros $H_l(z)$ foi feito da mesma forma que o do filtro $H_c(z)$. Ou seja, para os laços foram utilizados também filtros FIR com fase linear de ordem $N = 200$.

Como esses filtros estão inseridos dentro de laços, não há nenhuma garantia de que os sinais que aparecem no sistema mestre continuem limitados. Além disso, também não há nenhuma evidência, a priori, de que o sinal $u(t)$ continuará sendo caótico. Novamente, esse problema será tratado aqui apenas de forma numérica tentando-se mostrar que as características do sinal $s(t)$ obtido no novo sistema mantém propriedades semelhantes ao obtido no sistema original.

Os sinais $s(t)$ do sistema original e do sistema modificado quando $m(t) \equiv 0$, $f_{li} = 0,1$ e $f_{ls} = 0,8$ são mostrados na Figura 4.31.

Esta figura mostra que a aperiodicidade característica dos sinais caóticos é mantida com a inserção do filtro. O sinal $s(t)$ no sistema modificado é da mesma ordem

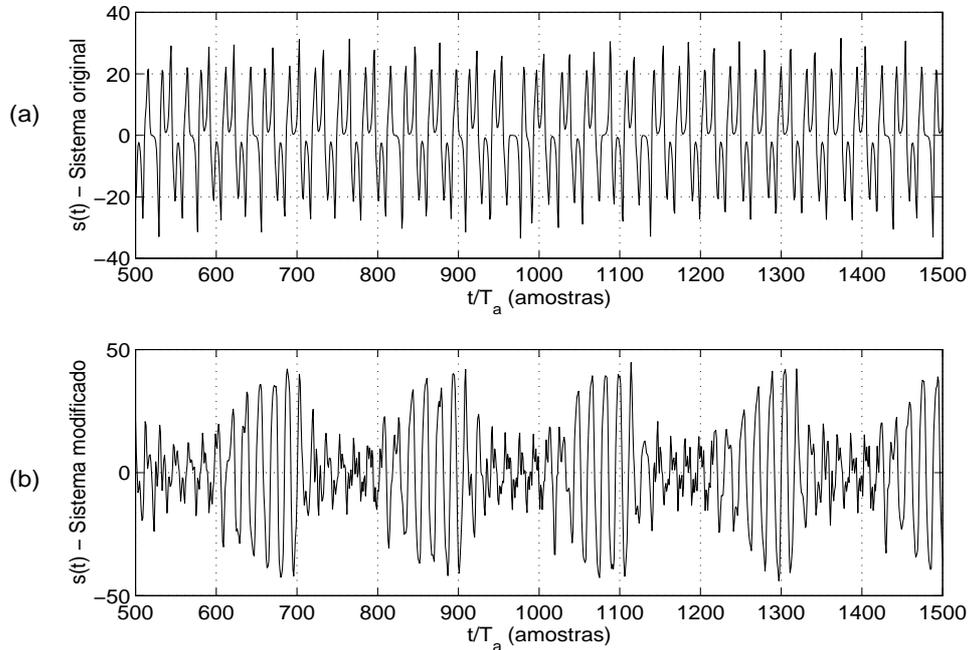


Figura 4.31: Sinais transmitidos $s(t)$ quando $m(t) \equiv 0$ no (a) sistema de Wu e Chua original e (b) no sistema modificado com a introdução de $H_l(z)$ com $f_{li} = 0,1$ e $f_{ls} = 0,8$.

de grandeza do respectivo sinal no sistema original. Vê-se que alternam-se regiões onde o sinal assume valores maiores com regiões com máximos menores. Porém, esses valores variam e o intervalo de duração dessas regiões também.

A Figura 4.32 mostra que, no domínio das frequências, o espectro de $s(t)$ continua com um aspecto plano na faixa de passagem do filtro $H_l(z)$.

Finalmente, comparou-se os atratores do sistema original e do sistema modificado. Representando a projeção do diagrama de fases do sistema transmissor original da Figura 4.12 no plano $y(t) \times z(t)$, obtém-se uma figura muito parecida com o atrator de Lorenz da Figura 2.6, como era esperado. Já o atrator para o sistema modificado da Figura 4.30, do qual uma projeção está mostrada na Figura 4.33(b) parece possuir uma estrutura tão ou mais complexa do que a do sistema original.

Com essas evidências numéricas de que o sistema como um todo continua gerando sinais limitados e caóticos, realizaram-se simulações do sistema da Figura 4.30. Assim como na Seção 4.3, utilizou-se $m(t) = \sin(2 \times \pi \times 500t)$ com $0 \leq t \leq 1,25s$. Novamente os sinais do sistema foram amostrados a uma taxa de $f_a = 8kHz$. Além disso foram adicionados 250 amostras nulas no início e 100 no final do vetor resultante da amostragem de $m(t)$.

Primeiramente, retomou-se a situação da Figura 4.25 em que o canal de transmissão era passa-baixas com frequência de corte superior $f_{cs} = 0,7$. Neste caso, para evitar a influência do canal, adotou-se $f_{ls} = 0,9 \times f_{cs} = 0,63$. A Figura 4.34 mostra trechos dos sinais $m(t)$, $s(t)$ e $m'(t)$ nesta situação com $a = -30dB$.

Ao contrário do que acontecia com o sistema estudado nas Seções 4.2 e 4.3, a

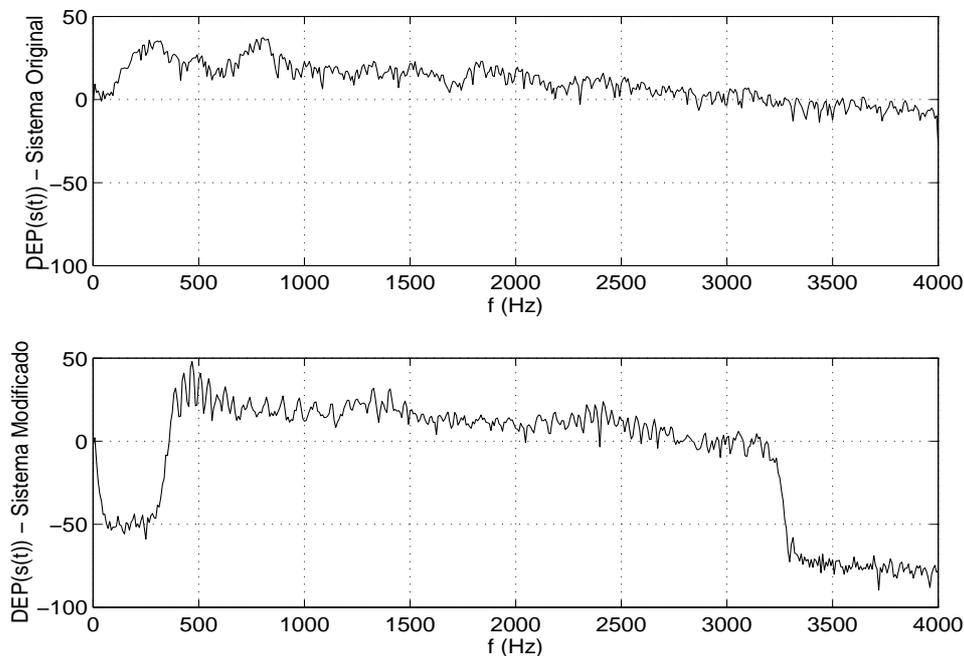


Figura 4.32: Densidade espectral de freqüência dos sinais da Figura 4.31.

recuperação do sinal no receptor é quase perfeita. Além do atraso de 100 amostras causada pelo canal, há uma leve oscilação da amplitude de $m'(t)$, mas afora isso o receptor decodifica muito bem a mensagem. A limitação em banda do sinal caótico antes da transmissão impediu a distorção que seria causada pelo canal. Deve-se notar que o filtro $H_l(z)$ não afeta o espectro de $m(t)$.

A recuperação só não é perfeita, a menos do atraso, devido à ondulação na faixa de passagem de $H_c(z)$ utilizado para modelar o canal (Figura 4.24).

Em seguida tentou-se verificar se o método é eficiente também quando o canal é passa-altas. Retomando a situação mostrada na Figura 4.27 em que $f_{ci} = 0,02$, utilizou-se uma freqüência de corte do filtro do laço de $f_{li} = 0,05$. Os resultados estão mostrados na Figura 4.35.

Vê-se pela figura que novamente o sistema modificado apresenta um erro muito menor do que o sistema original estudado.

Os experimentos numéricos mostraram que mesmo quando o canal de comunicações apresentam restrições bastante forte em freqüência, o sistema continua operando satisfatoriamente desde que utilize-se filtros adequados nos laços e a faixa de freqüências ocupada por $m(t)$ não seja afetada.

A Figura 4.36 resume os resultados obtidos quando o canal é passa-baixas. Nesta figura, para cada valor de freqüência de corte do canal, que determina a porcentagem da banda rejeitada, utilizou-se um filtro no laço com uma freqüência de corte 10% inferior.

Vê-se que o erro no sistema modificado é praticamente independente da freqüência de corte do canal, ao contrário do que ocorria anteriormente, desde que as freqüências de corte dos filtros das malhas sejam convenientemente ajustadas. Grande parcela

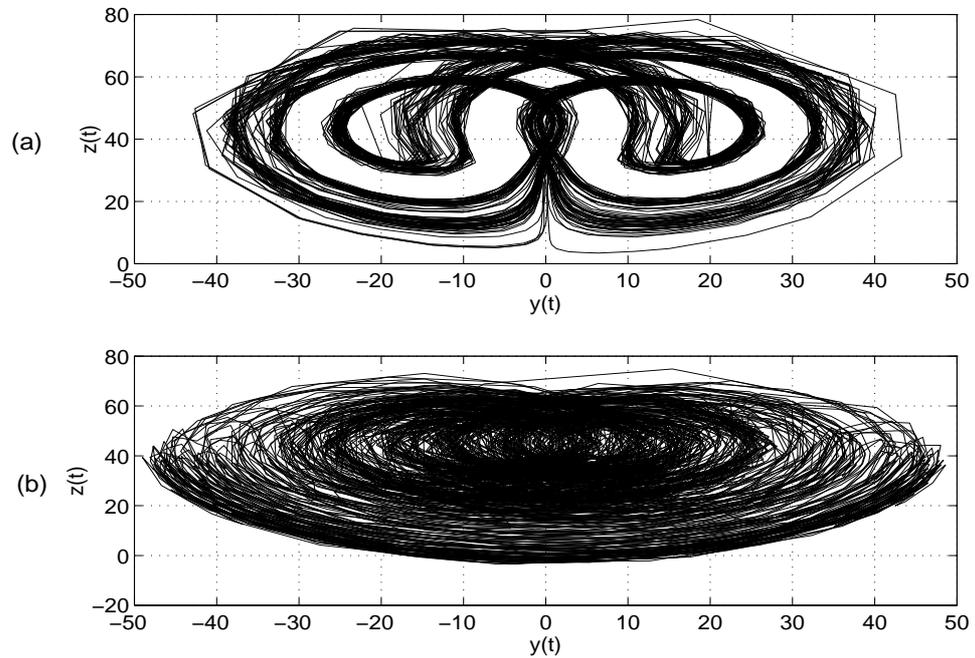


Figura 4.33: Atratores caóticos dos transmissores do sistema de Wu e Chua sem e com a inserção do filtro $H_l(z)$. (a) Projeção do atrator do transmissor da Figura 4.12. (b) Projeção do atrator do transmissor da Figura 4.30 para $f_{ci} = 0,1$ e $f_{cs} = 0,8$.

desse erro deve-se às ondulações da faixa de passagem do filtro $H_c(z)$. Este erro não é reduzido pela introdução dos filtros $H_l(z)$ e é equivalente à introdução de um ruído correlacionado ao sinal na linha de transmissão. Porém, os resultados atestam que os erros causados pela limitação de banda no canal foram eliminados.

Conclui-se que o problema da sensibilidade do sincronismo com a limitação de banda pôde ser resolvido utilizando-se sinais caóticos limitados em banda na transmissão. Desta forma é possível se gerar um sinal caótico com banda adequada ao canal em que se quer transmitir. A principal desvantagem dessa solução é o maior custo computacional na geração do sinal caótico.

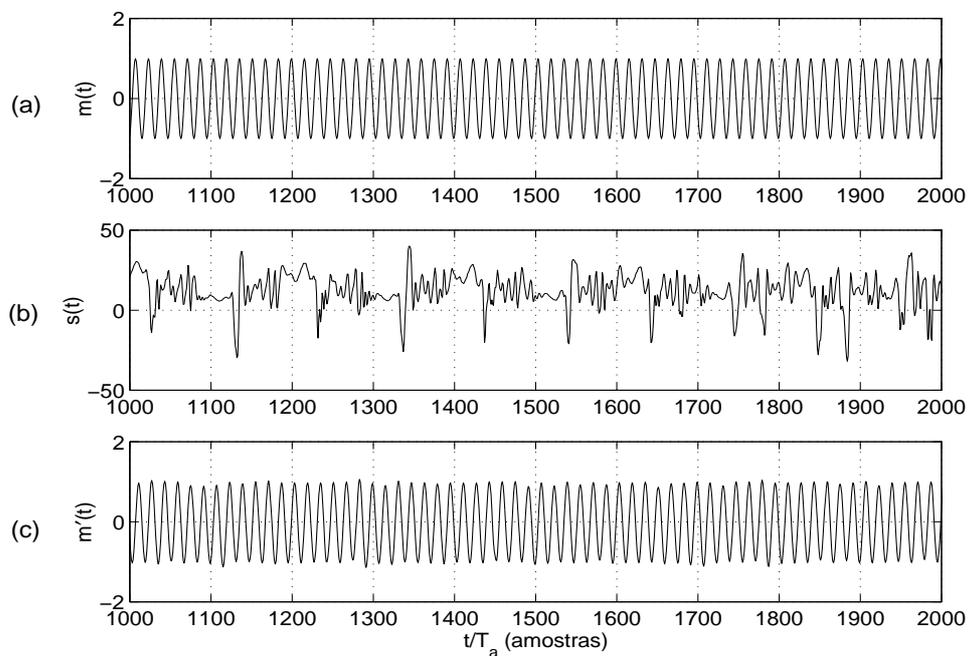


Figura 4.34: Trecho dos sinais obtidos com o sistema da Figura 4.30 transmitindo um sinal senoidal com $a = -30dB$ por um canal passa-baixas com $f_{cs} = 0,7$ e utilizando-se $f_{ls} = 0,63$. (a) mensagem a ser transmitida $m(t)$; (b) Sinal transmitido $s(t)$; (c) Mensagem recuperada $m'(t)$.

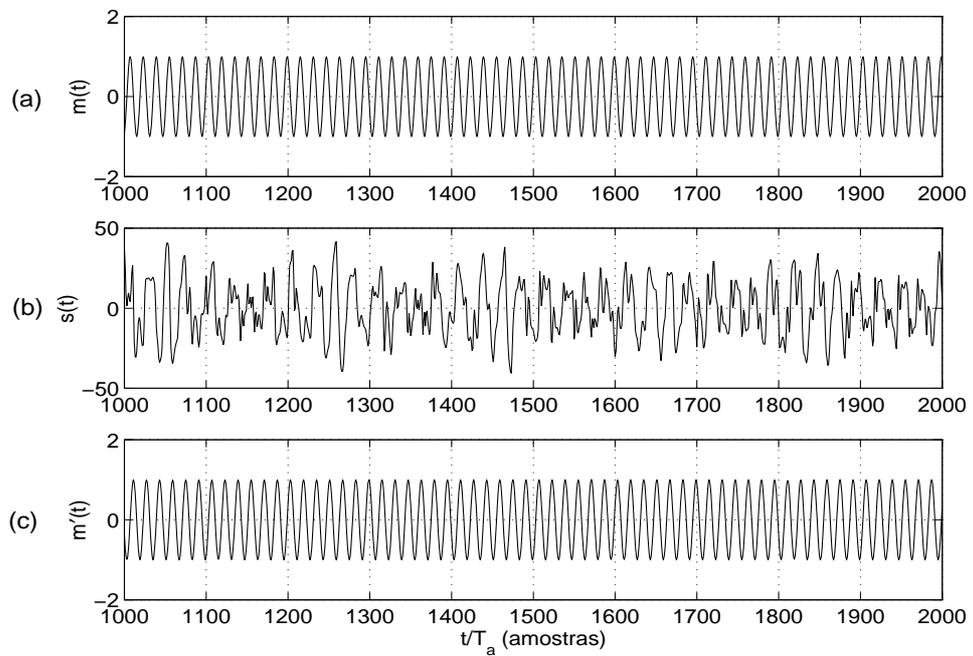


Figura 4.35: Trecho dos sinais obtidos com o sistema da Figura 4.30 transmitindo um sinal senoidal com $a = -30dB$ por um canal passa-altas com $f_{ci} = 0,02$ e utilizando-se $f_{ls} = 0,05$. (a) mensagem a ser transmitida $m(t)$; (b) Sinal transmitido $s(t)$; (c) Mensagem recuperada $m'(t)$.

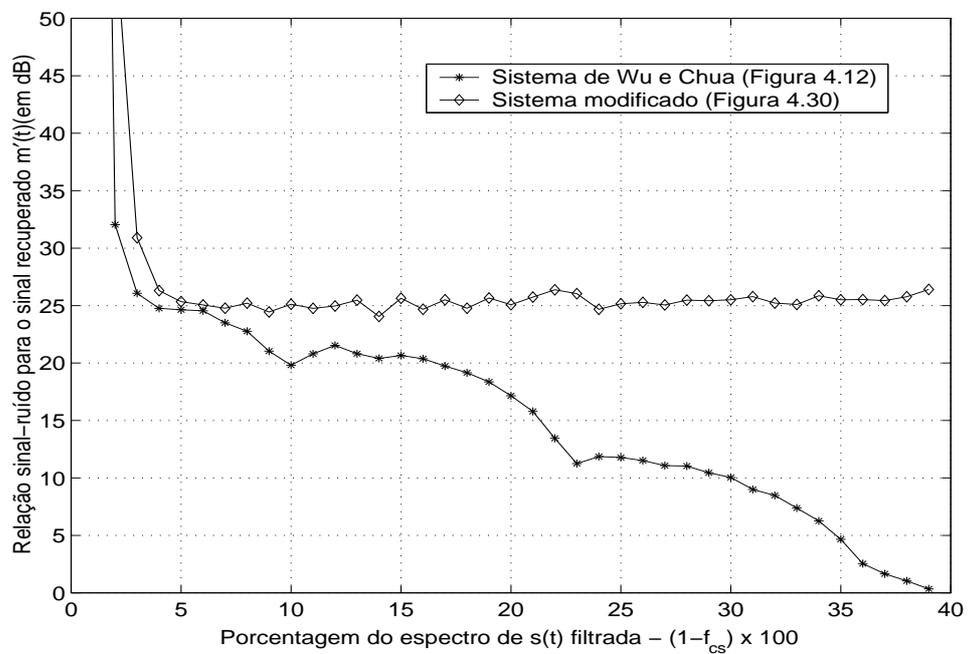


Figura 4.36: Relação sinal-ruído na saída do receptor em função da porcentagem da banda de $s(t)$ rejeitada pelo canal, $(1 - f_{cs}) \times 100$ quando o filtro $H_c(z)$ é passa-baixas, ou seja $f_{ci} = 0$. No sistema modificado utilizou-se $f_{ls} = 0,9 \times f_{cs}$ para cada valor de f_{cs} .

4.4.2 Melhorando a resposta ao ruído no canal

Como já foi dito, a sensibilidade do sincronismo com relação ao ruído no canal de comunicações talvez seja o maior obstáculo para a utilização prática de sistemas de comunicação baseado em sinais caóticos e utilizando de modulação coerente.

De fato, apesar dos muitos artigos já publicados com as mais diferentes técnicas utilizando caos, muitos ignoram o problema do ruído no canal de comunicações e poucos o tratam de forma detalhada.

Apesar dos primeiros artigos sobre caos em comunicações serem do início da década de 1990 apenas mais recentemente têm sido publicados trabalhos com propostas de redução de ruído em séries temporais caóticas voltados para telecomunicações ([21], [41], [42]).

O enfoque destes trabalhos é, em geral, utilizar alguma forma de predição do ruído no canal e assim reduzir o seu efeito no sincronismo do receptor.

Como ilustração, será detalhado nessa seção o método proposto por Sharma e Ott [21] por ser de fácil implementação e apresentar resultados bastante razoáveis.

Para isso, considere-se o sistema mestre-escravo cujo diagrama de blocos é mostrado na Figura 4.37.

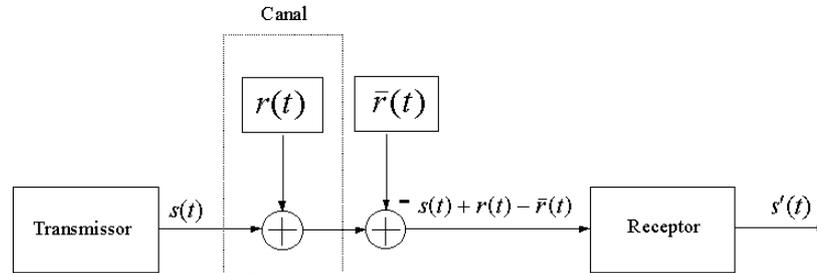


Figura 4.37: Redução do ruído no sincronismo de sistemas caóticos.

Considerando que o transmissor e o receptor estão sincronizados, passado um transitório, o sinal extraído do receptor $s'(t)$ pode ser escolhido de forma que, na ausência de ruído $s'(t) = s(t)$. Em condição de canal ruidoso, no entanto, $s'(t)$ não será igual a $s(t)$ e nem ao menos igual a entrada do receptor $s(t) + r(t)$. Será assumido que o ruído $r(t)$ é ergódico, de média nula e não-correlacionado com nenhuma trajetória do sistema caótico transmissor. Esta última suposição é bastante natural: espera-se que, por exemplo, o ruído térmico em uma linha telefônica seja não-correlacionado com o sistema transmissor.

A idéia então é estimar $\bar{r}(t)$ de forma que $s'(t) = s(t) + r(t) - \bar{r}(t)$ seja uma trajetória do sistema transmissor, não necessariamente a mesma de $s(t)$. Desta forma

$$\begin{aligned}
 E \{ \bar{r}^2(t) \} &= E \{ (s(t) - s'(t) + r(t))^2 \} \\
 &= E \{ (s(t) - s'(t))^2 + 2(s(t) - s'(t))r(t) + r^2(t) \} \\
 &= E \{ (s(t) - s'(t))^2 \} + \sigma^2,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

em que $E\{\cdot\}$ representa a esperança ou valor médio, foi usado o fato de que $r(t)$ tem média nula e é não-correlacionado com $s(t)$ ou $s'(t)$ e σ^2 denota a variância de $r(t)$. Da Equação (4.13) pode-se concluir que $\bar{r}(t)$ tem norma mínima apenas para $s(t) = s'(t)$. Devido à dependência sensível às condições iniciais, espera-se que $s(t)$ e $s'(t)$ estejam tipicamente longe no espaço de fase e sejam não-correlacionados, caso no qual $E\{(s(t) - s'(t))^2\} \approx 2Var(s(t))$ sendo que $Var(\cdot)$ representa a variância. Uma exceção ocorreria quando $s'(t) = s(t - \eta)$ caso no qual $E\{(s(t) - s'(t))^2\} = 2(R_{ss}(0) - R_{ss}(\eta))$, em que $R_{ss}(\cdot)$ denota a função de autocorrelação de $s(t)$. De qualquer forma, $E\{(s(t) - s'(t))^2\}$ é uma quantidade positiva. O caso patológico em que $r(t) = s'(t) - s(t)$ é descartado por causa da hipótese da não-correlação do ruído com qualquer trajetória do sistema dinâmico do transmissor.

Desta forma, o que se quer encontrar é a trajetória mais próxima do sinal ruidoso recebido. No que se segue é mostrado um método proposto em [21] que explora a sincronização caótica para encontrar a trajetória mais próxima.

Assumiu-se que em condições de ausência de ruído, o sinal obtido no receptor sincronizado $s'(t)$ é idêntico ao sinal transmitido $s(t)$. Na condição do diagrama (4.37) a entrada do receptor é dada por $s(t) + r(t) - \bar{r}(t)$. Se sua entrada e saída forem iguais, ou seja, $s'(t) = s(t) + r(t) - \bar{r}(t)$ pode-se concluir que $s'(t)$ é uma trajetória do sistema caótico transmissor. Segue da Equação (4.13) que para encontrar a trajetória mais próxima daquela que realmente está sendo transmitida deve-se impor que $\bar{r}(t)$ tenha norma mínima. Seja então a série temporal ruidosa disponível no receptor $\{s(n) + r(n)\}_{n=1}^N$ que é a versão amostrada convenientemente do sinal recebido de tempo contínuo. Define-se as funções T_j ($j = 1, \dots, N - M + 1$) como se segue:

$$\begin{aligned} T_j(\bar{r}(j), \bar{r}(j+1), \dots, \bar{r}(j+M-1)) &= \\ &= \sum_{n=j-K}^{j-1} e^{\alpha(n-j)} (s'(n) + \bar{r}(n) - s(n) - r(n))^2 \\ &+ \sum_{n=j}^{j+M-1} \left((s'(n) + \bar{r}(n) - s(n) - r(n))^2 + \lambda \bar{r}^2(n) \right) \\ &+ \sum_{n=j+M}^{j+M+K-1} e^{\alpha(j-n)} (s'(n) + \bar{r}(n) - s(n) - r(n))^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que λ é um parâmetro de regularização adicionado para se obter a solução de menor norma.

A estimativa de $\bar{r}(n)$ é feita através de um processo iterativo constituído de sucessivos passos de minimização em que em cada passo minimiza-se T_j incrementando-se j de 1 até $N - M + 1$ e usando-se a estimativa de $\bar{r}(n)$ do passo anterior como condição inicial para a minimização do passo atual. Na Equação (4.14) o primeiro e o último somatório são adicionados porque a informação sobre uma amostra também está contida nas anteriores e posteriores e o fator exponencial indica o decaimento da quantidade considerada desta informação. A constante K limita o número de termos nesses somatórios. Utiliza-se as estimativas previamente geradas $\bar{r}(j-K), \dots, \bar{r}(j-1)$ e $\bar{r}(j+M), \dots, \bar{r}(j+M+K-1)$ para calcular e minimizar as variáveis $\bar{r}(j), \dots, \bar{r}(j+M-1)$.

O vetor de estados do receptor sincronizado no instante $n = 1$ denotado por $\mathbf{x}'(1)$ é desconhecido e é usado para encontrar a saída do receptor sincronizado $s'(n)$ em instantes seguintes. Este valor pode ser estimado em cada passo pela função de

minimização

$$G(\mathbf{x}'(1)) = \sum_{n=1}^N (s'(n) - s(n) - r(n))^2. \quad (4.15)$$

As experiências numéricas relatadas em [21] mostram que esta combinação de sincronização e ajuste do vetor de condições iniciais funciona bem e não impõe severas restrições quanto à precisão da condição inicial $\mathbf{x}'(1)$. No artigo, escolhe-se λ inicialmente alto e a cada passo ele é decrescido de um fator de escala.

Como teste deste método tentou-se aplicá-lo a um sistema mestre-escravo utilizando o sistema de Hénon de tempo discreto, descrito na Seção 2.4.1. As equações que definem o sistema mestre estão reproduzidas abaixo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) + 1 - ax^2(n) \\ bx(n) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Como sinal transmitido, utilizou-se $s(n) = -ax^2(n) + 0.5y(n)$ e o sistema receptor ficou definido como

$$\mathbf{x}'(n+1) = \begin{pmatrix} x'(n+1) \\ y'(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0.5y'(n) + s(n) \\ bx'(n) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e nele pode-se obter $s'(n) = -ax'^2(n) + 0.5y'(n)$.

Utilizando-se $\alpha = 0,25$, $K = 5$, $M = 6$, $N = 80$ e λ com valor inicial 5 e sendo reduzido de um fator de 2 a cada iteração, obteve-se bons resultados. No processo de iteração utilizou-se o algoritmo Elder-Mead simplex [43] embutido na função FMINSEARCH do MATLAB.

No Apêndice A estão listadas as rotinas SINCHENON, MINHENCI e MINHENSBAR escritas na linguagem do MATLAB para implementar este sistema.

A Figura 4.38 mostra o sinal transmitido $s(n)$, o sinal obtido no receptor $s'(n)$ e módulo da diferença entre eles na situação em que a relação sinal-ruído no canal é de 15dB no sistema sem a redução do ruído.

Calculando-se a relação sinal-ruído na saída do receptor como sendo a razão entre a potência média de $s'(n)$ e do erro $|s(n) - s'(n)|$ chega-se a aproximadamente 15dB, repetindo-se o que se verificou na Seção 4.3.1, ou seja, o erro do sincronismo é da mesma ordem de grandeza da relação sinal-ruído no canal.

Uma situação semelhante à da Figura 4.38 só que agora com a introdução do algoritmo de redução de ruído é mostrada na Figura 4.39. Comparando-se as duas figuras, percebe-se que a melhoria no sincronismo é bastante evidente.

Calculando-se novamente a relação sinal-ruído na saída do receptor chegou-se a 26dB, ou seja, um ganho de cerca de 11dB em relação à situação anterior o que mostra que a técnica utilizada surtiu efeito.

A Figura 4.40 mostra o ruído que foi gerado no canal no caso da Figura 4.39 $r(n)$ e a sua estimativa $\bar{r}(n)$.

Outras simulações realizadas com este sistema mostraram que o ganho na relação sinal ruído mantém-se mais ou menos constante na faixa dos 10dB independentemente da relação sinal-ruído no canal. A Figura 4.41 ilustra este resultado.

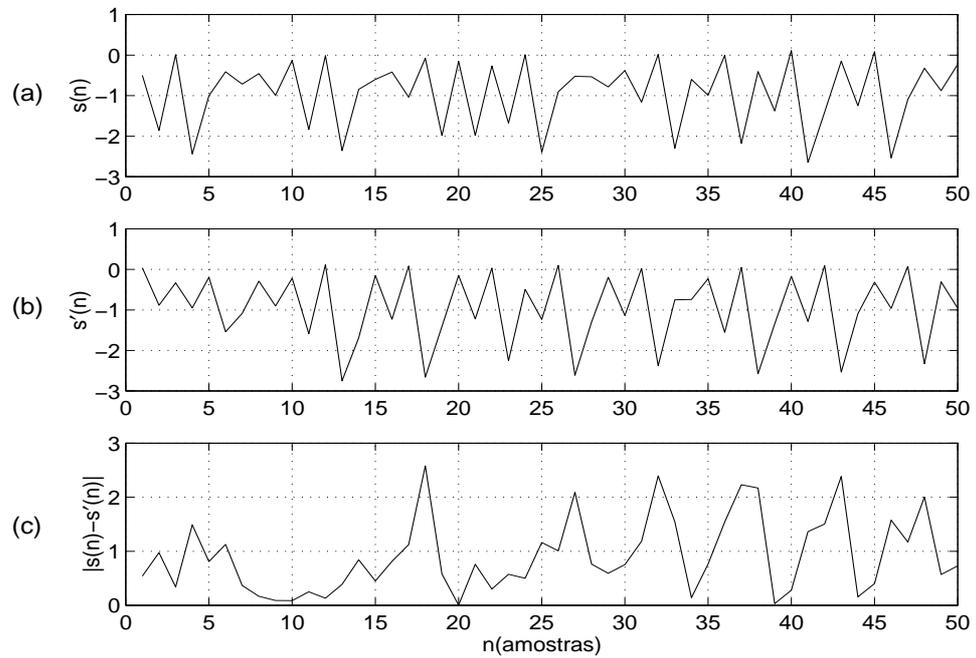


Figura 4.38: Sinais transmitidos e obtidos no receptor sem a redução de ruído. (a) $s(n)$; (b) $s'(n)$; (c) $|s(n) - s'(n)|$

Se este algoritmo por um lado não resolve completamente o problema da sensibilidade do sincronismo ao ruído, por outro mostra que o problema não é insolúvel. O número crescente de trabalhos que atacam este problema mostra que esta é uma área bastante fértil e pode-se esperar que surjam novas técnicas para melhorar bastante o desempenho dos sistemas analisados em condições adversas.

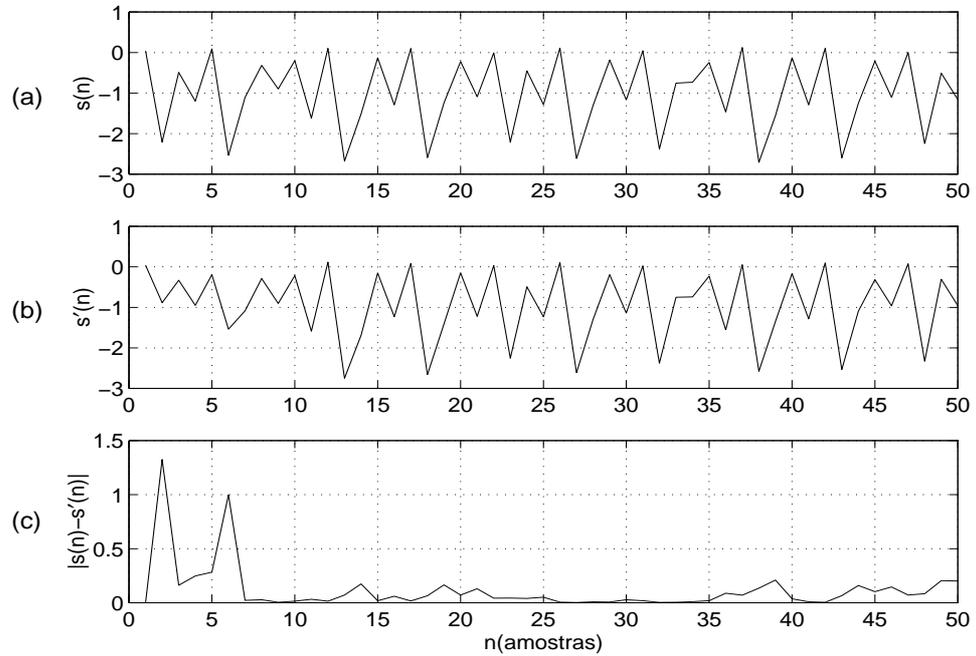


Figura 4.39: Sinais transmitidos e obtidos no receptor com a redução de ruído. (a) $s(n)$; (b) $s'(n)$; (c) $|s(n) - s'(n)|$

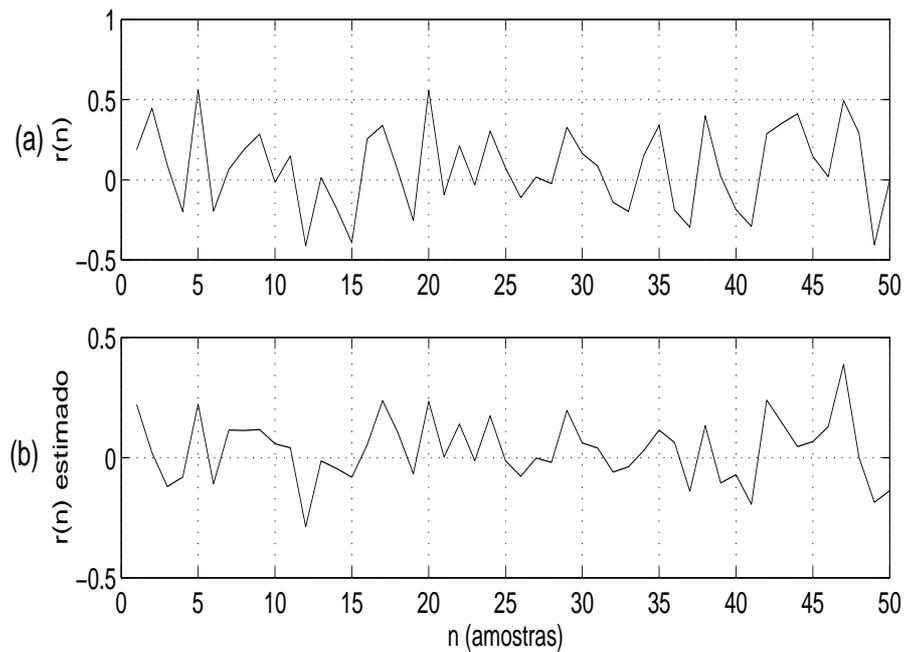


Figura 4.40: Estimativa do ruído. (a) Ruído no canal de comunicações $r(n)$; (b) Estimativa deste ruído $\tilde{r}(n)$.

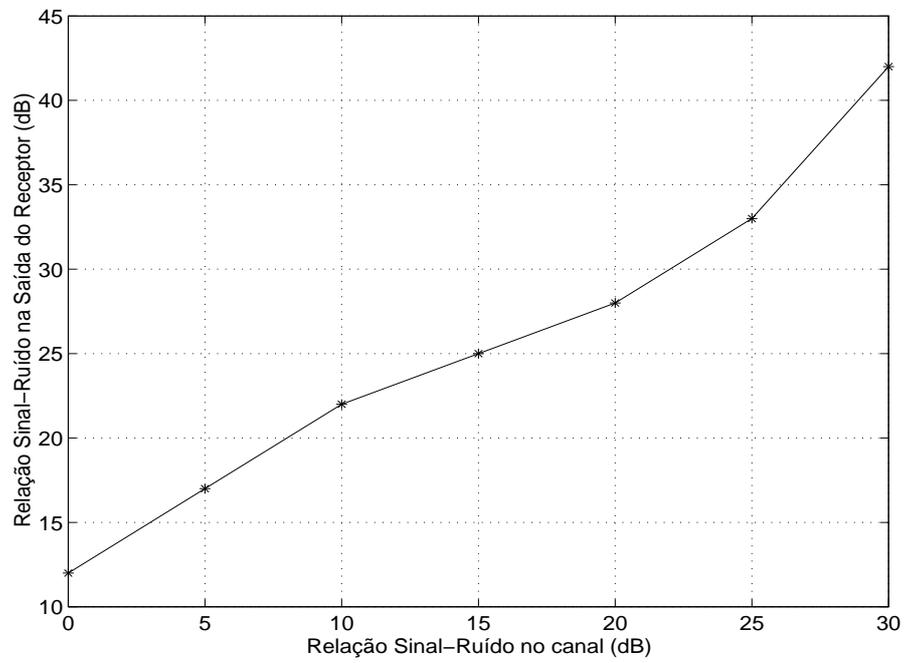


Figura 4.41: Relação sinal-ruído na saída do receptor em função da relação sinal-ruído no canal para o sistema utilizando o algoritmo de redução de ruído.

Capítulo 5

O Sistema de comunicação digital “Chaotic Phase Shift Keying”

No Capítulo 4 foram analisados sistemas de comunicações com sinais caóticos que transmitem informações na forma analógica. O objetivo deste capítulo é a análise do sistema digital “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) proposto por Ushio [23]. Este sistema foi considerado representativo das técnicas digitais utilizando sinais caóticos porque, como será visto, reúne vantagens de vários outros sistemas digitais propostos na literatura.

Nos últimos anos, vários trabalhos sobre a possibilidade de criação de sistemas de comunicação digitais utilizando sincronismo de sistemas caóticos têm sido publicados. O princípio em que se baseiam esses trabalhos é basicamente um dos seguintes:

- sinais binários são mapeados em estados sincronizados e não-sincronizados do sistema [44], [45]; ou
- dois sistemas caóticos diferentes são utilizados e os sinais binários são mapeados com o sincronismo de um ou de outro [46], [47].

Um exemplo de sistema que utiliza o primeiro enfoque é mostrado no diagrama da Figura 5.1.

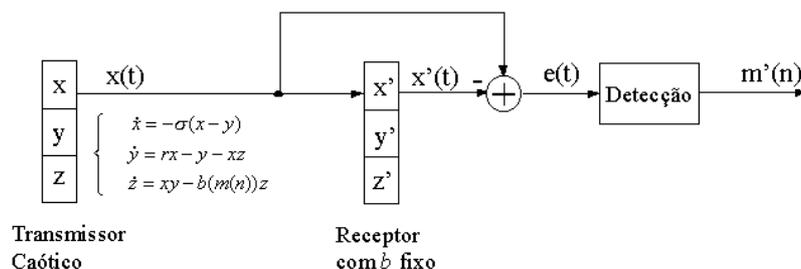


Figura 5.1: Sistema de comunicação com sinais caóticos utilizando modulação de parâmetros.

Neste sistema, os bits 0 e 1 são associados com valores do parâmetro b do sistema transmissor que utiliza as equações de Lorenz.

Por exemplo, pode-se associar o bit 0 ao valor $b = 4,0$ e o bit 1 ao valor $b = 4,4$ e manter o sistema do receptor com $b = 4,0$ fixo. Neste caso, ao transmitir-se um bit 0, transmissor e receptor entrarão em sincronismo e o sinal na entrada do detector terá uma potência baixa. Porém, ao transmitir-se o bit 1, como foi visto na Seção 3.2.3, ocorre um erro de sincronismo e a potência do sinal na entrada do detector será relativamente alta. Dessa forma, avaliando-se o valor quadrático de $e(t)$ pode-se decidir qual bit foi enviado. Este sistema foi proposto por Cuomo e Oppenheim em [15].

Se por um lado este sistema é bastante simples, apresenta uma taxa de erro de bit razoavelmente alta devido a associação de um dos bits com um estado não-sincronizado entre mestre e escravo.

Um exemplo de sistema baseado no segundo enfoque é mostrado na Figura 5.2.

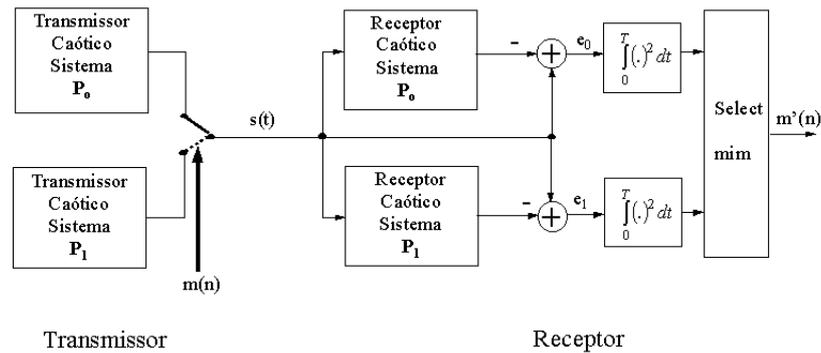


Figura 5.2: Sistema CSK.

Este sistema, conhecido como “Chaotic Shift Keying” (CSK), utiliza dois osciladores caóticos diferentes \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . Podem ser dois sistemas de equações diferenciais distintos ou um mesmo sistema de equações com parâmetros diferentes.

A mensagem binária $m(n)$ controla a chave do diagrama. Associa-se o bit 0 à transmissão durante um certo intervalo de duração T do sinal gerado pelo oscilador \mathbf{P}_0 . Neste caso, o receptor constituído por um escravo deste oscilador entrará em sincronismo e o outro não. Assim, $e_0(t)$ terá um valor quadrático médio baixo e $e_1(t)$ terá um valor quadrático médio alto. Desta forma, o seletor na saída do receptor escolherá a entrada superior a ser associada ao bit 0. A situação oposta ocorre quando se deseja transmitir o bit 1.

Este sistema, apesar de apresentar uma taxa de erro bem mais baixa em relação ao da Figura 5.1, possui uma complexidade muito maior. São necessários dois osciladores caóticos no mestre e no escravo.

O sistema “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) proposto por Ushio em [23], que será detalhado neste capítulo, tenta unir as vantagens das duas idéias descritas acima sem as respectivas desvantagens.

Para isso, os dígitos binários são mapeados em dois tipos diferentes de sincronização: o *sincronismo em fase* e o *em anti-fase*.

Dois sistemas são ditos *sincronizados em fase* quando suas variáveis de estado convergem para um mesmo valor no tempo, ou seja, a diferença entre seus estados vai a zero. Dois sistemas são ditos *sincronizados em anti-fase* quando suas variáveis de estado convergem para um mesmo valor absoluto no tempo, porém, seus sinais são opostos. Ou seja, sua soma vai a zero.

Baseando-se numa versão em tempo discreto do método de projeto de sistemas caóticos sincronizantes de Wu e Chua, discutido na Seção 4.2, Ushio mostra como criar um sistema mestre-escravo em que o segundo sincroniza com o primeiro em fase ou em anti-fase de acordo com a mensagem binária a ser transmitida. Detectando qual tipo de sincronismo ocorreu é possível recuperar a mensagem no receptor. Esse sistema é mais robusto do que a simples detecção de sincronismo/não-sincronismo sendo, ao mesmo tempo, mais simples do que a utilização de dois sistemas caóticos independentes.

Como o trabalho de Ushio é baseado no sincronismo de sistemas de tempo discreto (equações de diferenças), a próxima seção estende os conceitos já estudados nos Capítulos 3 e 4 para este caso.

5.1 Sincronização caótica em tempo discreto

O método de projeto de osciladores caóticos em tempo contínuo criado por Wu e Chua pode ser facilmente estendido para o caso discreto. De forma análoga à Equação (4.1), pode-se descrever um sistema mestre em tempo discreto como:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{c} \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{x}_n \in R^m$ é o estado do sistema no passo $n \in N$, \mathbf{A} é uma matriz $m \times m$ cujos autovalores possuem módulo menor do que a unidade, $h : R^m \rightarrow R^m$ é uma função possivelmente não-linear e \mathbf{c} é um vetor constante.

A seguir, serão definidos os sistemas escravos nos casos em que se deseja sincronização em fase e em anti-fase.

5.1.1 Sincronização em fase

Para que ocorra a sincronização em fase, toma-se como sistema escravo do sistema (5.1) o análogo em tempo discreto ao que foi proposto por Wu e Chua (Equação (4.3)). Ou seja,

$$\mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}'_n + \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{p} \quad (5.2)$$

em que \mathbf{p} é um vetor constante, $\mathbf{x}'_n \in R^m$ é o vetor de estados do sistema escravo e \mathbf{x}_n é o vetor de estados de (5.1).

Considerando o erro de sincronismo como $\mathbf{e}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n$, subtraindo-se (5.1) de (5.2) obtém-se:

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{e}_n + (\mathbf{c} - \mathbf{p}). \quad (5.3)$$

Com a condição de que \mathbf{A} possui autovalores menores do que a unidade em módulo, essa seqüência converge e no limite em que $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n$. Assim, nesse limite,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= \mathbf{A}\mathbf{e}_n + (\mathbf{c} - \mathbf{p}) \Rightarrow \mathbf{e}_n - \mathbf{A}\mathbf{e}_n = \mathbf{c} - \mathbf{p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{e}_n = \mathbf{c} - \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade $m \times m$. Desta forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{p}) \quad (5.5)$$

desde de que a matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ seja inversível. Assim, passado o transitório, a diferença entre os estados do mestre e do escravo converge para uma constante.

Este tipo de sincronização será chamado de *sincronização viesada em fase* da qual a *sincronização em fase* é um caso particular quando $\mathbf{c} = \mathbf{p}$.

5.1.2 Sincronização em anti-fase

Para obter o sincronismo em anti-fase, considera-se o sistema escravo da Equação (5.1) como sendo definido por

$$\mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}'_n - \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{q} \quad (5.6)$$

em que \mathbf{q} é um vetor constante, $\mathbf{x}'_n \in R^m$ é o vetor de estados do sistema escravo e \mathbf{x}_n é o vetor de estados do sistema mestre (5.1). Somando-se (5.1) e (5.6), obtém-se

$$\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_n + \mathbf{x}'_n) + \mathbf{c} + \mathbf{q} \quad (5.7)$$

e procedendo-se da mesma forma que no sincronismo em fase, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{x}'_n) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{q}), \quad (5.8)$$

em que, novamente, \mathbf{I} é a matriz identidade $m \times m$. Assim, passado o transitório, a soma dos estados do mestre e do escravo converge para uma constante.

Este tipo de sincronização será chamada de *sincronização viesada em anti-fase* da qual a *sincronização em anti-fase* é um caso particular para $\mathbf{q} = -\mathbf{c}$.

5.1.3 Exemplos de sincronização em fase e em anti-fase

Nesta seção será dado um exemplo de sincronização em fase e anti-fase utilizando sistemas de tempo discreto. Para isso será utilizado o mapa de Hénon, sistema de equações de diferenças bidimensional que possui órbitas caóticas para alguns valores de seus parâmetros, já apresentado na Seção 2.4.1. A equação que define esse sistema (2.24) está reproduzida abaixo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n + 1 - ax_n^2 \\ bx_n \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Assim como na Seção 2.4.1 serão utilizados $a = 1, 4$ e $b = 0, 3$, valores que, como já foi visto, fazem com que sejam gerados sinais caóticos.

Este sistema pode ser colocado na forma (5.1). Para isso, inicialmente faz-se as mudanças de variáveis $x_n \rightarrow \frac{1}{a}x_n$ e $y_n \rightarrow \frac{b}{a}y_n$. Desta forma, (5.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}x_{n+1} \\ \frac{b}{a}y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a}y_n + 1 - a\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 \\ b\left(\frac{x_n}{a}\right) \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

ou

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by_n - x_n^2 + a \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Substituindo-se os valores de a e b em (5.11) obtém-se como sistema mestre:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

que é da forma (5.1) com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} -x_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Para obter o sincronismo viesado em fase, basta definir um sistema escravo da forma (5.2). Tomando-se, por exemplo, $\mathbf{p} = (2, 4; -1)^t$, o sistema escravo pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,4 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Neste caso, aplicando (5.5),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Desta forma, após um transitório necessário para a sincronização obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

A relação entre x_n e x'_n é mostrada na Figura 5.3 em que são consideradas 5000 iterações de (5.12) e (5.14) depois das 500 primeiras iterações terem sido desprezadas. Foram utilizadas condições iniciais $\mathbf{x}_0 = (0, 1; 0, 1)^t$ e $\mathbf{x}'_0 = (0, 2; 0, 3)^t$.

Esta figura mostra que realmente ocorre o sincronismo já que os pontos obtidos estão sobre a reta $x'_n = x_n + 1$.

Da mesma forma, para obter-se o sincronismo viesado em anti-fase, pode se tomar como sistema escravo, seguindo (5.6) com $\mathbf{q} = (-0, 4; -1)^t$,

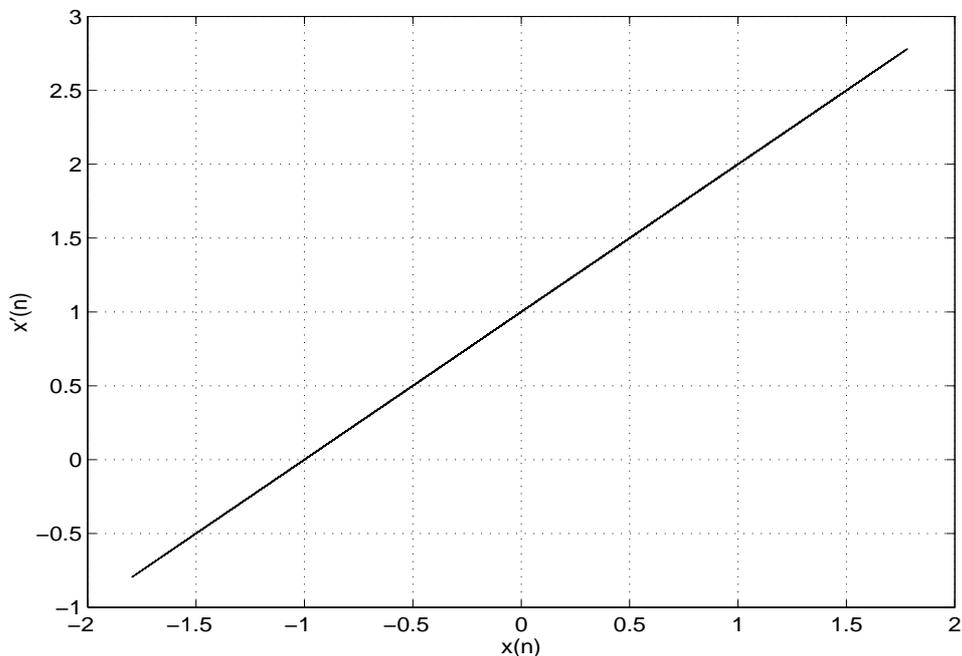


Figura 5.3: Sincronização viesada em fase no sistema de Hénon.

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,4 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Para este sistema escravo, aplicando-se (5.8):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{x}'_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Assim, passado o transitório,

$$\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

A Figura 5.4 mostra um gráfico de x'_n por x_n para este caso. Novamente, foram utilizadas 5000 iterações tendo sido desprezadas as 500 primeiras. Foram utilizadas condições iniciais $\mathbf{x}_0 = (0, 1; 0, 1)^t$ e $\mathbf{x}'_0 = (0, 2; 0, 3)^t$.

Uma vez estabelecidos os conceitos de sincronismo em fase e anti-fase para sistemas de tempo discreto, na próxima seção será descrito o sistema CPSK propriamente dito.

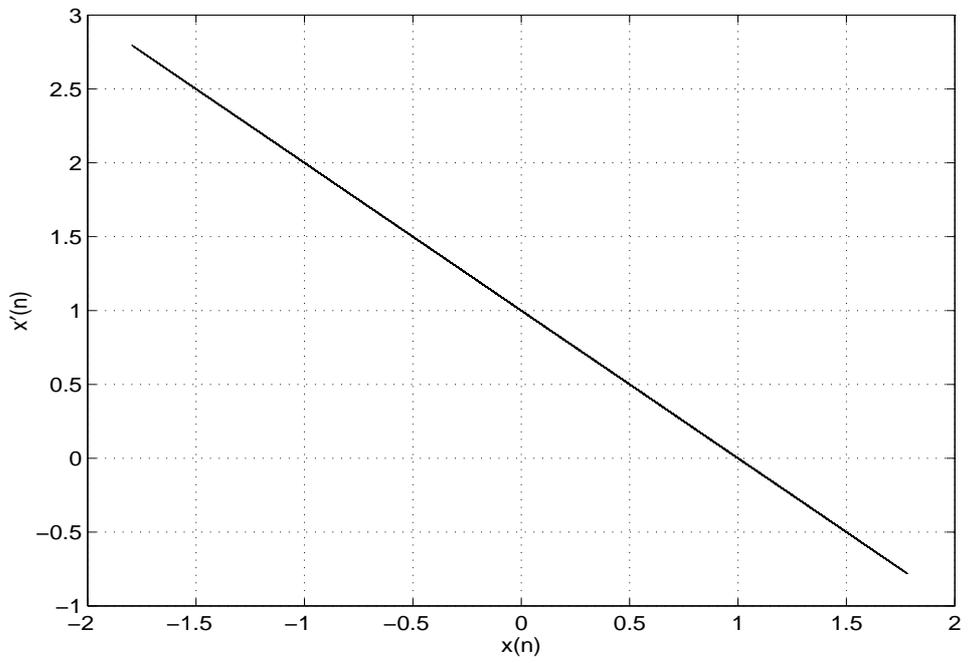


Figura 5.4: Sincronização viesada em anti-fase no sistema de Hénon.

5.2 O CPSK

Baseado na sincronização em fase e em anti-fase, Ushio propôs um sistema de comunicações que batizou de “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK). Como foi dito no começo deste capítulo, esse sistema reúne simplicidade (por utilizar apenas um oscilador caótico no mestre e no escravo) com baixa taxa de erro (por ter seus bits associados a estados sincronizados do mestre com o escravo).

O princípio básico deste sistema é a utilização de um mestre-escravo em que, de acordo com o bit de informação a ser transmitido, ocorre o sincronismo em fase ou em anti-fase.

Um diagrama de blocos do CPSK é mostrado na Figura 5.5.

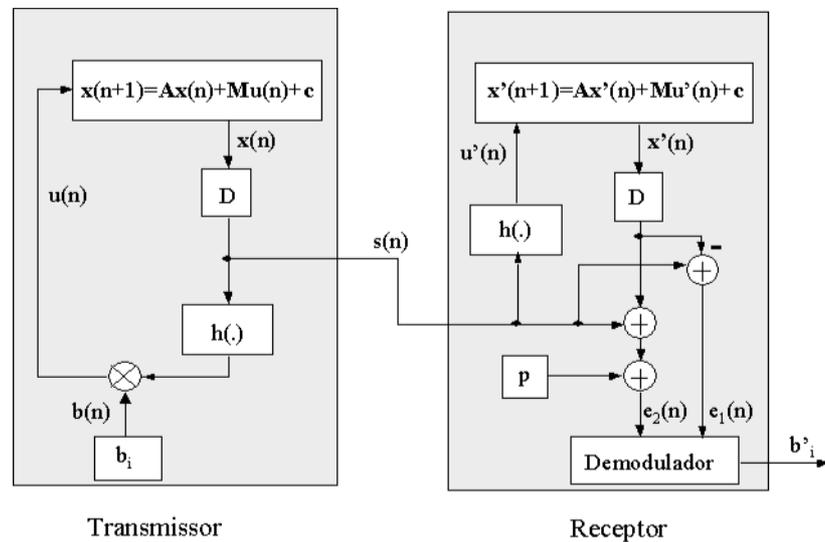


Figura 5.5: O sistema CPSK.

Nesta figura, $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{x}'(n)$ e \mathbf{c} são vetores-colunas m -dimensionais e \mathbf{A} , \mathbf{M} e \mathbf{D} são matrizes $m \times m$, $m \times 1$ e $1 \times m$ respectivamente. Além disso, $u(n)$, $s(n)$ e $b(n)$ são sinais escalares de tempo discreto, p é um escalar constante e b_i é a seqüência de dígitos binários (0's e 1's) a ser transmitida. A função $h : R \rightarrow R$ é a não-linearidade do sistema.

O transmissor pode ser representado pela equação de diferenças

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{M}(b(n) \times h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n))) + \mathbf{c}, \quad (5.20)$$

em que $\mathbf{x}(n)$ é o estado do transmissor no passo n e $b(n) \in \{-1, 1\}$ é definido em cada subconjunto $\{n \in N \mid iT < n < (i+1)T\}$, com $T \in N$ de acordo com o seqüência de bits b_i . Mais precisamente:

$$b(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } b_i = 0 \text{ e } iT \leq n \leq (i+1)T \\ -1 & \text{se } b_i = 1 \text{ e } iT \leq n \leq (i+1)T \end{cases}. \quad (5.21)$$

O número natural T , número de amostras durante o qual o bit de informação é constante, é chamado de *tempo de bit*.

O sistema mestre gera o sinal $s(n)$ definido por

$$s(n) = \mathbf{D}\mathbf{x}(n), \quad (5.22)$$

que é transmitido para o escravo.

O sistema escravo (receptor) é descrito por equação de diferenças análoga à do mestre (5.20) com a substituição de $u(n) = b(n) \times h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n))$ pelo sinal $u'(n) = \mathbf{h}(s(n))$:

$$\mathbf{x}'(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(n) + \mathbf{M}(\mathbf{h}(\mathbf{D}\mathbf{x}(n))) + \mathbf{c}, \quad (5.23)$$

No receptor são gerados dois sinais de erro $e_1(n)$ e $e_2(n)$:

$$\begin{aligned} e_1(n) &= s(n) - \mathbf{D}\mathbf{x}'(n) \\ e_2(n) &= s(n) + \mathbf{D}\mathbf{x}'(n) + p \end{aligned} \quad (5.24)$$

em que $p = -2\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$.

Se $b_i = 0$, $b(n) = 1$ durante um intervalo de T amostras e neste tempo o sistema mestre-escravo (transmissor-receptor) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{M}h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n)) + \mathbf{c} \\ \mathbf{x}'(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(n) + \mathbf{M}h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n)) + \mathbf{c} \end{cases} \quad (5.25)$$

que é da forma (5.1)-(5.2). Assim, o transmissor e o receptor entram em sincronismo em fase e, de acordo com (5.22), (5.24) e (5.5),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_1(n)| = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{c}) = 0. \quad (5.26)$$

Se $b_i = 1$, $b(n) = -1$ e durante um intervalo de T amostras o sistema mestre-escravo (transmissor-receptor) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) - \mathbf{M}h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n)) + \mathbf{c} \\ \mathbf{x}'(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(n) + \mathbf{M}h(\mathbf{D}\mathbf{x}(n)) + \mathbf{c} \end{cases} \quad (5.27)$$

que é da forma de (5.1) e (5.6) e, de acordo com (5.22), (5.24) e (5.8),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_2(n)| = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{c}) + p = 0. \quad (5.28)$$

Assim, o sincronismo em fase ou em anti-fase entre mestre e escravo é atingido, dependendo do bit de informação b_i , em cada subconjunto de amostras com índice tal que $\{n \in N/iT < n < (i+1)T\}$.

Em cada um desses subconjuntos, o comportamento de $e_1(n)$ e $e_2(n)$ nos primeiros \hat{T} ($\hat{T} < T$) passos pode ser visto como um transitório e pode ser negligenciado. Desta forma, o demodulador pode recuperar o bit b'_i de acordo com o tipo de sincronização obtido:

$$b'_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{n=iT+\hat{T}-1}^{i(T+1)-1} (|e_1(n)| - |e_2(n)|) < 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.29)$$

Assim, espera-se obter $b'_i = b_i$ para todo $i \in N$.

A escolha do mapa gerador de sinais caóticos a ser utilizado é de fundamental importância para o bom funcionamento do CPSK. Isto porque, pensando em termos de comunicação segura, o sinal $s(n)$ obtido no sincronismo em fase deve ser preferencialmente bastante parecido com o obtido no sincronismo em anti-fase, o que não acontece em geral.

A título de exemplo, utilizando-se o mapa de Hénon (5.12), ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } h(x) = -x^2, \quad (5.30)$$

percebe-se claramente a diferença entre os sinais $s(t)$ produzido no sincronismo em fase $b_i = 0$ e o produzido no caso do sincronismo em anti-fase $b_i = 1$. A Figura 5.6 comprova isso.

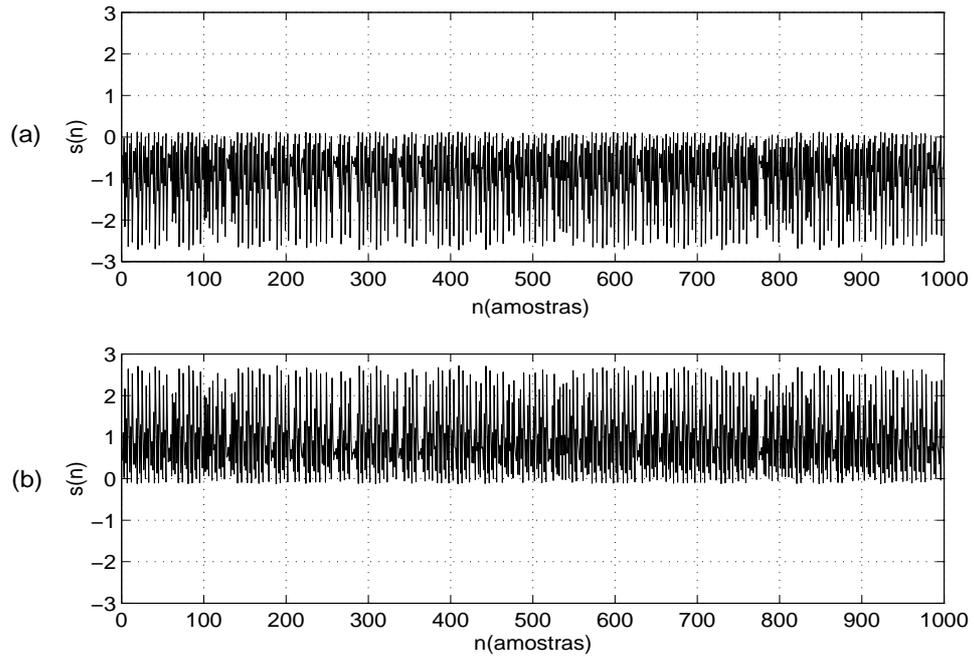


Figura 5.6: Sinais transmitidos pelo mestre no CPSK utilizando o mapa de Hénon. (a) bit 0 (b) bit 1.

Em [23], Ushio sugere a utilização do mapa unidimensional

$$\begin{cases} x(n+1) = 0,065x(n) + b(n) (3f(x(n)) - f(x(n))^3) - 0,07 \\ s(n) = x(n) \end{cases} \quad (5.31)$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 4\text{mod}\left(\frac{x+2}{4}\right) - 2, & \text{se } x \geq 0 \\ -\left(4\text{mod}\left(\frac{|x|+2}{4}\right) - 2\right), & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

e a função *mod* representa a parte fracionária de um número real x .

A não-linearidade deste sistema é representada na Figura 5.7.

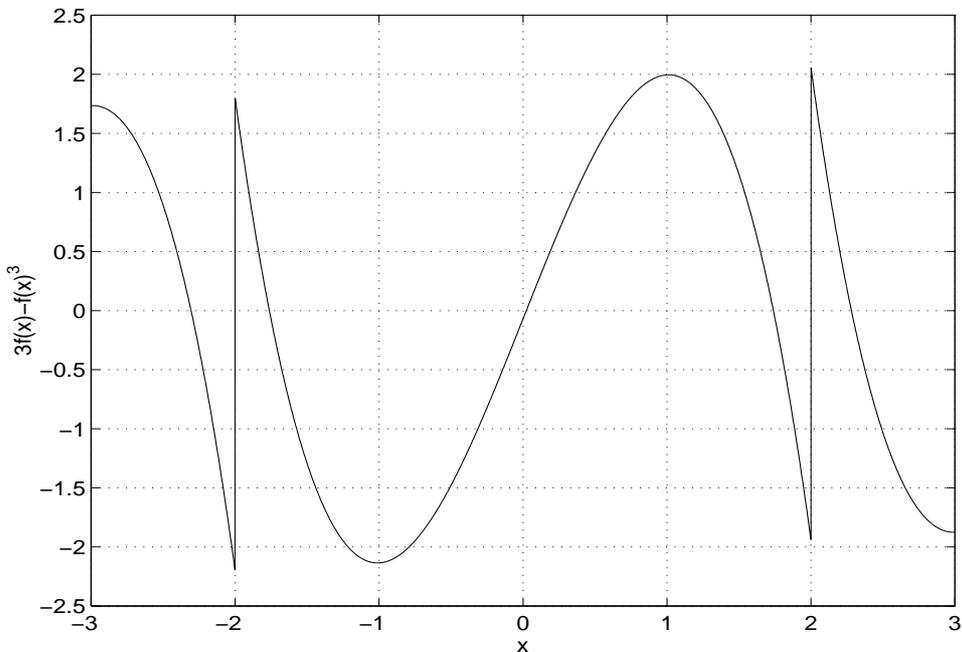


Figura 5.7: Não-linearidade do mapa proposto por Ushio.

Neste caso, os sinais transmitidos nos casos de bit 0 e 1 estão mostrados na Figura 5.8. Vê-se que os sinais, apesar de não serem tão parecidos, pelo menos ocupam a mesma faixa de valores.

O receptor relativo ao transmissor utilizando este mapa pode ser representado pela equação diferencial

$$x'(n+1) = 0,065x'(n) + 3f(x(n)) - f(x(n))^3 - 0,07 \quad (5.33)$$

e os sinais de erro são dados por

$$\begin{aligned} e_1(n) &= s(n) - x'(n) \\ e_2(n) &= s(n) + x'(n) + \frac{0,14}{0,935} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Tomando-se $T = 10$ e $\hat{T} = 3$, foram feitos alguns testes com esse sistema. A Figura 5.9 mostra o sinal transmitido $s(n)$ para uma certa seqüência de 50 bits b_i .

Esta figura mostra que $s(n)$ é realmente caótico e é difícil de estimar b_i a partir dele e mesmo a transição entre bits não é facilmente perceptível.

Os sinais de erro e a mensagem recuperada no receptor para essa mesma seqüência de bits são mostrados nas Figuras 5.10 e 5.11.

Comparando as Figuras 5.9(a) com 5.11(b) vemos que a recuperação é perfeita.

Os sinais $e_1(n)$ e $e_2(n)$ caem realmente muito rápido para zero quando ocorre sincronização em fase e anti-fase respectivamente. As experiências computacionais mostraram que mesmo valores menores de T podem ser usados sem problemas. A

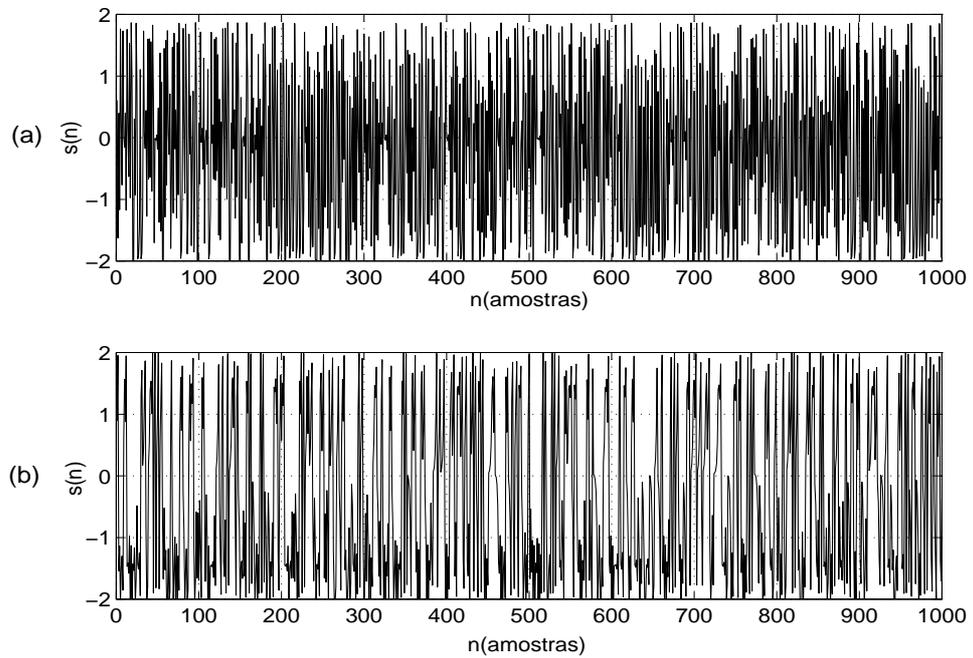


Figura 5.8: Sinais transmitidos pelo mestre no CPSK utilizando o mapa proposto por Ushio (5.31). (a) bit 0 (b) bit 1.

situação é mais problemática quando o canal possui ruído gaussiano aditivo ou é limitado em frequência como será visto na próxima seção.

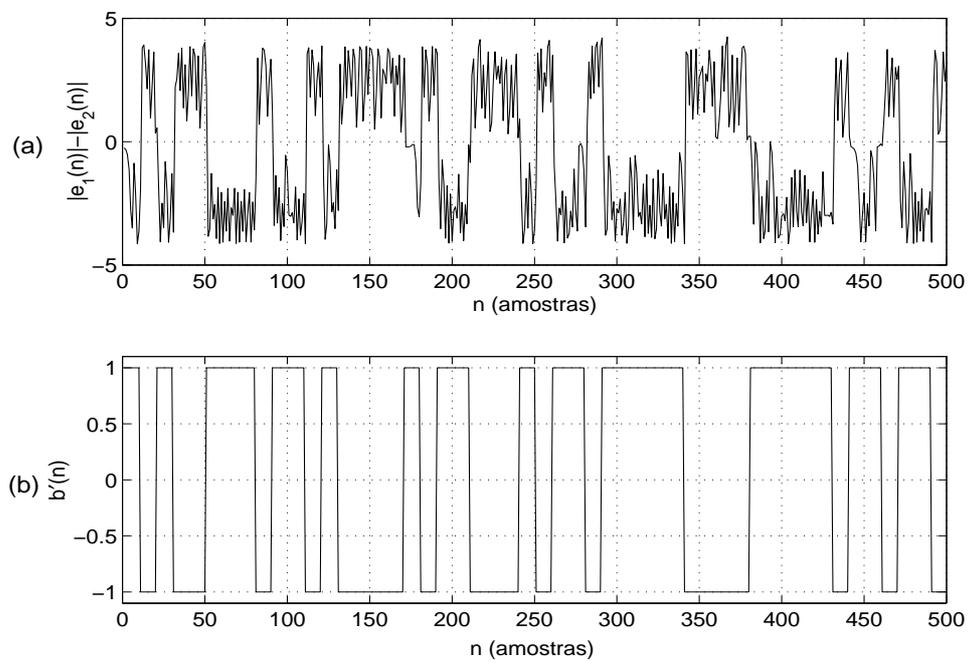


Figura 5.11: Recuperação da seqüência $b(n)$ da Figura 5.9. (a) Sinal $|e_1(n)| - |e_2(n)|$ utilizado pelo demodulador na decisão do bit transmitido; (b) Mensagem recuperada $b'(n)$ relacionada com b'_i por (5.21)

5.3 Comentários sobre a influência de condições não-ideais de canal

Na Seção 4.3 analisou-se com certo detalhe o comportamento do sincronismo de sistemas caóticos frente a condições de ruído e limitação em banda do canal de comunicações.

Estes problemas afetam o sistema CPSK de forma bastante semelhante já que, apesar da mensagem a ser transmitida ser digital, o princípio de funcionamento, baseado na sincronização de sinais caóticos é o mesmo visto no Capítulo 4. A única vantagem deste sistema vem do próprio fato da informação ser digital: como ela não está contida na amplitude do sinal caótico, é menos suscetível à influência de imperfeições do canal. Um bit de informação é transmitido usando-se T amostras de sinal caótico, situação bem mais confortável do que no caso analógico em que uma amostra do sinal caótico era responsável pela transmissão de uma amostra analógica da mensagem.

Serão analisados separadamente nas próximas duas subseções a influência da limitação em banda do canal e da adição de um ruído branco gaussiano no sinal caótico transmitido.

5.3.1 Influência da limitação em banda do canal

Da mesma forma como no caso analógico, a limitação em banda no canal de transmissão provoca grandes problemas para o sistema CPSK devido ao erro causado no sincronismo dos osciladores caóticos.

Modelando-se o canal por um filtro passa-faixas de fase linear pode-se fazer uma análise como a das Seções 4.3.2 e 4.4.1.

As Figuras 5.12 a 5.14 mostram transmissão semelhante a que foi feita na Seção 5.2 só que agora com um canal de comunicações que limita o espectro do sinal transmitido em $f_{cs} = 0,8$ da frequência de Nyquist ($f_a/2 = 4kHz$). Novamente utilizou-se $T = 10$ e $\hat{T} = 3$.

Estas figuras mostram que com 20% da faixa de frequências do sinal transmitido cortada já ocorre um erro na recuperação de 8 dos 50 bits transmitidos, que corresponde a 16%.

A Figura 5.15 mostra a taxa de erro de bit em função da porcentagem do espectro do sinal transmitido filtrado pelo canal para vários tempos de bit diferentes.

A probabilidade de erro de bit cresce muito rapidamente conforme a frequência de corte superior do canal cai. Para valores da ordem de $f_{cs} = 0,7$, o aumento do tempo de bit T não resolve o problema. A probabilidade de erro de bit neste caso é extremamente alta.

A solução deste problema no caso analógico, apresentado na Seção 4.4.2, também pode ser utilizada aqui. Ao limitar-se convenientemente o espectro do sinal caótico antes da transmissão a influência da banda limitada do canal deixa de existir. O diagrama da Figura 5.16 ilustra esta solução: ele tem a mesma forma do diagrama 5.5 incluindo-se apenas $H_l(z)$, um filtro passa-faixas com banda de passagem mais estreita do que a do canal.

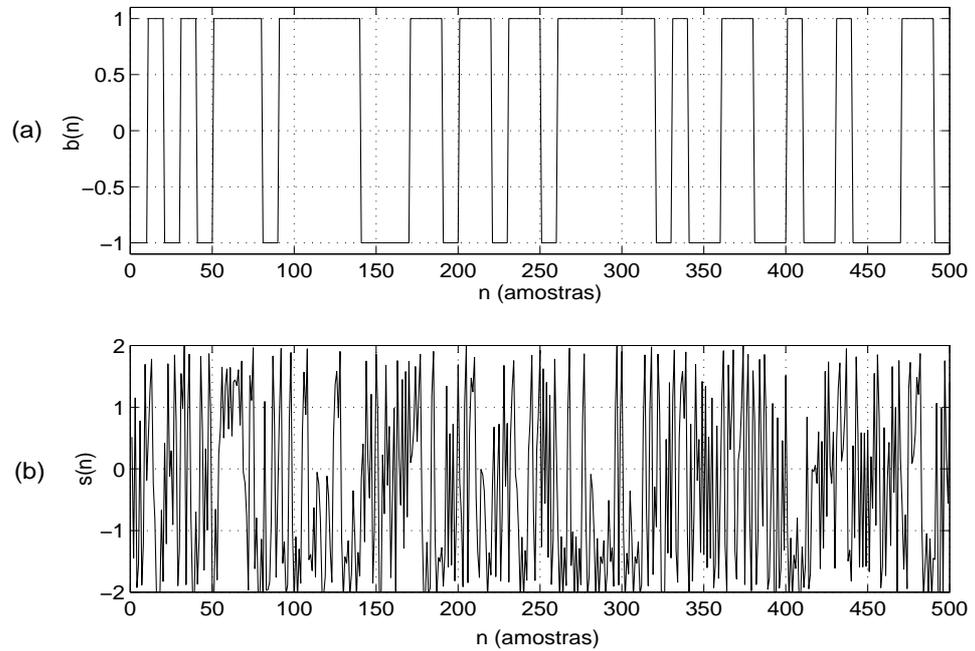


Figura 5.12: Exemplo de transmissão CPSK em canal de banda limitada. (a) Sinal $b(n)$ para uma seqüência de 50 bits com $T = 10$ amostras. (b) Sinal CPSK transmitido para esta seqüência.

Desta forma, desde que se contente em utilizar um sinal caótico limitado em banda, o problema da limitação em banda do canal fica resolvido, da mesma forma que no caso analógico estudado em detalhes na Seção 4.4.2.

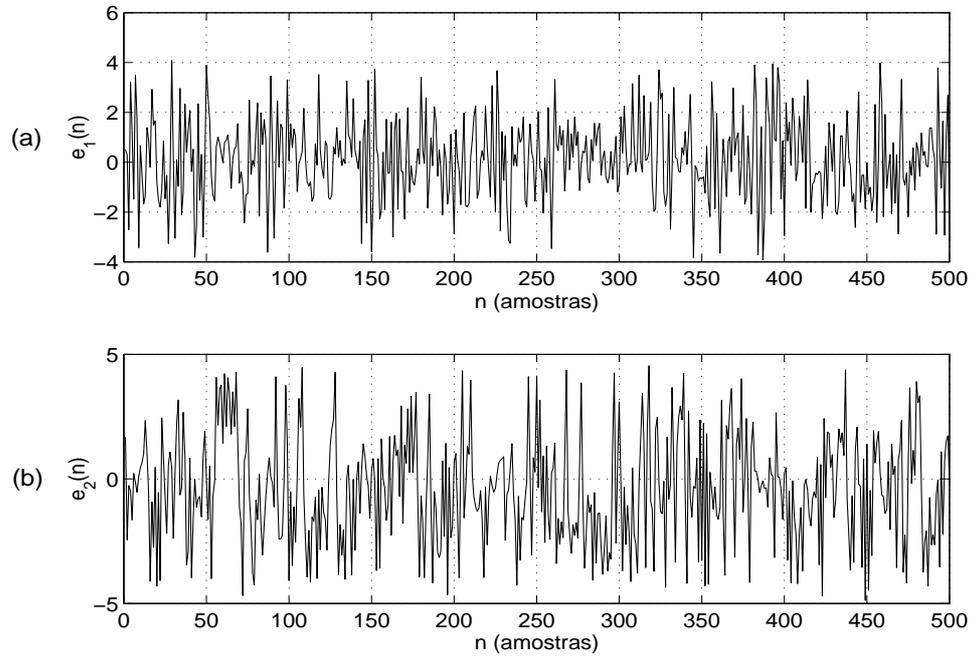


Figura 5.13: Sinais obtidos no receptor para a seqüência transmitida na Figura 5.12 com canal limitado em freqüência. (a) $e_1(n)$; (b) $e_2(n)$

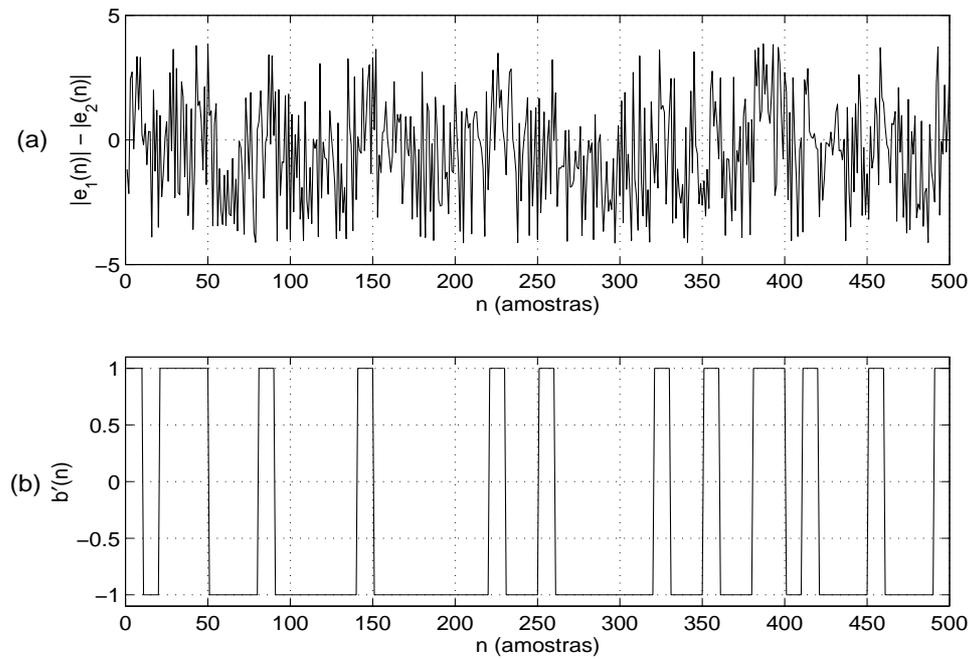


Figura 5.14: Recuperação da seqüência $b(n)$ da Figura 5.12 em canal de banda limitada. (a) Sinal $|e_1(n)| - |e_2(n)|$ utilizado pelo demodulador na decisão do bit transmitido; (b) Mensagem recuperada $b'(n)$ relacionada com b'_i por (5.21)

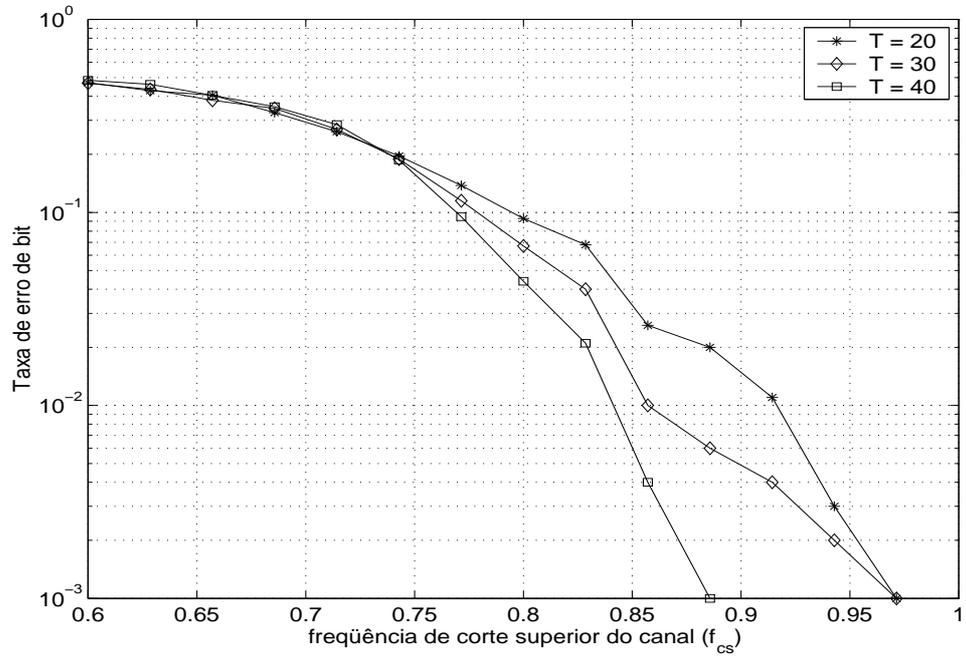


Figura 5.15: Taxa de erro de bit em função da relação sinal-ruído no canal para diferentes valores do tempo de bit T .

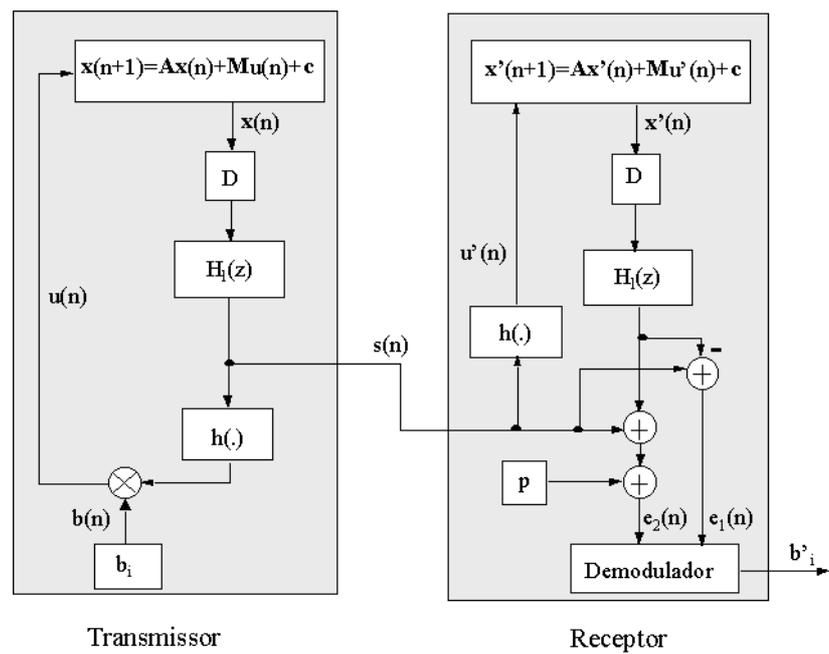


Figura 5.16: Diagrama do sistema CPSK modificado com a introdução de filtros passa-banda no transmissor e receptor.

5.3.2 Influência do ruído aditivo

A adição de um ruído branco gaussiano no canal de transmissão provoca o aparecimento de um erro de sincronismo proporcional à intensidade do ruído, como já foi visto na Seção 4.3.1.

Os erros $e_1(n)$ e $e_2(n)$ não convergem mais para zero no caso de sincronismo em fase e anti-fase respectivamente. Como exemplo, as Figuras 5.17 a 5.19 mostram uma transmissão semelhante a que foi feita na Seção 5.2 só que agora com um canal de comunicações que apresenta uma relação sinal-ruído de 20dB. Novamente utilizou-se $T = 10$ e $\hat{T} = 3$.

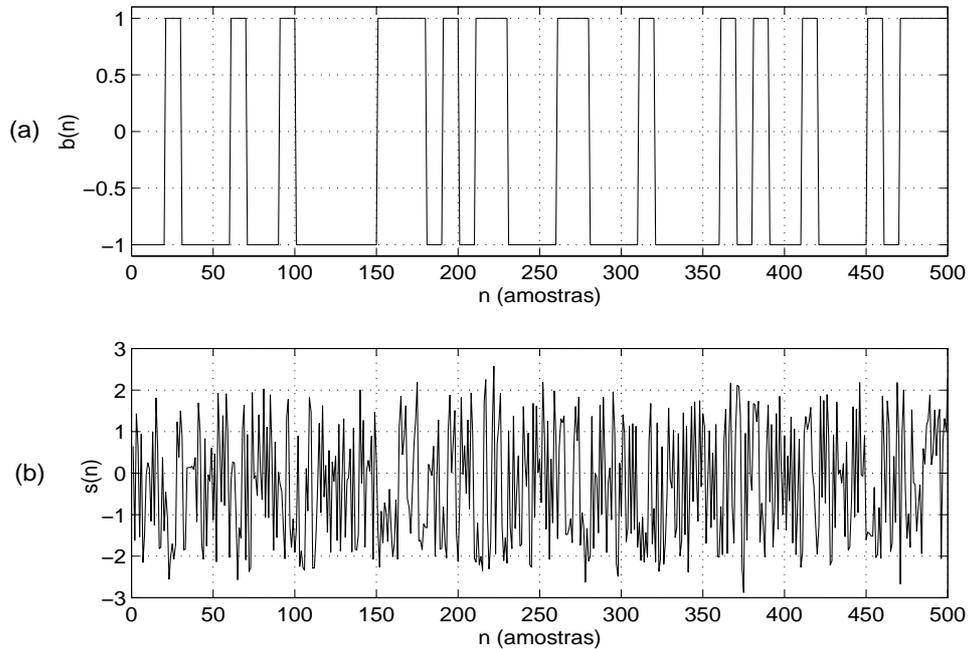


Figura 5.17: Exemplo de transmissão CPSK em canal ruidoso. (a) Sinal $b(n)$ para uma seqüência de 50 bits com $T = 10$ amostras. (b) Sinal CPSK transmitido para esta seqüência.

Neste exemplo, dos 50 bits enviados houve erro na recepção de apenas 1 (aquele transmitido entre $n = 30$ e $n = 40$).

A Figura 5.20 resume os resultados obtidos para taxas de erro de bit em função da relação sinal-ruído no canal e do tempo de bit T .

Vê-se pela figura que quanto maior o tempo de bit, menor a taxa de erro para uma mesma relação sinal-ruído, o que era esperado já que mais amostras são utilizadas na decisão de qual bit foi transmitido.

Esses resultados podem ser comparados com os de sistemas mais simples e tradicionais, como a modulação por amplitude de pulso (PAM) com sinalização polar [48]. Na verdade este sistema consiste na transmissão do próprio sinal $b(n)$, ou seja $s(n) = b(n)$. O receptor ótimo deste sistema é um integrador associado com um detector de nível. Os resultados obtidos com este sistema em condição de ruído são bem melhores do que os apresentados na Figura 5.20. Isto pode ser entendido

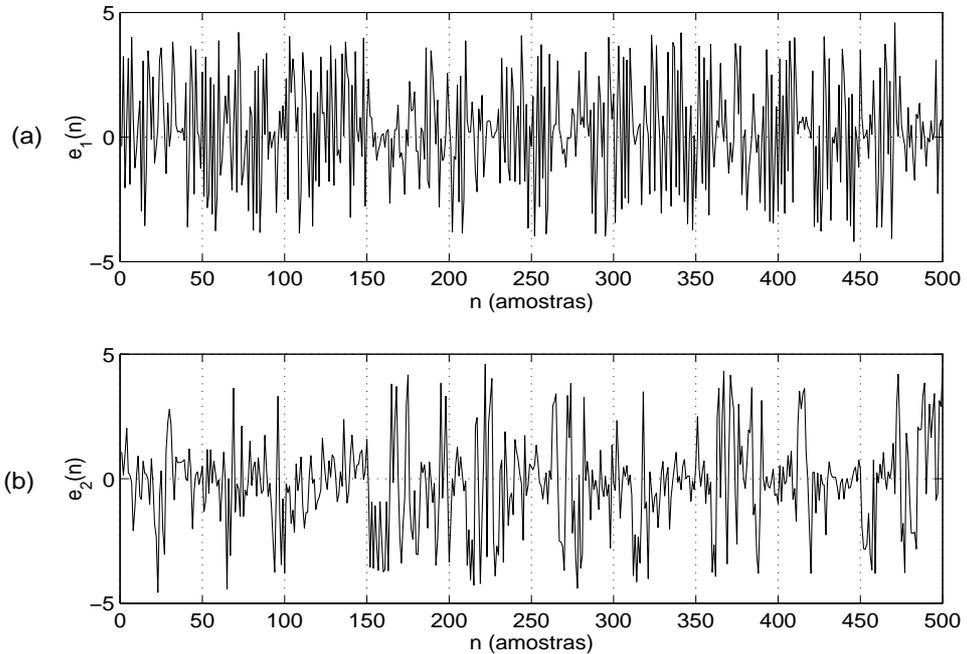


Figura 5.18: Sinais obtidos no receptor para a seqüência transmitida na Figura 5.17 com um canal com 20dB de relação sinal-ruído. (a) $e_1(n)$; (b) $e_2(n)$

considerando que, mesmo na situação de canal ideal, no CPSK o sinal utilizado na tomada de decisão $|e_1(n)| - |e_2(n)|$ não é constituído de dois níveis totalmente separados (veja, por exemplo, a Figura 5.11(a)) como aconteceria no caso do PAM. Assim, com o ruído a situação torna-se ainda pior para o CPSK.

O argumento de alguns autores a favor deste sistema (por exemplo [23], [42]) é em termos do aumento da segurança da transmissão. Ao contrário dos sistemas mais tradicionais, ao invés de se associar um pulso com um formato e amplitude fixo para cada bit, no CPSK é associado um mapa. O formato e a amplitude nunca se repete de um bit para outro.

A mesma análise feita na Seção 4.4.2 é válida aqui. Pode-se utilizar o mesmo algoritmo descrito lá para diminuir o erro causado pelo ruído no canal de comunicações ganhando-se um pouco na taxa de erro de bit ao custo de maior complexidade computacional. Como o problema é exatamente o mesmo, esta análise não será repetida aqui. De qualquer forma, este ganho no desempenho está longe de colocá-lo ao nível de sistemas tradicionais em termo da probabilidade de erro para um mesmo tempo de bit e uma mesma relação sinal-ruído no canal de comunicações.

Como, no caso digital aqui tratado, a mensagem em cada intervalo T não altera a geração do sinal caótico, é provável que seja possível elaborar um sistema de equalização do canal com relação ao ruído. Isto porque, ao contrário do que acontecia no caso analógico, uma vez detectado corretamente o bit que foi transmitido pode obter-se com grande precisão o erro que afetou o sinal durante a transmissão. Essa informação, por sua vez, pode ser utilizada para ajudar na detecção dos bits seguintes. Esse é um enfoque que pode ser bastante explorado ainda em trabalhos

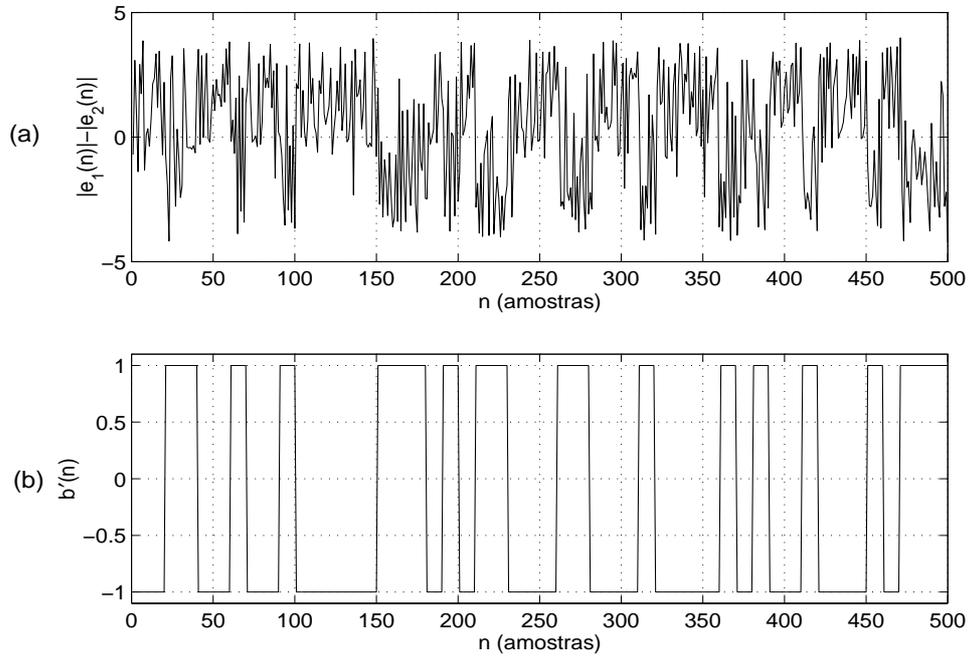


Figura 5.19: Recuperação da seqüência $b(n)$ da Figura 5.17 em canal ruidoso. (a) Sinal $|e_1(n)| - |e_2(n)|$ utilizado pelo demodulador na decisão do bit transmitido; (b) Mensagem recuperada $b'(n)$ relacionada com b_i pela expressão (5.21).

futuros.

Concluimos assim o estudo do CPSK. Assim como os casos analógicos vistos, o sistema funciona muito bem explorando as propriedades de osciladores caóticos sincronizantes desde que o ruído no canal de comunicações não seja relevante. Neste caso, apesar da robustez mais acentuada típica de sistemas digitais, volta-se ao mesmo problema que afetava os sistemas analógicos: a sensibilidade muito grande do sincronismo ao ruído. Apesar de progressos nos últimos anos, sem dúvida este ainda é um problema a ser resolvido.

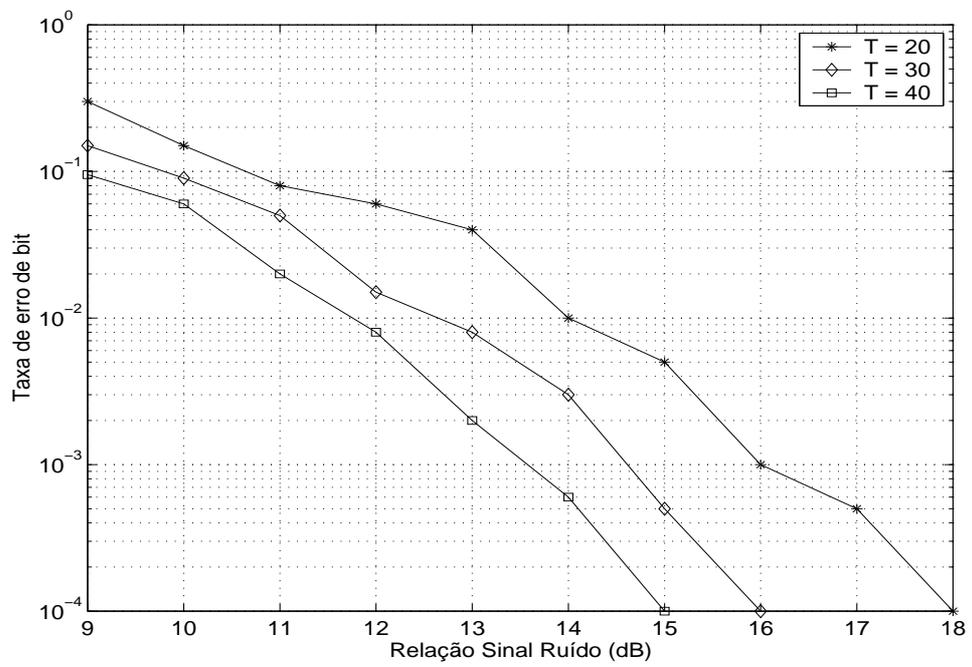


Figura 5.20: Taxa de erro de bit em função da relação sinal-ruído no canal para diferentes valores do tempo de bit T .

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo deste trabalho, como foi colocado na sua introdução, era fazer um estudo da teoria de sistemas não-lineares e caos e sua aplicação em alguns sistemas de comunicação descritos na literatura, visando principalmente analisar o seu comportamento em situações não-ideais.

Inicialmente este não era um objetivo muito simples a ser alcançado. Por um lado porque a teoria do caos envolve conceitos matemáticos complexos e uma nomenclatura pouco habitual para pesquisadores e estudantes da área de processamento de sinais e telecomunicações. Por outro lado, a maior parte dos artigos publicados sobre métodos de transmissão/recepção utilizando sinais caóticos trabalham com situações bastante hipotéticas como canais ideais.

Os Capítulos 2 e 3 procuram superar o primeiro desafio, ou seja, tentar apresentar os conceitos da teoria do caos necessários para se entender o sincronismo de sistemas caóticos de forma a facilitar o contato de estudantes e pesquisadores da área de processamento de sinais com este tema.

Embora esta parte do trabalho tivesse uma natureza fundamentalmente teórica foi desenvolvida uma série de rotinas computacionais que permitiram ilustrar e verificar os resultados teóricos. Com isso, essa parte do trabalho foi a que tomou a maior parte do tempo. O conhecimento em um nível um pouco mais aprofundado, adquirido no desenvolvimento destes capítulos foi fundamental para a compreensão dos artigos estudados nos capítulos seguintes.

A segunda parte do desafio não foi menos instigante. Como já foi dito, os artigos analisados não tratavam do comportamento dos sistemas neles propostos em condições de canal ruidoso ou com outras características não-ideais. O que se viu nos Capítulos 4 e 5 foi que esses sistemas tem um comportamento ruim na presença dessas imperfeições. Assim, partiu-se para a quantificação desses problemas e tentativas de soluções. Foram analisados separadamente dois problemas específicos: a limitação em banda do canal e a adição de ruído gaussiano neste.

Para o primeiro problema foi pensada uma solução original que parece bastante óbvia, porém não era tão claro que funcionasse em princípio. O que se fez, como mostrado nas Seções 4.4.1 e 5.3.1 foi limitar o espectro do sinal caótico antes da transmissão. Como foram colocados filtros digitais dentro de malhas, o sistema alterado poderia nem mesmo convergir. Porém as simulações colocadas nessas seções

mostram que a idéia funciona muito bem.

Já para o segundo problema o que se encontrou na literatura foram técnicas de redução dos efeitos do ruído na sincronização dos sistemas caóticos. Esses efeitos mostraram-se bastante importantes e a possibilidade de eliminá-los pode ser a diferença entre a viabilidade prática da utilização de sinais caóticos em sistemas de transmissão/recepção ou não. As soluções mostradas aqui ainda atenuam muito pouco o problema. Comparado a sistemas tradicionais, principalmente no caso digital, os sistemas caóticos tem ainda um desempenho que deixa a desejar.

Dois pontos foram deixados de lado nas análises desse trabalho. Primeiramente, as considerações que foram feitas sobre o desempenho dos sistemas foram quase sempre baseadas em simulações computacionais. Embora isso possa ser encarado como um ponto fraco do trabalho, analisando-se os artigos de engenharia publicados na área, percebe-se que isso é uma prática bastante comum, devido principalmente às dificuldades matemáticas que os sinais caóticos e suas características altamente não-lineares impõem a uma análise mais formal.

Em segundo lugar, os canais foram modelados de forma bastante simples. Por exemplo, não se pensou num caso mais geral onde além da limitação em frequência poderiam ocorrer vários tipos de distorção do sinal.

O autor pretende retomar estes dois enfoques, ou seja, tentar formalizar melhor os resultados obtidos e tentar aumentar o nível de realismo das situações estudadas num futuro trabalho de doutorado.

Tem-se a expectativa de que a riqueza de comportamento apresentada pelos sistemas não-lineares e suas várias propriedades certamente tenham um papel importante na Engenharia de Telecomunicações nos próximos anos assim como já ocorre em muitas áreas do conhecimento humano.

Referências Bibliográficas

- [1] LI, T. Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. **American Mathematics Monthly**, v. 82, p. 985-992, 1975.
- [2] POINCARÉ, H. Sur les équations de la dynamique et le problème de trois corps. **Acta Mathematica**, v. 13, p. 1-270.
- [3] SMALE, S. Differentiable dynamical systems. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 73, p. 747-817, 1967.
- [4] PALIS, J. On Morse-Smale dynamical systems. **Topology**, v.8, p. 385-405, 1969.
- [5] PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. **Topology**, v.1, p. 101-120, 1962.
- [6] LORENZ, E. Deterministic non-periodic flows, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141, 1963.
- [7] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459-460, 1976.
- [8] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. **Journal of statistical physics**, v. 19, p. 25-52, 1978.
- [9] MANDELROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**, San Francisco, Freeman, 1982.
- [10] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**, Reading, Addison-Wesley, 1994.
- [11] PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 8, p. 821-824, 1990.
- [12] CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Synchronizing chaotic circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 38, n. 4, p. 453-456, 1991.
- [13] PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Driving systems with chaotic signals, **Physical Review A**, v. 44, n. 4, p. 2374-2383, 1991.

- [14] CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A.V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications, **Physical Review Letters**, v. 71, n.1, p. 65-68, 1993.
- [15] CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A.V. Chaotic signals and systems for communications. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING (ICASSP-93), Minneapolis, 1993. **Proceedings**. New York, IEEE, 1993. v.3, p. 137-140.
- [16] CHUA, L. O. The genesis of Chua's circuit. **Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik**, v. 46, p. 250-257, 1992.
- [17] MATSUMOTO, T.; CHUA, L. O.; KOMURO, M. The double scroll. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 32, n. 8, p. 797-817, 1985.
- [18] HALLE, K. S.; WU, C. W.; ITOH, M; CHUA, L. O. Spread spectrum communication through modulation of chaos. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v.3, n. 2, p. 469-477, 1993.
- [19] CHUA, L. O.; KOCAREV, L.; ECKERT, K. Experimental chaos synchronization in Chua's circuit. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 2, n. 3, p. 705-708, 1992.
- [20] WU, C. W.; CHUA, L. O. A Simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communications systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 3, n. 6, p. 1619-1627, 1993.
- [21] SHARMA, N.; OTT, E. Synchronization-based noise reduction method for communication with chaotic systems. **Physical Review E**, v. 58, n. 6, p. 8005-8008, 1998.
- [22] USHIO, T. Chaotic synchronization and controlling chaos based on contraction mappings. **Physics Letters A**, v. 198, p. 14-22, 1995.
- [23] USHIO, T.; INNAMI, T.; KODAMA, S. Chaos shift keying based on in-phase and anti-phase chaotic synchronization. **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, v. E79-A, n. 10, 1996.
- [24] The MathWorks Inc., **The Student Version of MATLAB Version 4: User's Guide**, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1995.
- [25] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**, New York, Springer, 1997.
- [26] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**, New York, Springer, 1997.
- [27] PONTRYAGIN, L. S. **Ordinary Differential Equations**, Library of Congress, 1960.

- [28] ARNOLD, V. **Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires**, Moscou, Éditions Mir, 1980.
- [29] PALIS J.; MELO W. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**, São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1978.
- [30] HUREWICZ, W. **Lectures on Ordinary Differential Equations**, Cambridge, The M.I.T. Press, 1966.
- [31] LEHNIGK, S. H. **Stability Theorems for Linear Motions with an Introduction to Liapunov's Method**, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1966.
- [32] CESARI, L. **Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations**, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1971.
- [33] HE, R.; VAIDYA, P. G. Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems. **Physical Review A**, v. 46, n. 12, p. 7387-7392, 1992.
- [34] FERRARA, N.F.; PRADO, C. P. C. **Caos - Uma Introdução**, São Paulo, Edgard Blücher, 1994.
- [35] PALIS, J.; MELO, W. **Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction**, New York, Springer-Verlag, 1982.
- [36] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 50, p. 69-77, 1976.
- [37] ECKMANN, J. P.; RUELLE D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, p. 617-656, 1985.
- [38] RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters**, v. 57A, p. 397-398, 1976.
- [39] GAMEIRO, M. F.; RODRIGUES, H. M. Synchronization in communication systems. Robustness with respect to parameter variation. In: 49o. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE ANÁLISE, 1999. **Separatas**. p. 435-449, 1999.
- [40] KOCAREV, L.; HALLE K. S.; ECKERT K.; CHUA L. O.; PARLITZ U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 2, n. 3, p. 709-713, 1992.
- [41] ROSA, E.; HAYES S.; GREBOGI, C. Noise filtering in communication with Chaos, **Physical Review Letters**, v. 78, n. 1, p. 1247-1250, 1997.
- [42] SCHWEIZER, J. **Applications of Chaos to Communications**. Lausanne, 1999. 136p. Tese (Doutorado) - École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [43] MATHEWS, J. H.; FINK, K. D. **Numerical Methods Using MATLAB**, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1999.

- [44] CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V.; STROGATZ S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. **IEEE Transactions on Circuits and Systems - II**, v. 40, n. 10, p. 626-633, 1993.
- [45] PARLITZ, U; ERGENZINGER, S. Robust communication base chaotic spreading sequences. **Physics Letters A**, v. 188, p. 146-150, 1994.
- [46] OGORZALEK, M. J. Taming chaos - Part I: synchronization. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 40, n. 10, p. 693-699, 1993.
- [47] PARLITZ, U.; CHUA L. O.; KOCAREV, L. J.; HALLE, K. S.; SHANG A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 2, n. 3, p. 633-644, 1992.
- [48] LATHI, B. P. **Modern Digital And Analog Communication Systems**, San Francisco, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1989.

Apêndice A

Rotinas Computacionais em MATLAB

1 LYPDISC2D - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para uma órbita de um mapa bidimensional

```
%LYPDISC2D.m
%Cálculo do Expoente de Lyapunov para mapas bidimensionais
%Formato [h1, h2] = LYPDISC2D(f, df, x0, n)
%f = função contendo a definição do sistema bidimensional
%df = função contendo o jacobiano de f
%x0(2,1) = condições iniciais
%n = número de passos a serem utilizados na aproximação
%
%h1, h2 = aproximação para os expoentes de Lyapunov
%Autor: Marcio Eisencraft
x = x0;
r1 = [];
r2 = [];
w = eye(2); %Base ortonormal inicial
for i = 1:n,
    dx = feval(df,x);
    z = dx * w;

    %ortogonalização de Gram-Schmidt
    y1 =z(:,1);
    y2 = z(:,2)-((z(:,2)'*y1)/(norm(y1)^2))*y1;
    y = [y1 y2];

    %Normalização
    r1=[r1 norm(y1)];
    r2=[r2 norm(y2)];
    w = [y1/norm(y1) y2/norm(y2)];

    %Iteração do mapa
    x=feval(f,x);

end

%Cálculo dos expoentes de Lyapunov
h1 = sum(log(r1))/n
h2 = sum(log(r2))/n
```

2 TEMPT - Integração simultânea de uma equação diferencial de dimensão 3 e sua equação variacional

```
%TEMPT.m
%Integra uma equação diferencial simultaneamente com sua equação
%variacional até T = 1. Caso tridimensional.
%Formato [x, J] = tempt(eqdif,A,x0)
%eqdif = função contendo a definição da equação diferencial
%A = matriz das derivadas parciais de eqdif
%x0(3,1) = condição inicial
%
%x(3,1) = vetor com as variáveis de estado em T = 1
%J = matriz jacobiana do sistema para T = 1
%
%Autor: Marcio Eisencraft
function [x, J] = tempt(eqdif,A,x0)
npassos = 500; % número de passos de integração a serem utilizados
deltat=1/npassos;
%Condições Iniciais
x = x0;
J = eye(3);
%Integração;
for i = 1:npassos,

    %Integração da equação diferencial (Runge-Kutta 4a. ordem)
    k1 = feval(eqdif,x)*deltat;
    k2 = feval(eqdif,x+.5*k1)*deltat;
    k3 = feval(eqdif,x+.5*k2)*deltat;
    k4 = feval(eqdif,x+k3)*deltat;
    x = x+ (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

    %Integração da equação variacional (Runge-Kutta 4a. ordem)
    A = feval(deqdif, x);
    k1 = A*J*deltat;
    k2 = A*(J+0.5*k1)*deltat;
    k3 = A*(J+0.5*k2)*deltat;
    k4 = A*(J+k3)*deltat;
    J = J+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

3 LYAPCONT - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para uma órbita de um sistema de tempo contínuo tridimensional

```
%LYAPCONT.m
% Cálculo dos Expoentes de Lyapunov para sistema de tempo contínuo.
%Caso tridimensional
%[h] = lyapcont(eqdif, A, x0, n)
%eqdif = função contendo a definição da equação diferencial
%A = matriz das derivadas parciais de eqdif
%x0(3,1) = condição inicial
%n = número de passos utilizados na aproximação
%
%h(3,1) = aproximação para os expoentes de Lyapunov da órbita
%Autor: Marcio Eisenkraft
function [h] = lyapcont(eqdif, A, x0, n)
%Condições iniciais
x = x0;
r1 = [];
r2 = [];
r3 = [];
w = eye(3);
dx = eye(3);
for i = 1:n,
    z = dx * w;
    %ortogonalização de Gram-Schmidt
    y1 = z(:,1);
    y2 = z(:,2)-((z(:,2)')*y1)/(norm(y1)^2))*y1;
    y3 = z(:,3)-((z(:,3)')*y1)/(norm(y1)^2))*y1-
        z(:,3)')*y2)/(norm(y2)^2))*y2;
    y = [y1 y2 y3];

    %Normalização
    r1=[r1 norm(y1)];
    r2=[r2 norm(y2)];
    r3=[r3 norm(y3)];
    y = [y1/norm(y1) y2/norm(y2) y3/norm(y3)];
    w=y;

    %Iteração do mapa de tempo-1
    [x, dx] = tempt(eqdif,A,x);
end

%Cálculo dos expoentes de Lyapunov
```

```

h1 = sum(log(r1))/n;
h2 = sum(log(r2))/n;
h3 = sum(log(r3))/n;
h = [h1 h2 h3]';

```

4 TEMPLORX - Determinação do mapa de tempo-T com $T = 1$ para o sistema escravo com as equações de Lorenz com entrada $x(t)$

```

%TEMPLORX.m
%Gera valor do mapa de retorno em T = 1 e o jacobiano a partir das
% equações de Lorenz
%no escravo quando o sinal transmitido é x(t)
%Formato [v, v1, J]=templorx(v0,v10,paramm, parame)
%v0 = condição inicial
%v10 = condição inicial no receptor
%paramt(3,1) = parâmetros das equações do mestre [sigma b r]
%paramr(3,1) = parâmetros das equações do escravo [sigma b r]
%
%v(3,1) = estado do mestre para T = 1
%v1(2,1) = estado do escravo para T = 1
%J(2,2) = matriz jacobiana do sistema escravo em T = 1
%Autor: Marcio Eisencraft
function [v, v1, J]=templorx(v0,v10,paramt, paramr)
npassos = 500;
deltat=1/npassos;
v = v0;
v1 = v10;
J = eye(2);
for i = 1:npassos,

    %Sistema mestre
    sinal = v(1); %Sinal x(t) a ser transmitido para o escravo
    %Runge-Kutta de 4a. ordem
    k1 = lorenz(paramt,v)*deltat;
    k2 = lorenz(paramt,v+.5*k1)*deltat;
    k3 = lorenz(paramt,v+.5*k2)*deltat;
    k4 = lorenz(paramt,v+k3)*deltat;
    v = v+ (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

    %Sistema escravo
    v1 = [sinal v1];
    k1 = lorenz(paramr,v1)*deltat;
    k2 = lorenz(paramr,v1+.5*k1)*deltat;

```

```

k3 = lorenz(paramr,v1+.5*k2)*deltat;
k4 = lorenz(paramr,v1+k3)*deltat;
v1 = v1+ (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
v1 = v1(2:3);
%Cálculo da matriz jacobiana em T = 1 para o sistema escravo
A = [-1 -sinal;sinal -paramr(2)];
k1 = A*J*deltat;
k2 = A*(J+0.5*k1)*deltat;
k3 = A*(J+0.5*k2)*deltat;
k4 = A*(J+k3)*deltat;
J = J+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end

```

5 LORENZLYAPX - Cálculo dos expoentes de Lyapunov condicionados do sistema escravo com as equações de Lorenz com entrada $x(t)$

```

%LORENZLYAPX.m
% Cálculo do Expoente de Lyapunov condicionados para as equações de

% Lorenz no escravo quando x(t) é transmitido
%Formato [h] = lorenzlyapx(v0, v10,paramt, paramr,n)
%v0 = condição inicial no mestre
%v10 = condição inicial no escravo
%paramt(3,1) = parâmetros das equações do mestre [sigma b r]
%paramr(3,1) = parâmetros das equações do escravo [sigma b r]
%n = número de passos utilizados na aproximação
%
%h(2,1) = expoentes de Lyapunov condicionados encontrados
%Autor: Marcio Eisenkraft
function [h] = lorenzlyapx(v0, v10, paramt, paramr, n)
v = v0;
v1 = v10;
r1 = [];
r2 = [];
w = eye(2);
dv = eye(2);
for i = 1:n,
    z = dv * w;
    %ortogonalização
    y1 = z(:,1);
    y2 = z(:,2)-((z(:,2)')*y1)/(norm(y1)^2))*y1;
    y = [y1 y2];
    r1=[r1 norm(y1)];

```

```

    r2=[r2 norm(y2)];
    y = [y1/norm(y1) y2/norm(y2)];
    w=y;
    [v, v1, dv] = templorx(v,v1,paramt, paramr); %atualização
end
h1 = sum(log(r1))/n;
h2 = sum(log(r2))/n;
h = [h1 h2];

```

6 SINCHENON - Sistema mestre-escravo utilizando o sistema de Hénon com a possibilidade de redução de ruído

```

%SINCHENON.M
%Sincronização utilizando o mapa de Hénon e redução de ruído
%Formato:
%[xmestre, xescravo,sinal,sescravo,ruído,rbarras] =
% sinchenon(x0mestre, x0escravo, n, snr, minimiza, npassos)
%
%x0mestre(2,1) = Condição inicial no sistema mestre
%x0escravo(2,1) = Condição inicial no sistema escravo
%n = Número de pontos transmitidos
%snr = Relação sinal-ruído no canal de transmissão
%minimiza = Se =1, aplica redução do ruído
%npassos = Número de passos utilizados na minimização
%xmestre(2,n) = Vetor de estados do sistema mestre
%xescravo(2,n) = Vetor de estados do sistema escravo
%sinal(n) = Sinal transmitido (saída do transmissor)
%sescravo(2,n) = Sinal de controle gerado no escravo
%ruído(n) = Ruído branco gaussiano somado ao sinal transmitido
%rbarras(n) = Estimação do ruído
function [xmestre, xescravo,sinal, sescravo, ruído, rbarras] =
sinchenon(x0mestre, x0escravo, n, snr, minimiza,npassos)
xm = x0mestre;
xe = x0escravo;
a = 1.4;
b = 0.2;
k = 5;
lambda = 5;
save lambda lambda;
xmestre = xm; xescravo = xe; sinal = []; sescravo = [];
potsinal = 1.7; %Estimativa da potência média de s(n)
sigma = sqrt(potsinal * 10^(-snr/10));
%MESTRE

```

```

for i = 1:n,
    %Sistema mestre
    s = -xm(1).^2+0.5*xm(2);
    xm = henonmapa(xmestre(i,:),a, b);
    xmestre = [xmestre;xm];
    sinal = [sinal s];
end

%Transmissão
ruído = normrnd(0,sigma,1,n); %Ruído branco gaussiano com variância
sigma
if snr < 1000,
    sinalr = sinal+ruído;
else
    sinalr = sinal;
end

if minimiza == 1, %Processo de redução do ruído
    for p = 1:npassos,
        for j = k+1:k:n-2*k+1,
            display(p);
            display(j-k);
            sinalrj = sinalr(j-k:j+2*k-1);
            save sinalrj sinalrj;
        %MINIMIZAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL
            condinicial = fminsearch('minhenci',zeros(1,2));
            save condinicial condinicial;

            %MINIMIZAÇÃO DO rbarra
            rbarraj = fminsearch('minhenrbar', zeros(1,3*k));
            rbarra(j-k:j-1) = rbarraj(k+1:2*k);
        end
        sinalr(k+1:n-k) = sinalr(k+1:n-k) - rbarra;
        rbarras(p, : ) = [zeros(1,k) rbarra zeros(1,k)];
        lambda = lambda/2;
        save lambda lambda;
    end
    sinalrcor = [sinalr(1:k) sinalr(k+1:n-k)-rbarra sinalr(n-k+1:n)];
%Sinal Corrigido
else
    sinalrcor = sinalr;
end

%ESCRAVO
for i = 1:n,

```

```

        %Sistema escravo
        sescravo = [sescravo -xe(1).^2+0.5*xe(2)];
        xe = [a+0.5*xe(2)+sinalrcor(i) b*xe(1)];
        xescravo = [xescravo;xe];
    end

erro = mean(abs(sescravo-sinal))
rel = 20*log10(mean(abs(sescravo))/erro)

```

7 MINHENCI - Definição da função a ser utilizada na estimação das condições iniciais pelo programa SINCHENON

```

%MINHENCI.m
%Minimização das condições iniciais para o sistema de Hénon
%
%Formato: [erro] = minhenci(x0escravo);
%x0escravo = condição inicial atual
%erro = erro atual (a ser minimizado)
function [erro] = minhenci(x0escravo)
a = 1.4;
b = 0.2;
k = 5;
%ESCRAVO
xe = x0escravo;
load sinalrj;
sescravo = [];
for i = 1:3*k,
    %Sistema escravo
    sescravo = [sescravo -xe(1).^2+0.5*xe(2)];
    xe = [a+0.5*xe(2)+sinalrj(i) b*xe(1)];
end
erro = mean(abs(sinalrj-sescravo)); %Erro atual

```

8 MINHENRBAR - Definição da função a ser utilizada na estimativa do ruído pelo programa SINCHENON

```

%MINHERBAR.m
%Minimização do ruído para o sistema de Hénon
%
%Formato: [erro] = minhenrbar(x0escravo);

```

```

%rbarraj = vetor rbarraj atual
%erro = erro atual (a ser minimizado)
function [erro] = minhenrbar(nbarraj)
load condinicial;
load sinalrj;
sinalrcorj = sinalrj-nbarraj;
xe = condinicial;
a = 1.4;
b = 0.2;
alfa = 0.25;
lambda = 5;
k = 5;
sescravo = [-xe(1).^2+0.5*xe(2)];
for i = 1:3*k-1,
    %Sistema escravo
    xe = [a+0.5*xe(2)+sinalrcorj(i) b*xe(1)];
    sescravo = [sescravo -xe(1).^2+0.5*xe(2)];
end
%Função a ser minimizada
i = 1:5;
t= sum(exp(alfa*(i-6)).*(sescravo(i)-sinalrcorj(i)).^2);
i = 6:10;
t= t+sum((sescravo(i)-sinalrcorj(i)).^2+lambda*nbarraj(i).^2);
i = 11:15;
t= t+sum(exp(0.25*(6-i)).*(sescravo(i)-sinalrcorj(i)).^2);
erro = t;

```

Apêndice B

Artigo Publicado no XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações,
Gramado, 03 a 06 de Setembro de 2000

COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINAIS CAÓTICOS: INFLUÊNCIA DE RUÍDO E DE LIMITAÇÃO EM BANDA

Marcio Eisencraft * e Max Gerken †

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
<http://www.lcs.poli.usp.br>
{marcio, mgk}@lcs.poli.usp.br

RESUMO

O trabalho apresenta os fundamentos de dois tipos de sistemas de comunicação que utilizam o sincronismo de osciladores caóticos e faz uma análise das suas limitações quanto a erros de sincronismo. Particular atenção é dada a um dos sistemas, baseado no método de sincronismo de Wu e Chua, o qual se mostra bastante simples e serve de base para propostas mais elaboradas como o “Chaotic Phase Shift Keying”. O sistema de Wu e Chua é analisado quanto a influência de características do canal, como ruído e limitação em banda. Mostra-se que em ambos os casos, na forma como foi proposto, ele apresenta relação sinal-ruído na saída do receptor pouco satisfatória. Neste trabalho estas deficiências são analisadas e quantificadas sendo apresentado um método para a geração de sinais caóticos com banda limitada, eliminando-se assim o problema da limitação em banda do canal para o sincronismo entre transmissor e receptor.

1. INTRODUÇÃO

Sinais caóticos são caracterizados por três propriedades: determinismo, aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais. Esta última significa que o estado de dois sistemas caóticos idênticos, iniciados com condições cuja diferença seja arbitrariamente pequena, depois de um tempo finito estarão distantes no espaço de fase. Estes sinais podem ser interessantes para algumas áreas da Engenharia de Telecomunicações por apresentarem características como espectro de Fourier plano, dificuldade de predição e ser confundível com ruído.

Devido à sensibilidade às condições iniciais, pode parecer que o sincronismo de dois sistemas caóticos seja impossível. Porém, Pecora e Carroll [1], [2], [3] mostraram que este sincronismo é possível desde que o subsistema escravo seja assintoticamente estável. Este resultado deu um grande impulso para a geração de mais trabalhos sobre a aplicabilidade desses sistemas em comunicações.

No entanto, o critério de sincronismo de Pecora e Carroll envolve o cálculo de expoentes de Lyapunov condicionados para determinar a estabilidade do subsistema escravo, o que pode ser bastante complicado para um sistema em geral. Wu e Chua [4] propuseram um método de projeto de sistemas sincronizantes mais

simples e mais facilmente aplicável do ponto de vista da engenharia. Baseado neste método, no mesmo trabalho, foi proposto um sistema de comunicação utilizando sinais caóticos que é isento de erros desde que o canal seja ideal, ou seja, sem ruído e sem limitação de banda. Este sistema serviu de base para outras propostas de sistemas mais complexas, como o “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) de Ushio [5], [6].

Um objetivo deste artigo é analisar o desempenho deste sistema em condições não-ideais de canal. Mais especificamente, estudar como se comporta a relação sinal-ruído na saída do receptor quando o canal de transmissão é afetado por ruído branco gaussiano ou quando ele é modelado por um filtro passa-banda de fase linear.

Como será visto na Seção III os resultados mostram que o sistema não apresenta um desempenho satisfatório quando da adição de ruído na entrada do receptor, sendo necessário um processamento adicional do sinal tanto na transmissão quanto na recepção. Também quando o canal de transmissão tem banda limitada ocorrem problemas de sincronismo que afetam seriamente o desempenho do sistema. Para solucionar esse problema é proposta uma modificação que apresenta excelentes resultados.

2. SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINCRONISMO DE SINAIS CAÓTICOS

2.1. O método de sincronismo de Wu e Chua

Wu e Chua em seu artigo [4] dão um enfoque diferente ao sincronismo de sistemas caóticos em relação ao que foi proposto no trabalho pioneiro de Pecora e Carroll [1]. Ao invés de utilizar expoentes de Lyapunov para verificar a estabilidade assintótica do escravo e, conseqüentemente, a possibilidade de sincronismo, Wu e Chua propõem que as equações do mestre e do escravo sejam escritas de tal forma que a dinâmica do erro de sincronismo se torne simples e que se possa verificar facilmente sua convergência para zero.

O método de sincronismo de Chua assume que o sistema mestre possa ser escrito na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r), \quad (1)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz com todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo, ou seja, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é globalmente assintoticamente

* Financiada pela FAPESP (proc. 98/13362-6).

† Financiada pelo CNPq (proc. 300521/92-8).

estável e $\mathbf{x}_r = (x_1, x_2, \dots, x_r)^t \in R^r$ é um subvetor do vetor de estados $\mathbf{x} \in R^p, p \geq r$.

Desta forma, define-se o sistema mestre-escravo como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) \quad (2b)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados do sistema mestre e \mathbf{x}' é o vetor de estados do sistema escravo. A dinâmica do erro de sincronismo para este caso é descrita por:

$$\frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (3)$$

Como \mathbf{A} tem todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Assim, o sistema sincroniza de forma global. A taxa de convergência pode ser diretamente encontrada através dos autovalores de \mathbf{A} . É interessante notar que apesar do sistema escravo não ser autônomo, a equação que descreve o comportamento do erro (3) o é.

Em [4], são citados vários exemplos de sistemas que podem ser colocados na forma (1) com \mathbf{x}_r possuindo poucos componentes.

2.2. Sistema de Cuomo e Oppenheim

Uma vez demonstrada a possibilidade de sincronismo de sinais caóticos, vários autores sugeriram sistemas de telecomunicações que utilizam sinais caóticos para mascarar ou codificar a informação a ser transmitida. Talvez a idéia mais simples tenha sido a de Cuomo e Oppenheim [7] ilustrada na Figura 1.

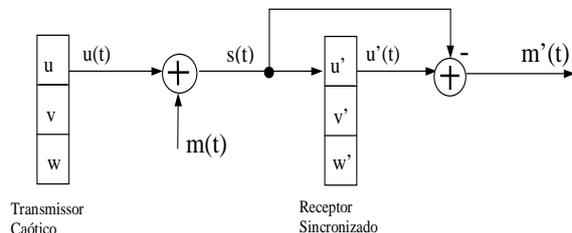


Figura 1. Diagrama de blocos do sistema proposto por Cuomo e Oppenheim [7].

O transmissor é composto por um oscilador caótico que, caso $m(t)$ seja identicamente nulo, sincroniza perfeitamente com o receptor. Assim, neste caso, $\lim_{t \rightarrow \infty} |u'(t) - u(t)| = 0$. A idéia então é somar a $u(t)$ o sinal $m(t)$ bastante atenuado de forma que $s(t) = u(t) + m(t) \approx u(t)$. Dessa forma, $u'(t) \approx u(t)$ e na saída do receptor temos $m'(t) = s(t) - u'(t) = m(t) + u(t) - u'(t) \approx m(t)$ e a mensagem é recuperada. É importante notar que nesse sistema o sincronismo não é perfeito e existe um erro na recuperação da informação mesmo quando todos os fatores são ideais (não há ruído no canal, os parâmetros são idênticos no transmissor e no receptor, etc). Tudo se passa como se a própria mensagem fosse um ruído para o sistema.

2.3. Sistema de Wu e Chua

Wu e Chua propuseram um sistema de transmissão de informações utilizando sinais caóticos que não possui um erro intrínseco como o apresentado no item anterior. Seu diagrama de blocos está mostrado na Figura 2.

O sinal de informação $\mathbf{m}(t)$ é codificado com o sinal caótico $\mathbf{x}_r(t)$ usando uma função de codificação $\mathbf{s}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{m}(t))$

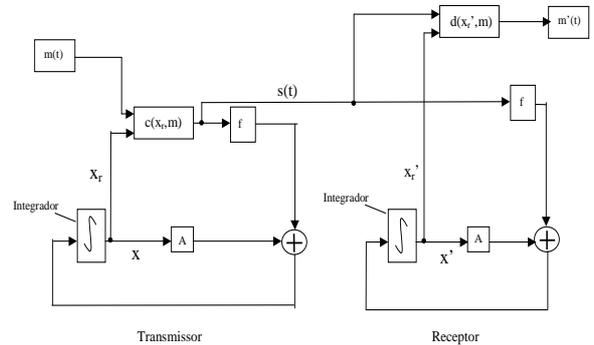


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema proposto por Wu e Chua [4].

de tal modo que o sinal de informação possa ser decodificado de forma única como $\mathbf{m}(t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{s}(t)) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{c}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{m}(t)))$. Assume-se aqui que \mathbf{d} seja contínua na variável \mathbf{x}_r . A princípio a escolha de $\mathbf{c}(\cdot, \cdot)$ e $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$ precisa satisfazer $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$ para todos os sinais de informação apropriados por dois motivos. Primeiramente, $\mathbf{s}(t)$ é realimentado no lugar de $\mathbf{x}_r(t)$ no sistema transmissor. Por outro lado, deseja-se que este sistema continue gerando sinais caóticos. Esta condição só será assegurada se $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$. Além disso, como deseja-se que o sistema de comunicação seja seguro, é necessário que $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$ de forma que a ocorrência de $\mathbf{m}(t)$ não seja aparente a partir do sinal $\mathbf{s}(t)$. As equações que governam o sistema global são da forma (2), apenas substituindo-se $\mathbf{x}_r(t)$ por $\mathbf{s}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{f}(\mathbf{s}).$$

Novamente, $\frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ e assim $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t)$. Da continuidade de $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$ resulta $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{m}'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{s}(t)) = \mathbf{m}(t)$. Desta forma a mensagem é recuperada no receptor sem degradação (a menos de um transitório necessário para que os sistemas entrem em sincronismo) quando os parâmetros do transmissor e do receptor estão perfeitamente casados e o canal é ideal. Esta recepção isenta de erro é o que torna este sistema superior ao de Cuomo e Oppenheim descrito anteriormente.

Além disso, cabe observar que esse sistema de transmissão pode ser utilizado também com equações que não podem ser colocados na forma (1), como as equações de Lorenz [8].

Em nossos testes, foi utilizado o sistema de Lorenz ($r = 1, p = 3$) e $s(t) = c(x_r(t), m(t)) = x_r(t) + a \cdot m(t)$, sendo a um fator de atenuação. O sinal $s(t)$ é então transmitido para o sistema receptor. Note-se que o sinal $m(t)$ fica mascarado pelo sinal $x_r(t)$, que pode ser denominado sinal *máscara*.

3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE RUÍDO ADITIVO E DA LIMITAÇÃO DE BANDA NO SISTEMA DE WU E CHUA

No sistema da Figura 2 a mensagem $m(t)$ é exatamente recuperada no caso do canal por onde $s(t)$ é transmitido ser ideal. O objetivo dessa seção é analisar a degradação no sincronismo que ocorre quando ruído branco gaussiano é adicionado a $s(t)$ ou quando o canal é modelado por um filtro passa-bandas $H_c(z)$, ou seja $s(t)$ sofre uma limitação em frequência.

O diagrama de blocos da Figura 3 ilustra o sistema utilizado nas simulações computacionais. Foi utilizado o sistema de Lorenz com os mesmos parâmetros de [7]. Esse sistema é tridimensional sendo suas variáveis representadas por $\mathbf{x} = (u, v, w)^t$. O sinal $u(t)$ foi utilizado na transmissão (\mathbf{x}_r) somado a $m(t)$. Para a computação numérica, os sinais foram amostrados a $f_a = 8kHz$ e utilizou-se um passo de integração de 0,06. Foi utilizado $m(t) = \text{sen}(2\pi 500t)$ com $0 \leq t \leq 1,25s$. As condições iniciais no transmissor e no receptor são escolhidas aleatoriamente a cada simulação. O filtro $H_c(z)$ é FIR com fase linear de ordem $N = 200$ com frequências de corte inferior e superior variáveis. Estas frequências, normalizadas com relação à frequência de Nyquist ($f_a/2$), são respectivamente denominadas f_{ci} e f_{cs} . Para diminuir o erro devido aos transitórios da sincronização e para compensar o atraso do filtro $H_c(z)$ foram adicionadas 250 amostras nulas no início e 100 no final do vetor resultante da amostragem de $m(t)$. Assim, o sinal discreto $m(k)$ resultante da amostragem de $m(t)$ será composto por 10350 pontos.

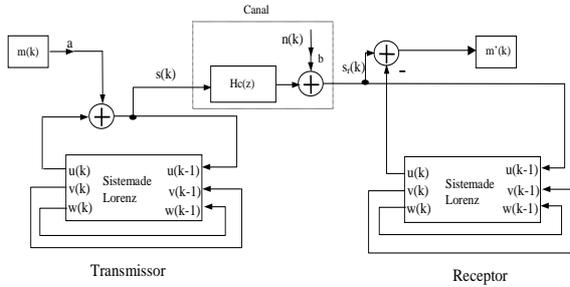


Figura 3. Diagrama de blocos do sistema de Wu e Chua discretizado utilizado nas simulações computacionais.

Como já foi mencionado o sinal x_r faz o papel de uma máscara que esconde a mensagem m . No caso utilizou-se uma relação sinal-máscara a de $-30dB$, suficiente para esconder o sinal senoidal em meio ao espectro do sinal caótico. O ruído branco gaussiano foi adicionado a $s(k)$ atenuado por uma constante b que nada mais é do que a relação ruído-máscara expressa em dB's. Assim, a relação sinal-ruído no canal pode ser calculada por $a - b$, com a e b medidos em dB.

A Figura 4 mostra alguns sinais obtidos com esse sistema quando o canal é ideal, ou seja, $b = -\infty dB$, $f_{ci} = 0$ e $f_{cs} = 1$.

3.1. Influência do ruído aditivo

Nesta seção será considerada a influência da adição do ruído branco gaussiano $n(k)$ no desempenho do sistema da Figura 3. Não será considerada a influência do filtro $H_c(z)$ a ser tratada no item seguinte.

O sinal $s(k)$ pode ser entendido como um parâmetro variante no tempo dos sistemas mestre e escravo. Ou seja, a introdução do ruído branco no canal pode ser visto como um problema de descasamento dos parâmetros entre transmissor e receptor. Alguns trabalhos [1],[9] mostram que no caso típico de um sistema como o da Figura 2 o erro de sincronismo $\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r\|$ é da ordem de grandeza do descasamento dos parâmetros entre mestre e escravo. Assim, é de se esperar que isto ocorra também nesse caso. O gráfico da Figura 5 confirma essa expectativa.

Por exemplo, quando a relação ruído-máscara b no canal é $-40dB$, espera-se também encontrar um erro de sincronismo de

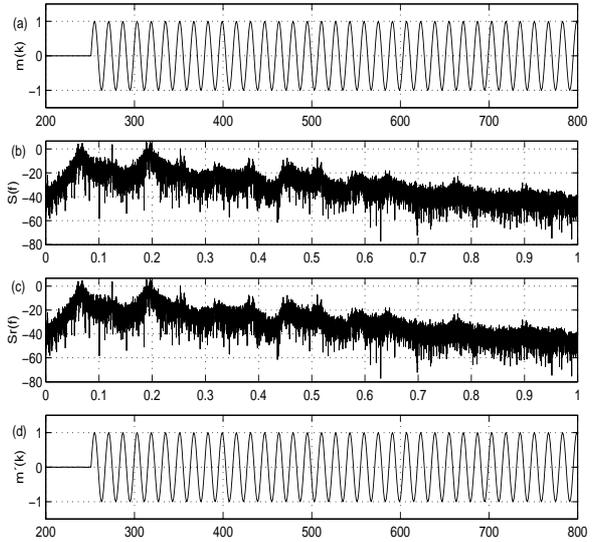


Figura 4. Sinais do sistema da Figura 3, no caso do canal ser ideal. O sinal de informação $m(k)$ é recuperado exatamente no receptor. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

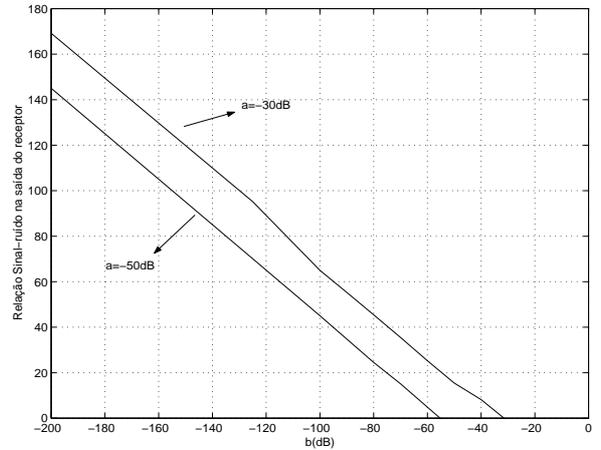


Figura 5. Relação sinal-ruído na saída do transmissor em função da relação ruído-máscara no canal b .

cerca de $-40dB$. Ora, como a relação sinal-máscara a foi fixada em $-30dB$, o valor esperado para a relação sinal-ruído no sinal recuperado é de $10dB$. Observando-se a curva relativa a $a = -30dB$ na Figura 5, vemos que para $b = -40dB$ encontramos uma relação sinal-ruído de $8dB$ na saída do receptor. Confirma-se assim, com boa aproximação, a previsão feita. Os sinais relativos a essa situação são mostrados na Figura 6.

Os resultados apresentados mostram que o sistema não se comporta muito bem frente ao ruído. Isto porque a relação sinal-ruído na saída do receptor é igual ou pior do que aquela no canal. Como o sinal de informação $m(k)$ precisa ser atenuado para ser transmitido, concluímos que mesmo ruídos de baixas potências somados no canal causarão baixa relação sinal-ruído no receptor.

A solução desse problema no caso analógico não parece ser evi-

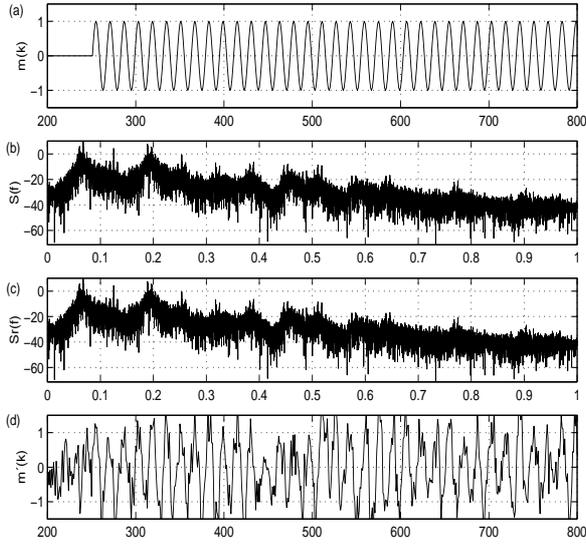


Figura 6. Sinais do sistema da Figura 3 para $b = -40\text{dB}$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

dente já que o erro de sincronismo com o desajuste dos parâmetros é uma característica intrínseca dos sinais caóticos. Possivelmente uma solução seja a incorporação ao sistema de um procedimento de modulação em fase ou frequência. No caso de transmissão digital resultados mais animadores foram publicados em diversos artigos como [6].

3.2. Análise da limitação de banda no canal

A Figura 7 mostra o resultado obtido para a relação sinal-ruído¹ final obtida no receptor (obtenção de $m'(k)$ na Figura 3) em função da banda rejeitada pelo canal $(1 - f_{cs})$ quando $f_{ci} = 0$. Vê-se que a limitação da banda do canal realmente prejudica o sincronismo tornando problemática a recuperação do sinal de informação $m(k)$ mesmo quando o espectro deste está todo contido na faixa de passagem do canal. Como ilustração, a Figura 8 mostra os sinais do sistema quando $f_{cs} = 0,70$.

A situação é ainda mais drástica quando o corte do canal é realizado nas baixas frequências. Neste caso, mesmo sendo f_{ci} da ordem de 2% da frequência de amostragem, o erro quadrático médio resulta maior do que a ordem de grandeza de $m(k)$. A Figura 9 ilustra esta situação.

3.3. Sistema utilizando sinais caóticos limitados em banda

Para tentar diminuir os problemas resultantes da limitação de banda, foi inserido na malha do transmissor um filtro passa-faixas de fase linear com o objetivo de limitar o espectro do sinal antes da transmissão. Para que continue ocorrendo o sincronismo, um filtro idêntico foi colocado no receptor. O diagrama de blocos da Figura 10 mostra o sistema proposto. Estes filtros têm frequência

¹Aqui deve-se observar que o erro provocado pela limitação de banda tem características mais próximas de ruído do que de distorção. Daí utilizar-se também neste caso de uma relação sinal-ruído para descrever o efeito do erro causado.

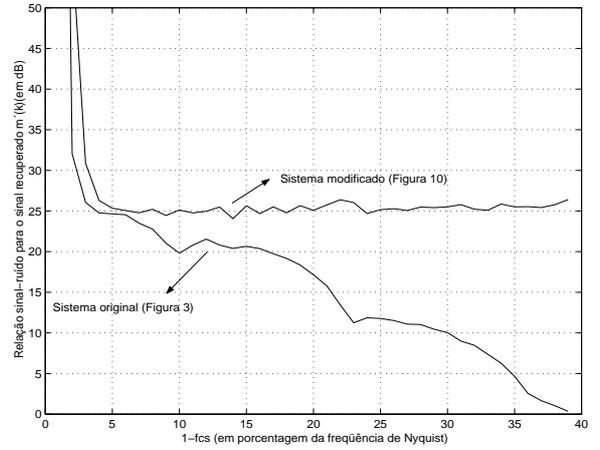


Figura 7. Relação sinal-ruído na obtenção de $m'(k)$ em função da porcentagem de banda rejeitada pelo canal, $(1 - f_{cs}) \times 100$, para os sistemas das Figuras 3 e 10 quando $f_{ci} = 0$. No sistema da Figura 10 foi utilizado $H_s(z)$ com $f_{ss} = 0,9f_{cs}$ para cada valor de f_{cs} .

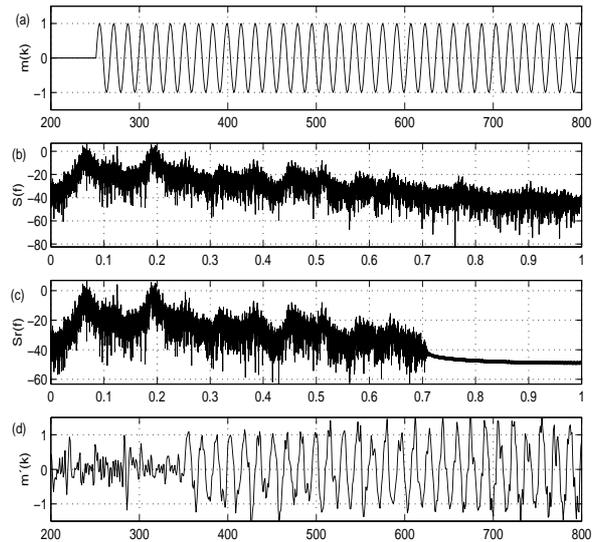


Figura 8. Sinais do sistema da Figura 3 para $f_{ci} = 0$ e $f_{cs} = 0,7$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado. Note o atraso de 100 amostras causado pelo canal.

de corte inferior e superior variáveis. Estas frequências de corte, normalizadas com relação à frequência de Nyquist, são indicadas respectivamente por f_{si} e f_{ss} .

Neste caso, observou-se uma diminuição bastante acentuada no erro entre os sinais $m'(k)$ e $m(k)$ com relação ao sistema da Figura 3 como atesta a Figura 7. Para a obtenção desses dados, tomou-se $f_{ss} = 0,9f_{cs}$ e o sistema da Figura 10. Para comparação, a Figura 11 mostra uma situação como a da Figura 8, exceto pela introdução de $H_s(z)$ no transmissor e no receptor.

Os dados obtidos mostram que o erro mantém-se praticamente constante com a variação das frequências de corte do canal desde que as frequências de corte dos filtros das malhas sejam convenientemente ajustadas. Grande parcela desse erro deve-se às

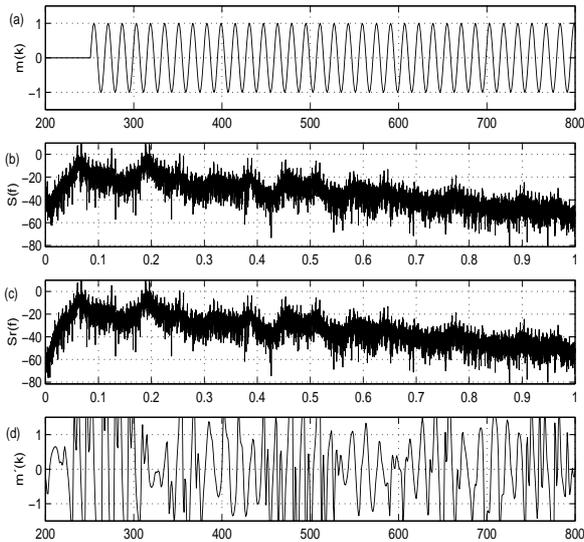


Figura 9. Sinais do sistema da Figura 3 para $f_{ci} = 0,02$ e $f_{cs} = 1$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

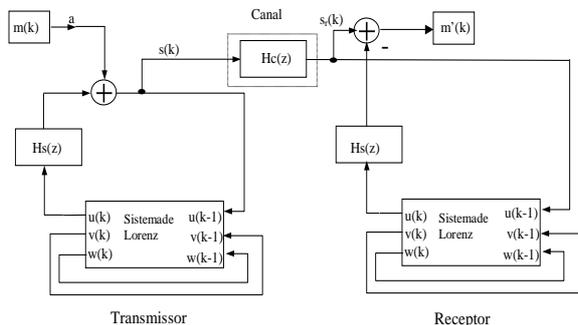


Figura 10. Diagrama de blocos do sistema proposto para diminuir os efeitos da limitação de banda do canal de comunicação no sincronismo dos sistemas.

ondulações da faixa de passagem do filtro $H_c(z)$ utilizado para simular o canal. Este erro não é alterado pela introdução dos filtros $H_s(z)$ e é equivalente à introdução de um ruído correlacionado ao sinal na linha de transmissão. Porém, os resultados atestam que os erros causados pela limitação de banda no canal foram bastante atenuados. Tudo indica que a inserção dos filtros não destrói a característica caótica dos osciladores (não-periodicidade, dependência sensível às condições iniciais) e nem sua estabilidade. A Figura 12 ilustra este fato mostrando sinais de saída do receptor nos sistemas sem e com inserção de $H_s(z)$ (Figuras 3 e 10), sendo o último caso com $f_{si} = 0,1$ e $f_{ss} = 0,8$. A Figura 13 mostra projeções dos atratores dos sistemas transmissores nos dois casos. Com a inserção dos filtros o atrator parece apresentar uma estrutura bem mais complexa. Finalmente a Figura 14 procura ilustrar que com a inserção do filtro no sistema (Figura 10) também é possível recuperar o sinal $m(k)$ mesmo quando o canal filtra baixas frequências.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo foi feita uma análise da influência da adição de ruído branco gaussiano e da limitação de banda no canal de transmissão no desempenho do sistema proposto por Wu e Chua em [4]. Os resultados apresentados permitem concluir que este esquema de comunicação, pelo menos na forma analógica, não é robusto com relação a ruído introduzido no canal. Mesmo ruídos de potência baixa geram baixas relações sinal-ruído na saída do transmissor. Este problema pode ser minorado transmitindo-se uma versão modulada do sinal original ou utilizando técnicas digitais do tipo CPSK [6].

Quanto à limitação em banda, os resultados mostram que este sistema, na forma como foi proposto também não é robusto com relação a esta limitação, especialmente quando o canal atua sobre as componentes em baixas frequências do sinal transmitido. Porém, este problema pode ser contornado com a modificação apresentada na Figura 10, ou seja, o acréscimo de um filtro passa-banda na malha do oscilador de modo eliminar as componentes que são rejeitadas pelo canal de transmissão.

Aqui considerou-se que na banda de transmissão o canal não distorce o sinal transmitido. Esta degradação normalmente é tratada por meio de equalizadores. Como incorporar este tipo de solução aos osciladores caóticos no transmissor e no receptor é tópico de pesquisa atual.

5. REFERÊNCIAS

- [1] L. M. Pecora e T. L. Carroll, "Synchronization in Chaotic Systems", *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pág. 821-824, 1990.
- [2] T. L. Carroll e L. M. Pecora, "Synchronizing Chaotic Circuits", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, pág. 453, 1991.
- [3] L. M. Pecora e T. L. Carroll, "Driving Systems with Chaotic Signals", *Physical Review*, vol. A44, pág. 2374, 1991.
- [4] C. W. Wu e L. O. Chua, "A Simple Way to Synchronize Chaotic Systems With Applications to Secure Communication Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, pág. 1619-1627, 1993.
- [5] T. Ushio, T. Innani e S. Kodama, "Digital Communication Systems Based on In-Phase and Anti-Phase Chaotic Synchronization", *IEICE Transactions on Fundamentals*, vol. E79-A, pág. 1689, 1996.
- [6] C. L. Koh e T. Ushio, "Digital Communication Method Based on M-Synchronized Chaotic Systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, vol. 44, pág. 383, 1997.
- [7] K. M. Cuomo e A. V. Oppenheim, "Chaotic Signal and Systems for Communications", *Proceedings of 1993 IEEE ICASSP III*, vol. 3, pág. 137, 1993.
- [8] E. Lorenz, "Deterministic non-periodic flows", *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pág. 130, 1963.
- [9] M. F. Gameiro e H. M. Rodrigues, "Synchronization in Communication Systems. Robustness with Respect to Parameter Variation", *Separatas do 49o. Simpósio Brasileiro de Análise*, pág. 435, 1999.

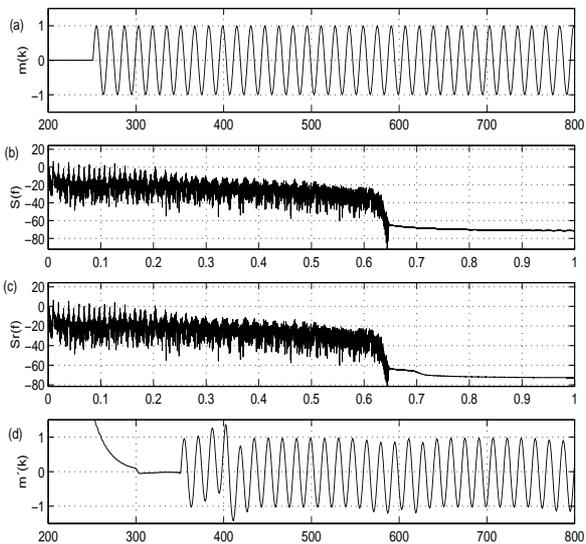


Figura 11. Sinais do sistema da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, $f_{cs} = 0,7$, $f_{si} = 0$ e $f_{ss} = 0,9$, $f_{cs} = 0,63$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

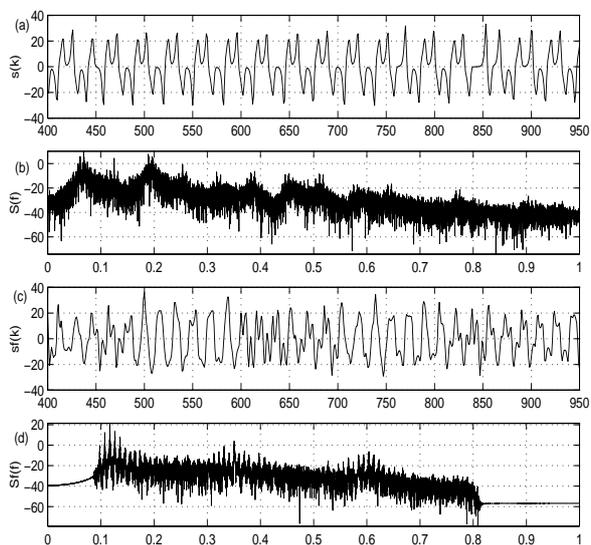


Figura 12. Comparação entre os sinais $s(k)$ e $s_F(k)$, respectivamente saídas do transmissor da Figura 3 e do transmissor da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, 1 e $f_{cs} = 0,8$. (a) Aspecto temporal de $s(k)$. (b) Densidade espectral de potência em dB de $s(k)$. (c) Aspecto temporal de $s_F(k)$. (d) Densidade espectral de potência em dB de $s_F(k)$. Note que $s_F(k)$ apesar de possuir banda limitada possui características caóticas.

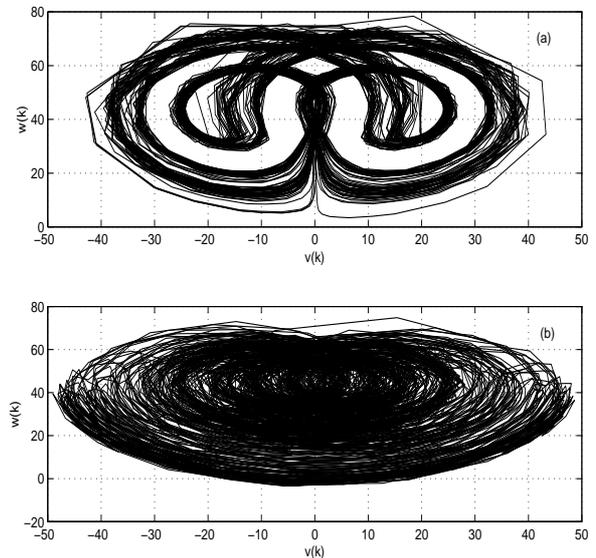


Figura 13. Atratores caóticos dos transmissores com e sem a inserção do filtro $H_s(z)$. (a) Projção do atrator do transmissor da Figura 3. (b) Projção do atrator do transmissor da Figura 10 para $f_{ci} = 0,1$ e $f_{cs} = 0,8$. A estrutura aqui parece ser bem mais complexa.

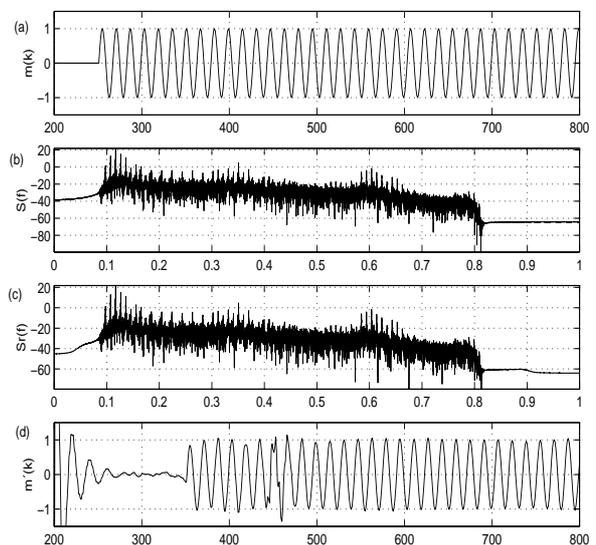


Figura 14. Sinais do sistema da Figura 10 para $f_{ci} = 0,05$, $f_{cs} = 0,9$, $f_{si} = 0,1$ e $f_{ss} = 0,8$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.