



ANÁLISE ESPECTRAL DE ÓRBITAS DO MAPA DE MANNEVILLE

Daniela Mitie Kato¹ e Marcio Eisencraft²

¹Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brasil, danikato@yahoo.com

²Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie e Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, marcioft@mackenzie.br

Resumo: Neste trabalho investiga-se características da Densidade Espectral de Potência (DEP) de sinais caóticos intermitentes gerados pelo mapa de Manneville. A análise é realizada por meio de simulações computacionais, interpretando-se os sinais gerados como funções-amostras de um processo estocástico. Relaciona-se a banda essencial ao expoente de Lyapunov e ao parâmetro do mapa e relaciona-se também este parâmetro ao tempo de retorno das intermitências.

Palavras-chave: caos, spectral analysis, intermitência

Abstract: In this work, we investigate characteristics of the Power Spectral Density (PSD) of chaotic signals generated by the Manneville map. The analysis is performed via computational simulations, interpreting the signals as sample-functions of a stochastic process. We relate the essential bandwidth to the Lyapunov exponent and to the map's parameter. We also relate this parameter to the return time of the intermittencies.

Keywords: chaos, spectral analysis, intermittency

1. INTRODUÇÃO

Sinais caóticos são sinais aperiódicos e que possuem Dependência Sensível às Condições Iniciais (DSCI) [1]. A DSCI significa que as trajetórias dos sinais com condições iniciais muito próximas divergem ao longo das iterações.

A escolha da família de mapas de Manneville deu-se pelo fato que ela gera sinais caóticos com intermitências. Estes tipos de sinais são utilizados para modelar fenômenos nas mais diversas áreas, como por exemplo no estudo da epilepsia [3], de circuitos eletrônicos [4], da física de plasmas [5] e em lasers [6, 7]. Busca-se relacionar as características espectrais destes sinais com as intermitências a fim de melhor modelar estes fenômenos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 são definidas a família de mapas de Manneville e suas principais características. Na Seção 3 são analisadas, numericamente, as características da Sequência de Autocorrelação (SAC) e da DEP dos sinais gerados, relacionando a banda essencial com o intervalo entre as intermitências e o parâmetro da família. Por fim, as conclusões deste trabalho são expostas na Seção 4.

Estudos semelhantes a este foram realizados para a família tenda inclinada, cujos resultados apresentados são relevantes, gerando três artigos [8–10].

2. O MAPA DE MANNEVILLE

O mapa de Manneville é definido por [11]

$$s(n+1) = f_M(s(n)), \quad (1)$$

em que

$$f_M(s(n)) = ((1 + \epsilon)s(n) + (1 - \epsilon)s^2(n)) \pmod{1}, \quad (2)$$

sendo $0 \leq \epsilon \leq 1$ um parâmetro fixo, s_0 definido no domínio $U = [0, 1)$ e a operação $c \pmod{1}$ representa a parte fracionária de c .

O parâmetro ϵ determina o tempo médio de ocorrência de rajadas caóticas no sinal. Quanto mais próximo de 0 for o valor do ϵ , maior é o intervalo médio de retorno das intermitências. Para valores de ϵ próximos da unidade, o tempo médio entre as rajadas tende a zero, obtendo-se um sinal caótico sem intermitências. Para $\epsilon = 1$, tem-se o mapa dente de serra, conhecido como mapa de Bernoulli [12, 13].

Na Figura 1 são mostrados gráficos de $f_M(s)$ para diferentes valores de ϵ e trechos de suas respectivas órbitas. Observa-se que o intervalo entre as rajadas diminui com o aumento de ϵ .

Nas simulações computacionais, para $\epsilon = 1$, devido a precisão finita do meio digital, as órbitas que seriam caóticas convergem para o ponto fixo $p = 0$. Neste caso, para gerar órbitas do mapa $f_M(\cdot)$ utiliza-se a técnica descrita em [13].

Como dito anteriormente, sinais caóticos são sinais aperiódicos e que possuem DSCI [1]. A DSCI é geralmente verificada por meio do expoente de Lyapunov. Este expoente mede a taxa de divergência exponencial média entre duas órbitas muito próximas. Se o valor do expoente é maior que zero, então um sinal aperiódico é caótico [1].

O expoente de Lyapunov h de uma órbita $s(n, s_0)$ é calculado por meio de [1]

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(s(n))| \right), \quad (3)$$

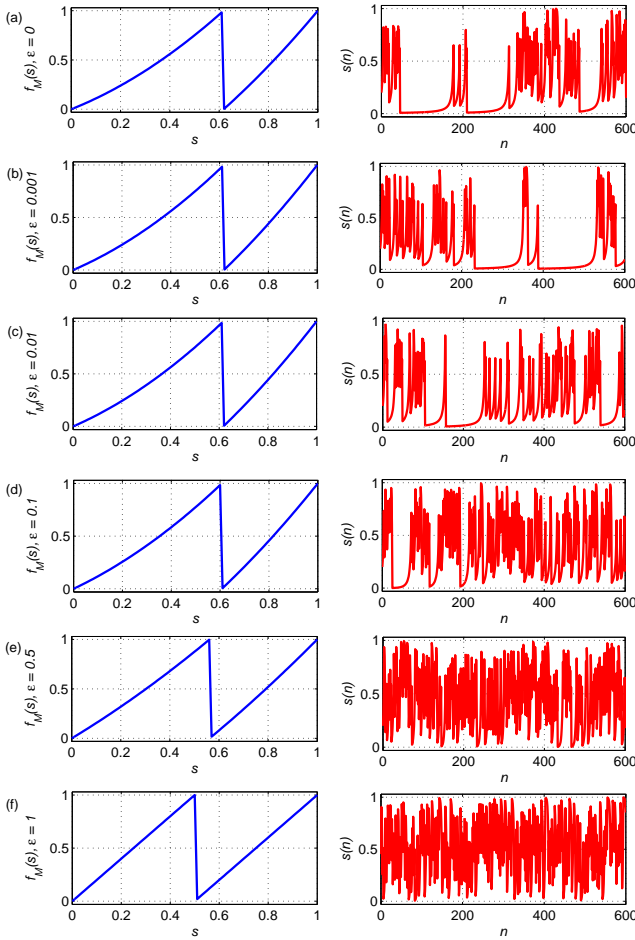


Figura 1 – Mapa e trecho de órbita do mapa de Manneville para (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 0.001$, (c) $\epsilon = 0.01$, (d) $\epsilon = 0.1$, (e) $\epsilon = 0.5$ e (f) $\epsilon = 1$.

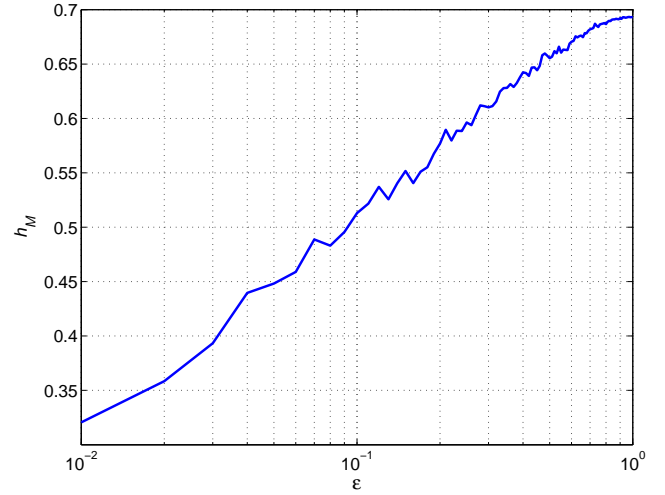


Figura 2 – Expoente de Lyapunov para a família de mapas de Manneville.

em que $f'(s)$ é a derivada de $f(s)$.

Na Figura 2 é mostrada uma curva do expoente de Lyapunov h_M , calculada numericamente utilizando a Eq. (3 com $N = 10000$, em função de ϵ para esta família de mapas. Observa-se que o expoente de Lyapunov é positivo para todos os valores de ϵ admissíveis, mostrando que família de mapas de Manneville gera sinais caóticos.

Nota-se que para $\epsilon = 1$, que equivale ao mapa de Bernoulli, o valor do expoente é máximo e igual a $\ln 2$. Este valor é justificado pelo fato de que o mapa de Bernoulli é composto de dois segmentos de reta de inclinação igual a 2.

2.1. Densidade invariante

Outro atributo que pode ser utilizado para caracterizar sinais caóticos é a *densidade invariante*. Pelo fato dos sinais caóticos apresentarem a DSCI, não se conhecendo a condição inicial exata não é possível prever o sinal após um curto intervalo de tempo [14]. Deste modo, em sistemas práticos, é interessante estudar estes sinais como um processo estocástico, por meio de médias, variâncias e correlações entre os sinais [15, 16]. Para isto, tem grande valor saber a probabilidade de ocorrência de cada ponto, ou seja, saber a densidade invariante do sinal no domínio U .

Na Figura 3(a) são ilustrados gráficos da evolução da distribuição da densidade para o mapa de Manneville para $\epsilon = 0$. Na Figura 3(b) são apresentados gráficos para $\epsilon = 0.001$ e na Figura 3(c), para $\epsilon = 0.01$. Da mesma forma, na Figura 3(d) é mostrada a evolução da distribuição para $\epsilon = 0.1$ e na Figura 3(e), para $\epsilon = 0.5$. Por fim, na Figura 3(f) são ilustrados os gráficos para $\epsilon = 1$.

Nestas simulações, para cada valor de ϵ foram tomadas 5000 condições iniciais, uniformemente distribuídas no domínio $U = [0, 1)$ e aplicou-se o mapa sucessivas vezes sobre este conjunto de pontos, até que sua distribuição se mantivesse após as demais iterações, ou seja, até que sua densidade fosse invariante.

Observa-se que para $\epsilon \approx 0$, a distribuição se concentra em valores próximos de 0. Esta relação está de acordo com

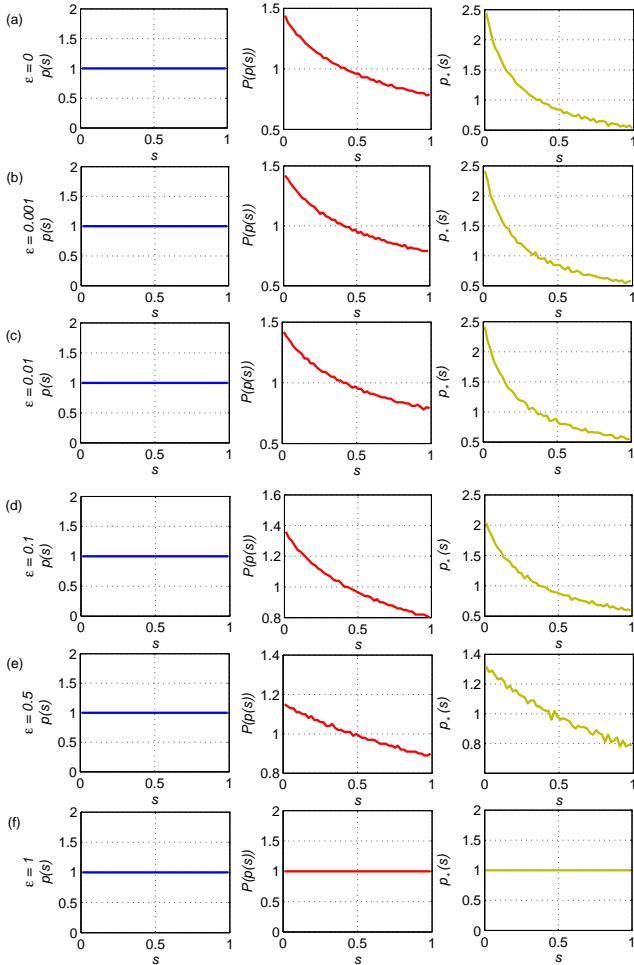


Figura 3 – Evolução da distribuição da densidade para o mapa de Manneville para (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 0.001$, (c) $\epsilon = 0.01$, (d) $\epsilon = 0.1$, (e) $\epsilon = 0.5$ e (f) $\epsilon = 1$.

os gráficos das órbitas mostrados na Figura 1. Para $\epsilon \approx 0$, o intervalo entre as intermitências no sinal é maior e assim, a distribuição dos pontos da trajetória concentra-se próximo de 0. Conforme aumenta-se ϵ , o intervalo entre as intermitências diminui e a distribuição se espalha no domínio U , até que para $\epsilon = 1$, tem-se um sinal caótico sem intermitências. Neste caso, sua densidade invariante é uniforme.

3. SEQUÊNCIA DE AUTOCORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

Nesta seção são apresentados resultados numéricos, obtidos por meio de simulações computacionais, das características espectrais de sinais caóticos gerados pela família de mapas de Manneville. Relaciona-se o parâmetro da família com o intervalo entre as intermitências e com a banda essencial do sinal.

O estudo numérico destes sinais foi realizado assumindo-os como funções-amostras de um processo estocástico, em que a SAC, a DEP e a banda essencial do sistema são analisadas. Na Seção 3.2 é estudada a relação entre o parâmetro da família, o intervalo entre as intermitências e a banda essencial.

3.1. Estudo dos sinais gerados como funções-amostras de um processo estocástico

Na Seção 2 foi visto que a família de mapas de Manneville é definida no domínio $U = [0, 1)$ e dada por

$$f_M(s(n)) = ((1 + \epsilon)s(n) + (1 - \epsilon)s^2(n)) \pmod{1}, \quad (4)$$

em que $\epsilon \in [0, 1]$.

Escolhido um ϵ , dada uma condição inicial $s_0 \in U$ e fazendo as iterações do mapa, define-se uma órbita. Tratando-se este sistema como um processo estocástico ergódico, esta órbita gerada representa uma função-amostra do sistema.

Sendo o domínio $U = [0, 1)$ para esta família e observando as Figuras 1 e 3, nota-se que o sinal gerado por uma mapa desta família possui um valor médio \bar{s} , ou nível DC, que aumenta com ϵ , como ilustrado na Figura 4.

Sabendo-se que a diferença entre a potência do sinal resultante P_s e o seu valor médio ao quadrado \bar{s}^2 resulta na variância σ^2 do sinal [16], realizando-se algumas simulações computacionais, notou-se que para todo ϵ admissível, essa variância é praticamente constante, assumindo valores ligeiramente inferiores para $\epsilon \approx 0$, como é mostrado na Figura 5.

Na área de Telecomunicações é comum que se empregue sinais com média nula em seus sistemas. Neste trabalho, considera-se os sinais gerados pela família de Manneville descontado de seu valor médio, sendo eles, a partir deste momento, representados apenas por $s(n)$.

A SAC deste processo $R_P(k)$ é calculada por meio da Eq. (??)

$$R_P(k) = E[R(k)] = E \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s^*(n-k) \right], \quad (5)$$

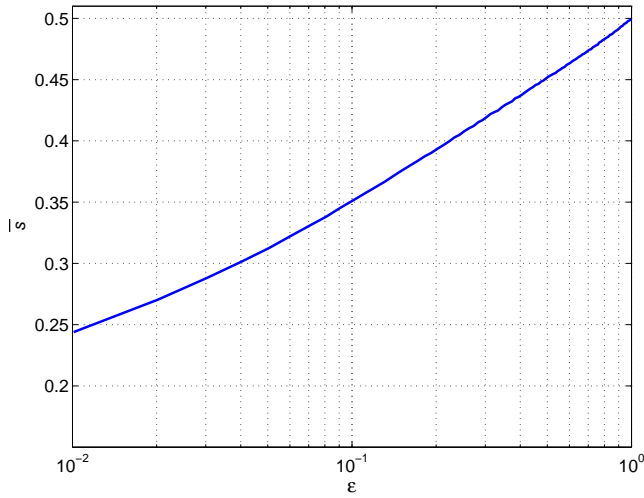


Figura 4 – Valor médio dos sinais gerados pela família de Manneville.

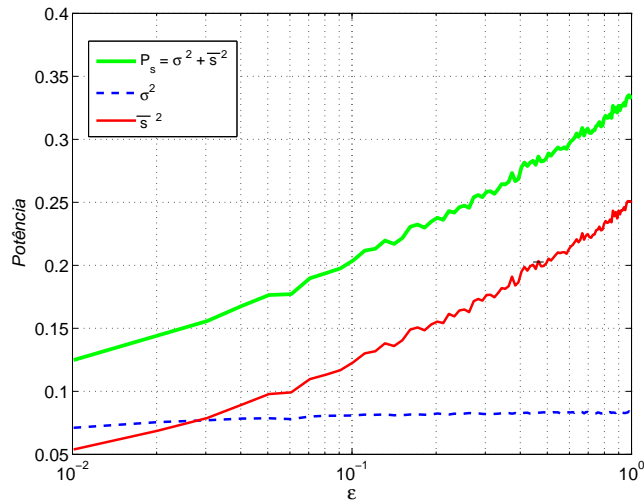


Figura 5 – Potência média de sinais com e sem nível DC gerados pela família de Manneville.

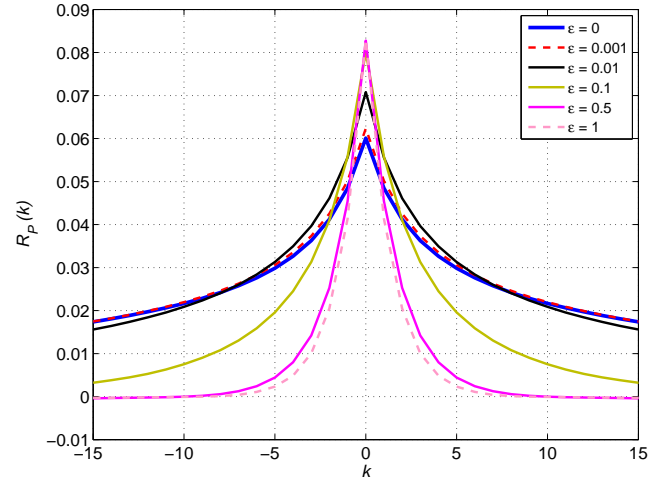


Figura 6 – SACs para sinais do mapa de Manneville para alguns valores de ϵ .

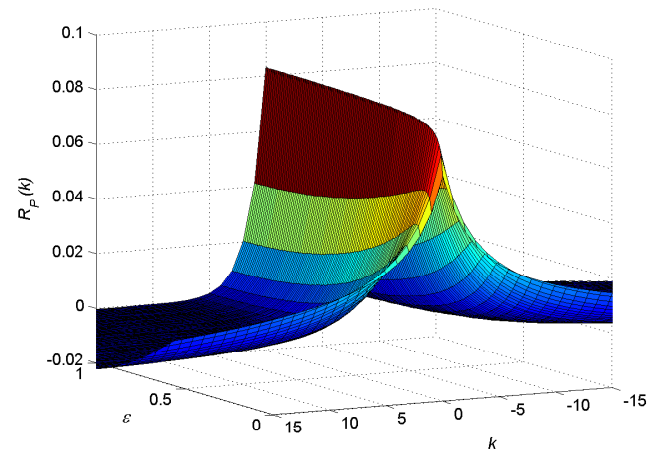


Figura 7 – SACs para sinais do mapa de Manneville para valores de ϵ no intervalo $[0, 1]$.

em que a esperança é tomada sobre todas as condições iniciais que geram órbitas caóticas.

Na Figura 6 são mostrados gráficos de $R_P(k)$ para alguns valores de ϵ . As SACs foram estimadas utilizando a Eq. (5), tomando-se uma média de 5000 funções-amostras, cujas condições iniciais foram uniformemente distribuídas no domínio U e cada uma com $N = 1000$ iterações do mapa. Na Figura 7 são mostradas as SACs para todos os valores admissíveis de ϵ .

Observa-se que para $\epsilon \approx 0$ a SAC decai de forma lenta e os sinais gerados possuem potência mais baixa. Com o aumento de ϵ , o decaimento da SAC passa a ser mais abrupto e os sinais resultantes possuem potência maior.

A DEP do processo $P_P(\omega)$ é obtida conforme a Eq. (??)

$$P_P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_P(k) e^{-j\omega k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E [|S_{tr}(\omega)|^2]. \quad (6)$$

Na Figura 8 são ilustradas estimativas da DEP para difer-

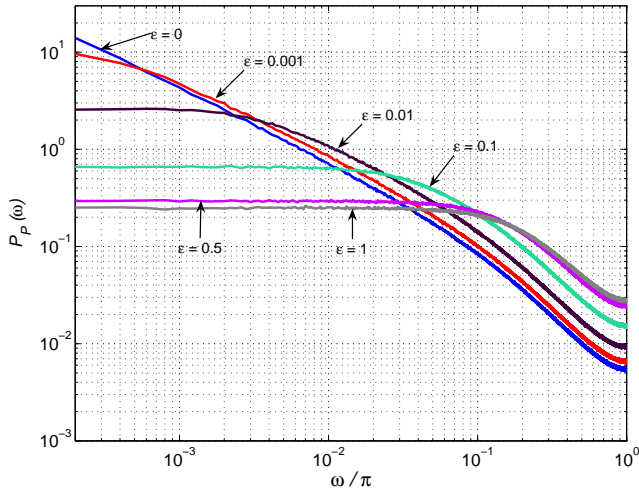


Figura 8 – DEPs para sinais do mapa de Manneville para alguns valores de ϵ .

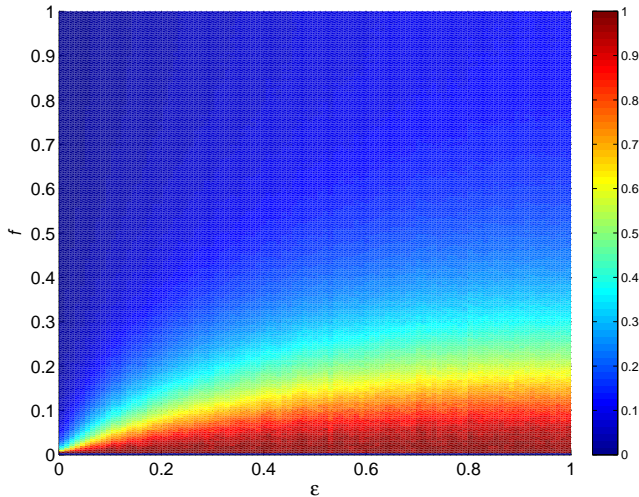


Figura 9 – DEPs normalizadas para sinais do mapa de Manneville para valores de ϵ no intervalo $[0, 1]$.

entes valores de ϵ , utilizando 5000 funções-amostras com condições iniciais s_0 uniformemente distribuídas no domínio U , cada uma com $N = 10000$. Em outras palavras, para cada condição inicial foram calculadas 10000 iterações do mapa, definindo-se as trajetórias. Para cada uma dessas trajetórias foi aplicada a Eq. (??), dada na página ??, calculando a DEP de cada uma delas. Por fim, tirou-se a média entre as 5000 DEPs obtidas, resultando na DEP do processo.

Na Figura 9 é ilustrado o comportamento geral da DEP do processo, de forma normalizada, para todos os valores admissíveis de ϵ .

Pode-se inferir que os sinais resultantes constituem um processo com a maior parte de suas potências concentradas nas baixas frequências. Quanto mais próximo de zero for o parâmetro da família, mais estreita é a banda do sinal resultante e ela se alarga com o aumento de ϵ .

Para quantificar essa distribuição de potência na frequên-

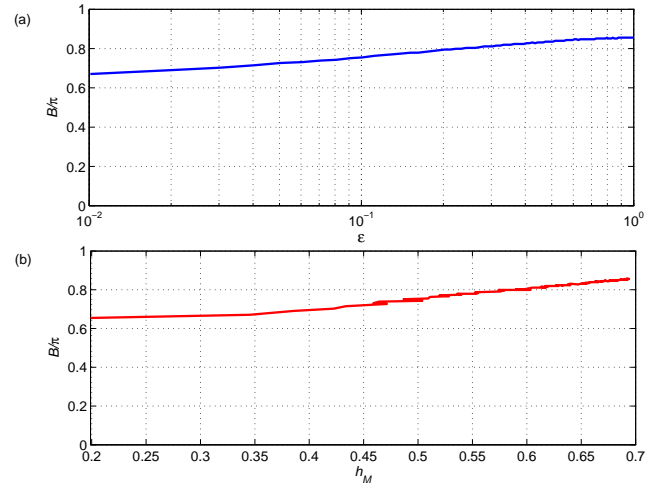


Figura 10 – Banda essencial em função (a) de ϵ e (b) do expoente de Lyapunov h_M .

cia por meio da banda essencial, na Figura 10 são apresentados gráficos da banda essencial B em função do parâmetro ϵ e em função do expoente de Lyapunov h_M .

Observa-se na Figura 10(a), que a banda essencial do sinal resultante é mais estreita para $\epsilon \approx 0$ e aumenta conforme ϵ se aproxima de 1, porém, diferentemente da família tenda inclinada, não se chega a uma DEP plana para sinais gerados pelos mapas de Manneville.

Pelo fato das intermitências serem uma das principais características dos sinais gerados pela família de mapas de Manneville, é relevante relacionar o intervalo entre as ocorrências das intermitências com o parâmetro da família e com a banda essencial, o que é discutido a seguir.

3.2. Relação entre banda essencial, intervalo entre intermitências e parâmetro da família

Foi visto na Seção 2 que a família de mapas de Manneville gera sinais com intermitências e que o intervalo entre as ocorrências das mesmas varia com o parâmetro da família.

Nesta seção busca-se relacionar este intervalo com o parâmetro ϵ e com a banda essencial. Para isso, por meio de simulações computacionais, calculou-se o número médio de amostras entre as ocorrências de intermitências, τ , para cada valor de ϵ .

Toma-se uma trajetória longa gerada por um mapa da família determinado por ϵ . Sendo $U = [0, 1]$, em toda a trajetória conta-se o número de amostras subsequentes em que se obtém uma transição entre $s(n) < 0.5$ e $s(n + 1) > 0.5$, em que 0.5 é o valor médio do domínio do mapa. Toma-se uma média entre esses números de amostras, obtendo-se τ .

Repetindo-se este processo para cada ϵ admissível, obtém-se a relação mostrada na Figura 11.

De acordo com o que foi mostrado na Figura 1, observa-se aqui também que, quanto menor o ϵ , maior o intervalo entre as intermitências e quando ϵ se aproxima de 1, este intervalo diminui até que o sinal se torna caótico sem intermitências.

Na seção anterior, relacionou-se a banda essencial dos sinais resultantes com o parâmetro da família e com o ex-

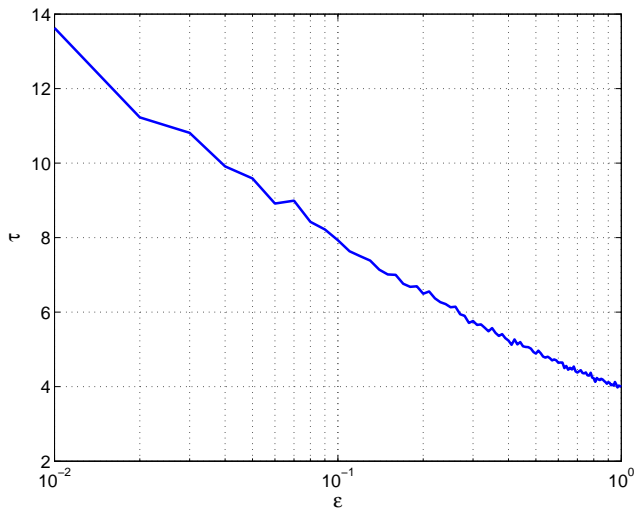


Figura 11 – Relação entre o parâmetro ϵ e o número médio de amostras entre as intermitências, τ .

Figura 12 – Número médio de amostras entre as intermitências em função (a) da banda essencial e (b) do expoente de Lyapunov h_M .

poente de Lyapunov h_M . Assim, é possível relacionar o intervalo entre as intermitências com a banda essencial e com o expoente, apresentados na Figura 12.

Verifica-se que quando $\epsilon \approx 0$, maior é o intervalo entre as intermitências e menor é a banda essencial dos sinais resultantes, ou seja, são sinais banda estreita e, no caso desta família, com a maior parte de sua potência concentrada nas baixas frequências. Além disso, o expoente de Lyapunov tem valores mais baixos, porém positivos, indicando que os sinais aperiódicos são caóticos.

Já para $\epsilon \approx 1$, em que o intervalo entre as intermitências é mínimo, a banda essencial é maior, mas ainda assim com a potência dos sinais resultantes concentrada nas baixas frequências e o expoente de Lyapunov é maior, o que implica que os sinais gerados com condições iniciais diferentes distanciam-se rapidamente.

Com o estudo desta família, observa-se mais uma vez que caos não implica em banda larga e SAC impulsiva, como costuma-se encontrar na literatura.

4. CONCLUSÕES

Pôde-se verificar que os sinais caóticos gerados pela família de mapa de Manneville podem apresentar diversas larguras de banda, porém de forma esquematizada e definida. De maneira muito simples é possível escolher uma banda essencial e encontrar um mapa que gere sinais que ocupem essa largura de banda desejada ou um mapa que gere sinais com intermitências com intervalo entre as ocorrências conhecido.

Além disso, em sistemas práticos, existe maior facilidade em estimar a banda de um sinal em vez de estimar o intervalo entre as intermitências. Deste modo, relacionando-se estes

parâmetros, é possível identificar ou modelar um sinal por meio de sua banda essencial.

Espera-se que os resultados iniciais apresentados aqui possam contribuir em trabalhos futuros e em aplicações práticas que contenham sinais intermitentes, como na física de plasmas e lasers [5, 6].

ACKNOWLEDGMENTS

Os autores gostariam de agradecer ao Prof. Iberê L. Caldas pela sugestão do uso do mapa de Manneville em seus estudos de análise espectral de sinais caóticos.

Referências

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, e J. A. Yprke, “Chaos - an introduction to dynamical systems,” New York: Springer, 1996.
- [2] N. F. Ferrara, e C. P. C. Prado, “Caos - uma introdução,” São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- [3] J. L. P. Velazquez, H. Khosravani, A. Lozano, B. L. Bardakjian, P. L. Carlen, e R. Wennberg, “Type iii intermittency in human partial epilepsy,” *European Journal of Neuroscience* vol. 11, No. 7, pp. 2571-2576, Março 1999.
- [4] M. S. Baptista, e I. L. Caldas, “Type-II intermittency in the driven double scroll circuit,” *Physica D: Nonlinear Phenomena* vol. 132, pp. 325-338, Julho 1999.
- [5] M. B. A. P. Heller, J. A. Stockel, Z. A. Brazilio, e I. L. Caldas, “Scrape-off layer intermittency in the castor tokamak,” *Plasma Physics and Controlled Fusion* vol. 6, pp. 846-853, Março 1999.
- [6] R. Harrison, I. Al-Saidi, e D. Biswas, “Observation of instabilities and chaos in a homogeneously broadened single mode and multimode midinfrared raman laser,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 21, No. 9, pp. 1491-1497, Setembro 1985.
- [7] E. F. Manfra, I. L. Caldas, R. L. Viana, e H. J. Kalinowski, “Type-I intermittency and crisis-induced intermittency in a semiconductor laser under injection current modulation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 27, pp. 185-195, Janeiro 2002.
- [8] D. M. Kato, e M. Eisencraft, “On the power spectral density of chaotic signals generated by skew tent maps,” *ISSCS07 - International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, 2007, vol. 1, pp. 105-108, Julho 2007a.
- [9] D. M. Kato, e M. Eisencraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos,” *SBrT07 - XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, CD-ROM, Setembro 2007b.
- [10] D. M. Kato, e M. Eisencraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos: resultados analíticos,” *SBrT08 - XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, CD-ROM, Setembro 2008.

- [11] Y. Pomeau, e P. Manneville, "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, " Communications in Mathematical Physics vol. 4, No. 2, pp. 189-197, Junho 1980.
- [12] A. Kisel, H. Dedieu, e T. Schimming, "Maximum likelihood approaches for noncoherent communications with chaotic carriers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I, Fundamental Theory and Appl.*, v. 48, n. 5, pp. 533-542, Maio 2001.
- [13] D. F. Drake, e D. B. Williams, "Linear, random representations of chaos," *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 55, pp. 1379-1389, Abril 2007.
- [14] S. H. Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering," Reading: Addison-Wesley, 1998.
- [15] A. Lasota, e M. Mackey, "Probabilistic properties of deterministic systems," Cambridge: Cambridge University, 1985.
- [16] P. Z. Peebles, "Probability, random variables and random signal principles," New York: McGraw-Hill, 2001.
- [17] A. V. Oppenheim, R. W. Achafer, e J. R. Buck, "Discrete-time signal processing," New Jersey: Prentice-Hall, 1999.